# خواص مادّہ

از

سید محمد علیخاں بی۔ اے (عثمانیہ) اے۔ آر۔ سی۔ یس، بی۔ یس۔ سی آنرس (لندن)

سید عبدالرحمن بی۔ اے (عثمانیہ)

شعبہ طبیعیات جامعہ عثمانیہ

حیدرآباد دکن

مطبوعہ شمس المطابع مشین پریس نظام شاہی روڈ حیدرآباد دکن

سنہ ۱۳۴۴ ف م سنہ ۱۹۳۵ء

# دیباچہ

ہندوستانی جامعات میں پاس یا آنرس ڈگری کی تعلیم پانیوالے ایسے طلبا کیلئے یہ کتاب لکھی گئی ہے جو احصاء تفرقی اور تکملی کے سادہ اصول سے کسیقدر واقف ہوں۔ ریاضی کے ذریعہ جہاں کہیں بھی تفہیم کیضرورت تھی وہاں طلبا کی دقتوں کا لحاظ کرتے ہوئے تفصیلی طور پر بحث کیگئی ہے تاکہ دیگر نظری کتب کی محتاجی باقی نہ رہے۔ مادہ سے متعلق مظاہر کی تجربی تفصیلات پر کافی روشنی ڈالی گئی ہے امید کیجاتی ہے کہ اس اہم مضمون میں دلچسپی رکھنے والے طلبا اس کتاب کو خاص طور پر کارآمد پائیں گے۔

یہ کتاب ایک حد تک ان لکچروں کے باعث معرض وجود میں آئی جو خواص مادہ پر جامعہ عثمانیہ میں وقتاً فوقتاً طیلسانین کی جماعتوں کو دئے گئے۔ اس کی تدوین میں مختلف معیاری کتب اور رسائل سے کافی مدد لیگئی ہے جنکا حوالہ ہر باب کے اختتام پر اعداد کے ذریعہ دیا گیا ہے۔ رائل کالج آف سائنس لندن کے بعض مشاہیر طبیعیات کے ہم رہین منت ہیں جن کے لکچروں کے بغیر اس کتاب کا پایۂ تکمیل کو پہنچنا شاید ممکن نہ ہوتا۔

عام طور پر انٹرمیڈیٹ کی جماعتوں میں جو ابتدائی امور بتائے جاتے ہیں انکو اس کتاب میں درج نہیں کیا گیا ہے۔ صرف اہم مضامین مثلاً جمود کا معیار اثر، نظریۂ اہتزاز، جاذبیت، لچک، سطحی تناؤ، لزوجیت، نفوذ اور نظریۂ تحرک وغیرہ سے اسمیں تفصیلی بحث کیگئی ہے۔ کتاب کے آخر میں اسمی اشاریہ اور ساتھ ہی ساتھ اردو اور اسکے معادل انگریزی اصطلاحات کی ایک مکمل فہرست بھی شامل کیگئی ہے اور توقع کی جاتی ہے کہ اس سے طلباء کو مضمون کے سمجھنے میں سہولت ہوگی۔

شعبہ طبیعیات جامعہ عثمانیہ

حیدرآباد دکن

اگست ۱۹۳۵ء

سید محمد علیخاں

سید عبدالرحمٰن

# فہرست مضامین

# "غلطنامہ"

| صفحہ | سطر | غلط | صحیح |
|---|---|---|---|
| ۴ | ۱۱ | افقی خط | خط |
| ۶ | ۲۲ | لا فرلا | لا۲ فرلا |
| ۱۲ | ۱۶ | قر | فر |
| ۴۱ | ۱۸ | پھسلواں | لڑھکنے والا |
| ۴۷ | ۳ | کا وزن | کی کمیت |
| ۵۴(الف) | ۷ | (1928) | (1924) |
| ۵۴(الف) | ۹ | Master | Matter |
| ۶۳ | ۱۵ | ریچرز | ریشارڈز |
| ۱۱۳ | ۱۱ | لٹکا | ٹیکا |
| ۱۱۸ | ۳ | (۳۱) | (۳۹) |
| ۱۱۸ | ۵ | (۱۰) | (۴۰) |
| ۱۴۲ | ۱۰ | تحیتوں | تختیوں |
| ۱۴۹ | ۱۵ | ۴/۱ | ۴/۹ |
| ۱۸۰ | ۱۲ | زنگن | رونٹگن |
| ۱۹۳ | ۱۰ | مازگوتی | میزنگوفی |
| ۲۱۸ | ۲۰ | سائکلائڈ | تدویرنما |
| ۷۱۴(الف) | ۱۴ | (2893) | (1893) |

# پہلا باب

## ابعاد۔ رسم الطریق اور جمود کا معیار اثر

ابعاد :۔ س۔ گ۔ ث نظام میں رقبہ اور حجم کی اکائیاں علی الترتیب (سمر)² اور (سمر)³ ہوتی ہیں۔ اگر ایک میٹر طول کو ہم معیاری قرار دیں تو رقبہ اور حجم کی اکائیاں بھی بالترتیب (میٹر)² اور (میٹر)³ ہوں گی۔ یعنی معمولی اکائیوں سے رقبہ (۰۰ اسمر)² اور حجم (۰۰ اسمر)³ گنا بڑا ہوگا۔ اس صورت میں طول کے رقوم میں رقبہ اور حجم کے ابعاد علی الترتیب ۲ اور ۳ کہلائیں گے۔ اسی طرح جب کوئی ماخوذ اکائی کسی بنیادی اکائی کے ن ویں نسب نما پر مبنی ہو تو ایسی ماخوذ اکائی بنیادی اکائیوں میں ن ابعاد کی ہوگی۔

رفتار کے ابعاد حسب ذیل طریقہ سے معلوم کئے جاتے ہیں :۔

رفتار = $\frac{\text{طول}}{\text{وقت}}$ = طول¹ × وقت⁻¹ یعنی ۱ طول اور –۱ وقت اسراع کے ابعاد دریافت کرنے ہوں تو چونکہ اسراع = $\frac{\text{رفتار}}{\text{وقت}}$ اس لئے اس کے ابعاد ۱ طول اور –۲ وقت ہونگے۔

علیٰ ہذا لقیاس معیار حرکت = کمیت × رفتار، اسلئے اسکے ابعاد ۱ کمیت، ۱ طول اور –۱ وقت ہونگے۔

چونکہ قوت = کمیت × اسراع لہٰذا قوت کے ابعاد ۱ کمیت ۱ طول اور –۲ وقت ہونگے۔ اسی طرح حجم، رقبہ، کام وغیرہ کے ابعاد حاصل کئے جا سکتے ہیں۔

مختلف اکائیوں کے ابعاد حسب ذیل ہیں :۔

| | طول | کمیت | وقت |
| --- | --- | --- | --- |
| رفتار | ۱ | صفر | -۱ |
| اسراع | ۱ | صفر | -۲ |
| معیار حرکت | ۱ | ۱ | -۱ |
| رقبہ | ۲ | صفر | صفر |
| حجم | ۳ | صفر | صفر |
| کثافت | -۳ | ۱ | صفر |
| قوت | ۱ | ۱ | -۲ |
| کام یا توانائی | ۲ | ۱ | -۲ |
| کثافت اضافی | صفر | صفر | صفر |
| دباؤ | -۱ | ۱ | -۲ |
| سطحی تناؤ | صفر | ۱ | -۲ |
| لزوجت | -۱ | ۱ | -۱ |
| ینگ کا معیار لچک | -۱ | ۱ | -۲ |

ان ابعاد کے ذریعہ ہم بہت سے سوالات حل کر سکتے ہیں۔ مثال کے طور پر ان کی مدد سے ہم سادہ رقاص کا ضابطہ اخذ کرینگے۔

یہ ہم جانتے ہیں کہ رقاص کا وقت دوران و، رقاص کے طول ل، اسراع بوجہ جاذبہ زمین ج اور رقاص کی کمیت ک پر منحصر ہے۔ فرض کرو کہ $و = م\, ل^{ا}\, ج^{ب}\, ک^{ف}$ ...... (۱)

جہاں م، ا، ب اور ف دریافت طلب اعداد ہیں۔

اس مساوات کو صحیح ہونے کے لئے داہنی جانب کے ابعاد، بائیں جانب کے ابعاد کے مساوی ہونے چاہئیں۔ و کے ابعاد ۱ وقت، صفر طول اور صفر کمیت ہیں، ل کے ابعاد ۱ طول اور ج چونکہ اسراع ہے اسکے ابعاد ۱ طول، ۲- وقت ہیں اور ک کے ابعاد ۱ کمیت ہے۔

لہذا $م\, ل^{ا}\, ج^{ب}\, ک^{ف}$ میں ا + ب طولی ابعاد ہیں، ۲- ب وقت کے ابعاد اور ف کمیت کے،

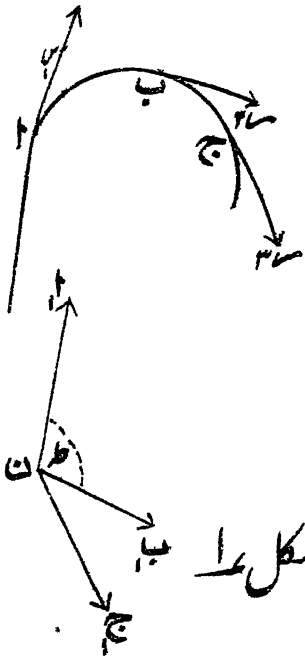
$$\left.\begin{array}{l} ا + ب = صفر \\ -۲ب = ۱ \\ ف = صفر \end{array}\right\}$$ لہذا ... تاکہ مساوات (۱) صحیح ثابت ہو

$\therefore$ ا = ½، ب = -½ اور ف = صفر

$\therefore$ $و = م\, ل^{\frac{1}{2}}\, ج^{-\frac{1}{2}}$ یعنی $و = م \sqrt{\frac{ل}{ج}}$ یہاں مستقل م کی قیمت تجربہ سے معلوم کیگئی اور جب زاویہ اہتزاز چھوٹا ہو تو یہ مساوی ہوتی ہے ۲ π کے

اسلئے $و = ۲\pi \sqrt{\frac{ل}{ج}}$

اسی طرح ہم دوسرے سوالات بھی حل کر سکتے ہیں۔

**رسم الطریق** فرض کرو کہ ایک ذرہ ق منحنی ا ب ج پر اس طرح حرکت کر رہا ہے کہ اسکی رفتار ا پر س۱، نقطہ ب پر س۲ اور ج پر س۳ وغیرہ ہے۔

کوئی نقطہ ن لیکر ن ا، ن ب، ن ج ایسے خطوط کھینچو جو بالترتیب ا م، ب م، اور ج م کے متوازی بھی ہوں اور م، م، م کی تعبیر بھی کریں۔
اب اگر ا، ب، ج نقطوں کو ایک منحنی کے ذریعہ ملایا جائے تو یہ منحنی ق کی حرکت کا رسم الطریق کہلائے گا۔ اگر ق ایک خط مستقیم پر یکساں رفتار سے حرکت کرے تو ق کی حرکت کا رسم الطریق ایک نقطہ ہوگا۔ اگر ق یکساں رفتار سے حرکت نہ کرے تو ایسی صورت میں ق کی حرکت کا رسم الطریق ایک افقی خط مستقیم ہوگا۔

فرض کرو کہ شکل ۱ میں ا اور ب دونوں نقطے ایکدوسرے کے بالکل قریب واقع ہیں۔ تب رسم الطریق میں ا اور ب بھی بہت قریب واقع ہونگے۔ فرض کرو کہ ق نقطہ ا سے ب تک و وقت میں حرکت کرتا ہے۔

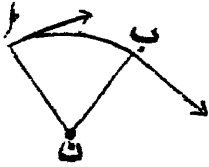
جبکہ ق منحنی ا ب ج ........ پر سے گزرتا ہے اس وقت یہ تصور کرو کہ ایک ذرّہ قَ رسم الطریق ا ب ج ........ پر سے بھی گزر رہا ہے۔ تب قَ، ا سے ب تک و وقت میں پہنچے گا۔ یعنی قَ کی رفتار = $\frac{ا ب}{و}$

فرض کرو کہ زاویہ ا ن ب = ط، اب چونکہ ن ا، ق کی رفتار کی تعبیر کرتا ہے ا پر، اور نقطہ ب پر ق کی رفتار کی تعبیر ن ب سے ہوتی ہے اس لئے ق کے ا سے ب تک جانے میں رفتار میں جو تبدیلی واقع ہوئی اس کی تعبیر ا ب سے ہوگی۔

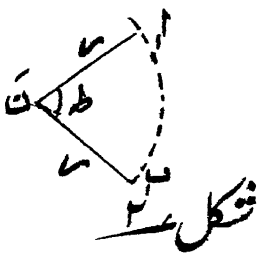
یعنی ق کی تبدیلی رفتار = ا ب اور چونکہ یہ و وقت میں ہوئی اس لئے ق کی شرح تبدیلی رفتار = $\frac{ا ب}{و}$ = ق کے اسراع کے

یا دوسرے الفاظ میں ق کا اسراع = رسم الطریق میں قَ کی رفتار کے

**یکساں دائری حرکت :-** فرض کرو کہ ایک نقطہ ق یکساں رفتار سے دائرہ کے محیط پر حرکت کر رہا ہے اور دائرہ کا مرکز ن اور نصف قطر ص ہے۔

ا ب ن

اوپر کے بیان کے مطابق اگر اس کا رسم الطریق کھینچا جائے تو قَ کی رفتار ہر وقت نصف قطر کے علی القوائم ہوگی۔ اسلئے نَ اَ اور نَ بَ ، ن ا اور ن ب کے علی القوائم ہوں گے۔

نَ ط سا سا اَ بَ

شکل ۲

اور زاویہ ا ن ب = زاویہ اَ نَ بَ = ط

فرض کرو کہ ق کو ا سے ب تک جانے کے لئے جو وقت صرف ہوا وہ و کے مساوی ہے

نب سا = ا ب / و = ص ط / و

رسم الطریق میں ذرہ قَ کی رفتار = اَ بَ / و = سا ط / و

اسلئے ق کا اسراع = قَ کی رفتار = سا ط / و = سا ط سا / ص ط = سا² / ص اور یہ ہمیشہ دائرہ کے مرکز کی جانب عمل کرتا ہے چونکہ نصف قطر کے علی القوائم ہے۔

اور نیز چونکہ دائرہ کا محیط = ۲ $\pi$ ص اس لئے ق اس دائرہ کا پورا چکر وقت ۲ $\pi$ ص / سا میں لگاتا ہے۔ ایک پوری گردش میں ق جو زاویہ طے کرتا ہے = ۲ $\pi$، لہذا ایک پورے چکر کا وقت = ۲ $\pi$ / $\omega$ جہاں $\omega$ = ذرہ ق کی زاویائی رفتار۔

∴ ۲ $\pi$ ص / سا = ۲ $\pi$ / $\omega$

∴ سا = ص $\omega$ یعنی ق کا اسراع = سا² / ص = ص $\omega^2$

اگر کسی ذرہ کی کمیت ک ہو اور وہ یکساں رفتار کے ساتھ دائرہ میں حرکت

کرے تو جو قوت اسکے مرکز پر عمل کرے گی وہ $\frac{ک\ ںا^2}{ص}$ یا ک ص کلا² کے مساوی ہو گی ۔

اگر دھاگے کے ایک سرے سے کوئی پتھر باندھا جائے اور دوسرے سرے کو اُنگلی سے باندھ کر پتھر کو یکساں رفتار سے دائرے کی شکل میں گھمایا جائے تو انگلی پر جو قوت دھاگے کی سمت میں عمل کریگی = $\frac{ک\ ںا^2}{ص}$ = ک ص کلا²

**جمود کا معیار اثر:۔** فرض کرو کہ ہم ایک سلاخ کو مختلف چھوٹے چھوٹے ٹکڑوں میں جن کی کمیت ک₁، ک₂، ک₃ ........ وغیرہ ہے تقسیم کرتے ہیں اور ان کا فاصلہ کسی ایک سرے سے ص₁، ص₂، ص₃، ص₄ ........ وغیرہ ہے۔ تب ک₁ ص₁²، ک₂ ص₂²، ک₃ ص₃² ........ وغیرہ ان ٹکڑوں کے جمود کا معیار اثر علی الترتیب اس سرے کے گرد ہوگا اور چنانچہ $\sum$ ک ص² اس سلاخ کے جمود کا معیار اثر اس کے ایک سرے کے گرد کہلاتا ہے۔ فرض کرو کہ شکل ۳ میں ا ب ایک سلاخ ہے جس کا طول ل اور کمیت م ہے۔ اس سلاخ کو اگر چھوٹے چھوٹے ٹکڑوں میں تقسیم کیا جائے تو ان میں سے ایک چھوٹا ٹکڑا (فرض کرو) فرلا ایسا ہے جو سرے ا سے لا فاصلہ پر ہے۔ اگر اکائی طول کی کمیت ک ہو تو اس چھوٹے ٹکڑے کی کمیت = ک فرلا

لا فرلا

ا ب

شکل ۳

لہٰذا اس ٹکڑے کے جمود کا معیار اثر = ک فرلا لا²

اگر پوری سلاخ کے جمود کا معیار اثر اسکے ایک سرے کے گرد مج سے تعبیر کیا جائے

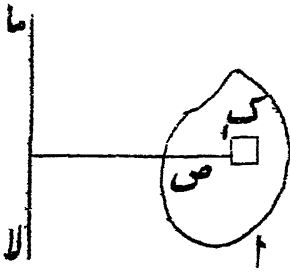
تو مج = ک $\int_{صفر}^{ل}$ فرلا لا² = ک $\frac{ل^3}{3}$ لیکن ک ل = م

∴ مج = $\frac{م\ ل^2}{3}$ بشرطیکہ سلاخ یکساں ہو۔

اسی طرح اس سلاخ کے جمود کا معیار اثر اسکے مرکز کے گرد = ک $\int_{صفر}^{\frac{ل}{2}}$ لا² . فرلا

$$\frac{ک ل^۳}{۲۴} = \frac{م ل^۲}{۲۴}$$

لیکن یہ صرف آدھی سلاخ کا جمودی معیار اثر ہے۔ لہذا

پوری سلاخ کے جمود کا معیار اثر اسکے مرکز کے گرد = $\frac{م ل^۲}{۱۲}$

فرض کرو کہ شکل ۴ میں ا ایک ایسا جسم ہے جسکی کمیت م ہے اور لا ما کوئی ایک خط ہے۔ اگر اس جسم کو چھوٹے چھوٹے حصوں میں تقسیم کیا جائے جس کی کمیت $ک_۱$، $ک_۲$، $ک_۳$، $ک_۴$ ......... وغیرہ ہو اور ان کا فاصلہ لا ما سے بالترتیب $ص_۱$، $ص_۲$، $ص_۳$ ... ...... وغیرہ ہو۔

شکل ۴

تو $ک_۱ ص_۱^۲ + ک_۲ ص_۲^۲ + ک_۳ ص_۳^۲ + ......$ کو خط لا ما کے گرد جسم ا کے جمود کا معیار اثر کہتے ہیں۔ اگر اس کو مج سے تعبیر کیا جائے تو

$$مج = \sum ک ص^۲$$

اب فرض کرو کہ $\sum ک ص^۲ = م ف^۲$

جہاں $م = ک_۱ + ک_۲ + ک_۳ + ......... = \sum ک$

اور $ف^۲ = \sum ص^۲$

اس ف کو گردشی نصف قطر سے تعبیر کیا جاتا ہے یعنی $مج = م ف^۲$

**علی القوائم محوروں کا اصول:۔** فرض کرو کسی پترے کے جمود کے معیار اثر ایسے دو محوروں کے گرد جو ایکدوسرے کے علی القوائم ہیں، $مج_۱$ اور $مج_۲$ سے تعبیر کئے جاتے ہیں اور خود یہ محور پترے کے مستوی میں ہیں۔ اگر اس پترے کے جمود کا معیار اثر ایک ایسے خط کے گرد جو اُن دونوں محوروں کے نقطۂ تقاطع میں سے گزرتا ہے اور اس پترے کے مستوی کے علی القوائم ہے مج ہو تو

مج = مج$_1$ + مج$_2$

فرض کرو کہ شکل ۵ میں ن لا اور ن ما ایسے دو محور ہیں جو ایک دوسرے کے علی القوائم ہیں۔ ق ایک ٹکڑا ہے جس کی کمیت ک$_1$ ہے اور اسکا فاصلہ ان محوروں سے لا$_1$ اور ما$_1$ ہے اور نیز یہ بھی فرض کرو کہ ق کا فاصلہ ایک ایسے محور سے جو ن میں سے گزرتا ہے اور مستوی ما ن لا کے علی القوائم ہے = ق$_1$

تب مج = $\Sigma$ ک$_1$ ق$_1^2$

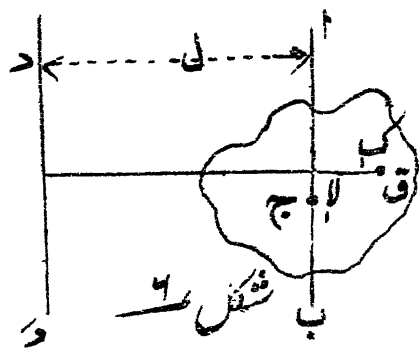
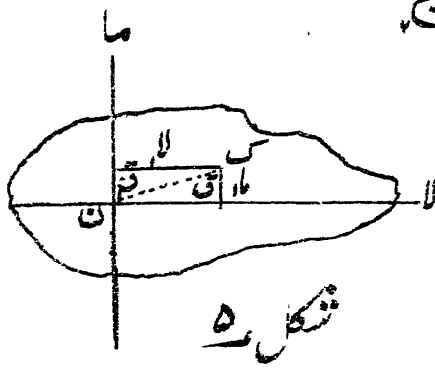
= $\Sigma$ ک$_1$ (لا$_1^2$ + ما$_1^2$)

= $\Sigma$ ک$_1$ لا$_1^2$ + $\Sigma$ ک$_1$ ما$_1^2$

= مج$_1$ + مج$_2$

متوازی محوروں کا اصول :— کسی پترے کے جمود کا معیار اثر ایسے محور کے گرد جو پترے کے مستوی میں واقع ہو = اس محور کے متوازی اور پترے کے مرکز کمیت میں سے گزرنے والے کسی دوسرے محور کے گرد والے جمود کے معیار اثر کے + م ل$^2$ جہاں م = پترے کی کمیت اور ل = دونوں محوروں کے درمیان فاصلہ۔

شکل ۶

فرض کرو شکل ۶ میں د دَ ایک ایسا محور ہے جو پترے کے مستوی میں ہے اور ۲ ب ایک دوسرا محور

ایسا ہے جو د دَ کے متوازی بھی ہے اور پترے کے مرکز کمیت ج میں سے گزر بھی رہا ہے۔ اس پترے میں کوئی ایک چھوٹا سا ٹکڑا ق تصور کرو۔ اب اگر اُس چھوٹے سے ٹکڑے ق کی کمیت جس کا فاصلہ ا ب سے لا۱ ہے، ک۱ فرض کی جائے۔ (ان ٹکڑوں کے فاصلوں کی علامتیں ا ب کے دائیں یا بائیں جانب ہونے کے لحاظ سے بالترتیب مثبت یا منفی لی جائیں گی۔)

تو اس ٹکڑے کے جمود کا معیار اثر د دَ کے گرد = ک۱ (لا۱ + ل)²

= ک۱ (لا۱² + ل² + ۲ لا۱ ل)

= ک۱ لا۱² + ک۱ ل² + ۲ لا۱ ل ک۱

فرض کرو کہ د دَ اور ا ب کے گرد جمود کا اثری معیار مج اور مجَ علی الترتیب ہیں تب

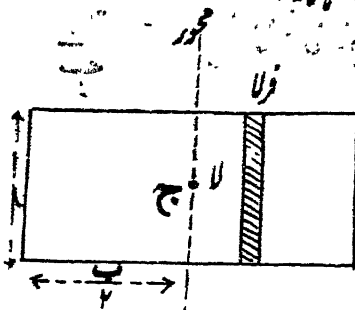
مج = Σ ک۱ (لا۱ + ل)²

= Σ ک۱ لا۱² + Σ ک۱ ل² + ۲ Σ ک۱ لا۱ ل

= مجَ + Σ ک۱ ل² + صفر

= مجَ + م ل² (چونکہ Σ ک۱ لا۱ = صفر یعنی پترے کو کسی دھاری دار کنارے کے ذریعہ ا ب محور پر لٹکایا جائے تو توازن میں رہے گا یا دیگر الفاظ میں ک۱ لا۱ کی نفی علامتیں اتنی ہی ہوں گی جتنی کہ مثبت علامتیں)

(ا) ایک مستطیل کے جمود کا معیار اثر (جس کے ضلعے ا اور ب ہیں) ایسے محور کے گرد جو ا کے متوازی ہو اور مستطیل کے مرکز میں سے گزر رہا ہو:-

فرض کرو کہ مستطیل کی کمیت = م

اس مستطیل کو فرلا کے مانند چھوٹی چھوٹی دھجیوں میں تقسیم کرو اور ایک چھوٹی فرلا دھجی پر غور کرو جس کا فاصلہ محور سے فرض کرو = لا (دیکھو شکل ۶)

محور

فرلا

ج لا

ا

ب/۲

شکل ۶

اس دھجی کی کمیت = فرلا م / ب

اور اسکے جمود کا معیار اثر اُس محور کے گرد $= \frac{\text{م}\ \text{فرلا}}{\text{ب}} \cdot \text{لا}^{2}$

$\therefore$ مستطیل کے جمود کا معیار اثر اُس محور کے گرد $= 2\int_{\text{صفر}}^{\frac{\text{ب}}{2}} \frac{\text{م}\ \text{فرلا}\ \text{لا}^{2}}{\text{ب}}$

$$= 2\,\frac{\text{م}}{\text{ب}}\left[\frac{\text{لا}^{3}}{3}\right]_{\text{صفر}}^{\frac{\text{ب}}{2}}$$

$$= \text{م} \cdot \frac{\text{ب}^{2}}{12}$$

اگر ا چھوٹا ہو یعنی مستطیل کے بجائے جسم کی شکل ایک سلاخ کی سی ہو جہاں ب = ل = سلاخ کا طول تو ایسی سلاخ کے جمود کا معیار اثر مرکز کے گرد

$$= \frac{\text{م}\ \text{ل}^{2}}{12}$$

اگر وہی محور ب کے متوازی ہو تو اسی محور کے گرد مستطیل کے جمود کا معیار اثر

$$= \frac{\text{م}\ \text{ا}^{2}}{12}$$

**(۲) مذکورۂ بالا مستطیل کے جمود کا معیار اثر ایسے محور کے گرد جو مستطیل کے مستوی کے علی القوائم ہو اور مستطیل کے مرکز میں سے بھی گزر رہا ہو:—**

علی القوائم محوروں کے اصول سے $= \frac{\text{م}\ \text{ا}^{2}}{12} + \frac{\text{م}\ \text{ب}^{2}}{12} = \frac{\text{م}(\text{ا}^{2}+\text{ب}^{2})}{12}$

**(۳) ایک قرص کے جمود کا معیار اثر ایسے محور کے گرد جو قرص کے مرکز میں سے بھی گزرے اور اُسکے مستوی کے علی القوائم بھی ہو۔**

فرض کرو کہ قرص کی کمیت = م اور اسکا نصف قطر = ص

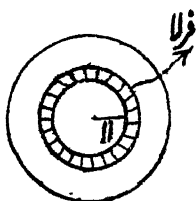
اب قرص کے ایک ایسے چھوٹے حلقہ پر غور کرو جس کا نصف قطر لا اور عرض فرلا ہے اس حلقہ کا رقبہ $= 2\pi\ \text{لا}\ \text{فرلا}$ اور اس کی کمیت $= \frac{\text{م}\ 2\pi\ \text{لا}\ \text{فرلا}}{\pi\ \text{ص}^{2}}$

شکل نمبر ۸

اسکے جمود کا معیار اثر ایک ایسے محور کے گرد جو اس کے مرکز میں سے گزر رہا ہو اور اسکے مستوی کے بھی علی القوائم ہو $= \frac{2\pi\ \text{لا}\ \text{فرلا}\ \text{م}}{\pi\ \text{ص}^{2}} \cdot \text{لا}^{2}$

لہٰذا پورے قرص کیلئے مج $= \int_{\text{صفر}}^{\text{ص}} \frac{2\pi\ \text{لا فرلا م لا}^2}{\pi\ \text{ص}^2}$

$$= \frac{2\text{م}}{\text{ص}^2} \int_{\text{صفر}}^{\text{ص}} \text{لا}^3\ \text{فرلا}$$

$$= \frac{\text{م ص}^2}{2}$$

**(۴) مذکورۂ بالا قرص کے جمود کا معیار اثر اسکے قطر کے گرد:—**

فرض کرو کہ قرص کے جمود کا معیار اثر اسکے قطر کے گرد = $\text{مج}_1$ اور وہی $\text{مج}_1$ = قرص کے جمود کا معیار اثر قطر کے علی القوائم قطر کے گرد،

تو علی القوائم محوروں کے اصول سے:—

$$\text{مج}_1 + \text{مج}_1 = \frac{\text{م ص}^2}{2}$$

یعنی $\text{مج}_1 = \frac{\text{م ص}^2}{4}$

**(۵) مذکورہ بالا قرص کی جمود کا معیار اثر اس کے مماس کے گرد:—** اس صورت میں محور، مرکز سے ص فاصلہ پر ہے اس لئے متوازی محوروں کے اصول سے

جمود کا معیار اثر مماس کے گرد = مج فرض کرو

$$= \text{مج}_1 + \text{م ص}^2 = \frac{\text{م ص}^2}{4} + \text{م ص}^2$$

$$= \frac{5}{4}\ \text{م ص}^2$$

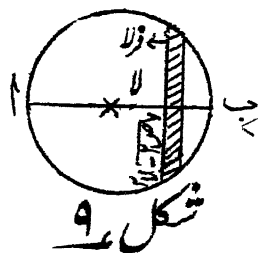
فرلا، لا، ا، ب

شکل ۹

**(۶) ایک ٹھوس کرہ کے جمود کا معیار اثر اسکے کسی ایک قطر کے گرد:—**

فرض کرو کہ کرہ کی کمیت = م اور اسکا نصف قطر = ص

تب اسکے اکائی حجم کی کمیت $= \frac{3\text{م}}{4\pi\ \text{ص}^3}$

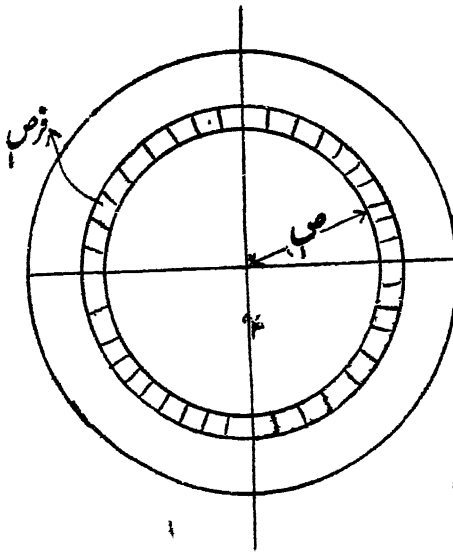
اس کرہ میں سے ایک پتلی دائری ٹکیا تراشش لو جس کا فاصلہ مرکز سے = لا اور جس کا عرض = فرلا تب اس کا نصف قطر $= \sqrt{\text{ص}^2 - \text{لا}^2}$ اور اسکا حجم =

$\pi\,(\text{ص}^{۲}-\text{لا}^{۲})\,\text{فرلا}$ اور اسکی کمیت $= \dfrac{\pi\,(\text{ص}^{۲}-\text{لا}^{۲})\,\text{فرلا}\;۳\text{م}}{۴\pi\,\text{ص}^{۳}}$ اور نمبر (۳) سے اُسکے جمود کا معیار اثر کرہ کے قطر اب کے گرد $= \dfrac{\pi\,(\text{ص}^{۲}-\text{لا}^{۲})\,\text{فرلا}\;۳\text{م}}{۴\pi\,\text{ص}^{۳}} \times \dfrac{(\text{ص}^{۲}-\text{لا}^{۲})}{۲}$

اب کرہ کے جمود کا معیار اثر اب کے گرد یعنی $\text{مج} = \dfrac{۲\times۳\;\pi\;\text{م}}{۸\pi\;\text{ص}^{۳}}\displaystyle\int_{\text{صفر}}^{\text{ص}}(\text{ص}^{۲}-\text{لا}^{۲})^{۲}\,\text{فرلا}$

$$= \frac{۳\text{م}}{۴\,\text{ص}^{۳}}\int_{\text{صفر}}^{\text{ص}}(\text{ص}^{۴}-۲\,\text{ص}^{۲}\text{لا}^{۲}+\text{لا}^{۴})\,\text{فرلا}$$

$$= \frac{۳\text{م}}{۴\,\text{ص}^{۳}}\times\frac{۸\,\text{ص}^{۵}}{۱۵} = \frac{۲}{۵}\,\text{م}\,\text{ص}^{۲}$$

**(۷) ایک ٹھوس کرہ کے جمود کا معیار اثر اسکے قطب کے گرد:-**

فرض کرو کہ اس کرہ میں ایک خول ایسا لیا جاتا ہے جس کا فاصلہ مرکز سے $\text{ص}_۱$ ہے اور موٹائی $\text{فرص}_۱$ ہے (شکل نمبر ۱۰)

اور نیز یہ بھی فرض کرو کہ اس کرہ کی کمیت فی اکائی حجم ک اور نصف قطر ص ہے۔ اس خول کے جمود کا معیار اثر قطب کے گرد =

$$= ۴\pi\,\text{ص}_۱^{۲}\;\text{فرص}_۱\;\text{ک}\;\text{ص}_۱^{۲}$$

لہذا پورے کرہ کے جمود کا معیار اثر مج قطب کے گرد

$$= \int_{\text{صفر}}^{\text{ص}} ۴\pi\,\text{ص}_۱^{۲}\;\text{فرص}_۱\;\text{ک}\;\text{ص}_۱^{۲}$$

$$= ۴\pi\,\text{ک}\int_{\text{صفر}}^{\text{ص}}\text{ص}_۱^{۴}\;\text{فرص}_۱$$

$$= \frac{۴}{۵}\,\pi\,\text{ک}\,\text{ص}^{۵}$$



شکل نمبر ۱۰

لیکن پورے کرہ کی کمیت $= \text{م} = \dfrac{۴}{۳}\,\pi\,\text{ص}^{۳}\,\text{ک}$

$$\therefore \text{ک} = \frac{۳}{۴}\text{م} \times \frac{۱}{\pi\,\text{ص}^۳}$$

$$\therefore \text{مج}_۱ = \frac{۴}{۵}\pi \times \frac{۳}{۴}\text{م} \times \frac{۱}{\pi\,\text{ص}^۳} \times \text{ص}^۵$$

$$= \frac{۳}{۵}\text{م}\,\text{ص}^۲$$

(۸) اسی کرہ کے جمود کا معیار اثر اسکے مماس کے گرد:۔

اگر $\text{مج}_۲$ = جمود کا معیار اثر مماس کے گرد تو متوازی محوروں کے اصول سے

$$\text{مج}_۲ = \text{مج}_۱ + \text{م}\,\text{ص}^۲ = \frac{۲}{۵}\text{م}\,\text{ص}^۲ + \text{م}\,\text{ص}^۲ = \frac{۷}{۵}\text{م}\,\text{ص}^۲$$

(۹) تار کے حلقہ کا جمود کا معیار اثر ایسے محور کے گرد جو اسکے مرکز میں سے گزرتا ہو اور حلقہ کے مستوی کے علی القوائم ہو:۔

فرض کرو کہ اس حلقہ کا نصف قطر ص اور ک کمیت فی اکائی طول ہے۔

فرض کرو کہ اس تار کو چھوٹے چھوٹے ٹکڑوں میں تقسیم کیا جاتا ہے جن میں سے ایک چھوٹا سا ٹکڑا ایسا لیا جاتا ہے جو مرکز پر فرظہ زاویہ بناتا ہے۔ (دیکھو شکل ۱۱)

شکل ۱۱

تب اس چھوٹے ٹکڑے کی کمیت

$$= \text{ک}\,\text{ص}\,\text{فرظہ}$$

∴ اس کے جمود کا معیار اثر اس محور کے گرد = $\text{ک}\,\text{ص}\,\text{فرظہ}\,\text{ص}^۲$

∴ پورے حلقہ کے جمود کا معیار اثر اس محور کے گرد $= \int_{\text{صفر}}^{۲\pi} \text{ک}\,\text{ص}^۳\,\text{فرظہ}$

$$= ۲\pi\,\text{ک}\,\text{ص}^۳$$

لیکن اس پورے حلقہ کی کمیت = م

$$= ۲\pi\,\text{ص}\,\text{ک}$$

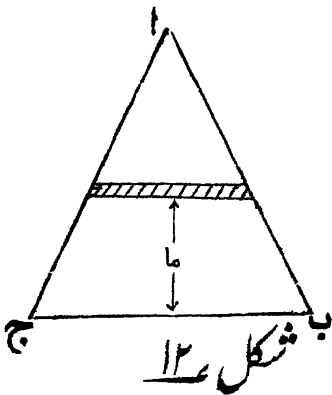
∴ حلقہ کے جمود کا معیار اثر = $\text{مج}^{(3)}$ = ۲ π صٓ ۔ $\frac{\text{م}}{\text{۲ π صٓ}}$ = م ص۲

اگر حلقہ کے جمود کے معیار اثر کو ایسے محور کے گرد جو حلقہ کے ستوی میں ہو اور اسکے مرکز میں سے گزرتا ہو ہم مج۱ فرض کریں تو علی القوائم محوروں کے اصول سے

۲ مج۱ = مج = ک ص۲

∴ مج۱ = $\frac{\text{ک}}{\text{۲}}$ ص۲

## (۱۰) ایک مثلث نما ا ب ج تختی کا جمودی معیار اثر ب ج کے گرد:۔

شکل ۱۲

فرض کرو کہ اس تختی کی کمیت = م

اور اس عمود کا طول جو ا سے ب ج پر کھینچا جائے = د۔ ب ج سے ما فاصلہ پر اور اس کے متوازی ایک چھوٹی دھجی تصور کرو جس کی موٹائی "فرما" ہے (شکل ۱۲)

؟ تب اس دھجی کا طول = $\frac{\text{(د - ما) ف}}{\text{د}}$

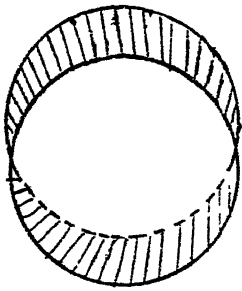
جہاں ف = ب ج

∴ اس دھجی کا رقبہ = $\frac{\text{(د - ما) ف فرما}}{\text{د}}$ یعنی اسکی کمیت = $\frac{\text{۲م (د - ما) ف فرما}}{\text{ف د۲}}$

∴ اُسکے جمود کا معیار اثر ب ج کے گرد = $\frac{\text{۲م (د - ما) ف ما۲ فرما}}{\text{ف د۲}}$

اسی طرح اور دھجیاں تصور کرو اور اُن سب کے جمود کا معیار اثر = اُس مثلث کے جمودی معیار اثر کے ب ج کے گرد = مج$^{(4)}$ = $\int_{\text{صفر}}^{\text{د}}$ $\frac{\text{۲م (د - ما) ف ما۲ فرما}}{\text{ف د۲}}$

= $\frac{\text{م د۲}}{\text{۶}}$

**مثال:۔** ایک ٹھوس حلقہ کی تراش مستطیلی وضع کی ہے اور اسکے اضلاع ایک ایسے محور کے متوازی اور علی القوائم ہیں جو حلقہ کے مرکز میں سے گزر رہا ہے اور حلقہ کے مستوی کے علی القوائم ہے۔ ثابت کرو کہ اس محور کے گرد حلقہ کے گردشی نصف قطر کا مربع = $\frac{1}{2}$ (ا۲ + ب۲) جہاں ا اور ب حلقہ کے اندرونی اور بیرونی نصف قطر ہیں۔

حل :— حلقہ کی موٹائی = ب - ا

فرض کرو کہ اسکے اکائی رقبہ کی کمیت = ک

حلقہ میں ایک چھوٹی سی دہجی تا تصور کرو جس کا نصف قطر = ص اور جس کی موٹائی = فرص

تب اس کی کمیت = $۲\pi\ \text{ص فرص ک}$

شکل ۱۳

اور اس کے جمود کا معیار اثر ا ایسے محور کے گرد جو حلقہ کے مرکز میں سے گزر رہا ہے اور حلقہ کے مستوی کے علی القوائم ہے =

$$۲\pi\ \text{ص}\ .\ \text{فرص ک}\ .\ \text{ص}^{۲}$$

∴ پورے حلقہ کا جمود کا معیار اثر اس محور کے گرد

$$= \int_{\text{ا}}^{\text{ب}} ۲\pi\ \text{ص فرص ک ص}^{۲}$$

$$= ۲\pi\ \text{ک} \left[\frac{\text{ص}^{۴}}{۴}\right]_{\text{ا}}^{\text{ب}}$$

$$= ۲\pi\ \text{ک} \left(\frac{\text{ب}^{۴}}{۴} - \frac{\text{ا}^{۴}}{۴}\right)$$

$$= \text{م ف}^{۲}$$

جہاں م اس پورے حلقہ کی کمیت اور ف اسکا گردشی نصف قطر ہے

لیکن پورے حلقہ کی کمیت $\text{م} = \int_{\text{ا}}^{\text{ب}} ۲\pi\ \text{ص فرص ک}$

$$= ۲\pi\ \text{ک} \left(\frac{\text{ب}^{۲}}{۲} - \frac{\text{ا}^{۲}}{۲}\right)$$

$$\therefore ۲\pi\ \text{ک} \left(\frac{\text{ب}^{۴}}{۴} - \frac{\text{ا}^{۴}}{۴}\right) = \text{م ف}^{۲} = \text{ف}^{۲}\ ۲\pi\ \text{ک} \left(\frac{\text{ب}^{۲}}{۲} - \frac{\text{ا}^{۲}}{۲}\right)$$

$$\therefore \text{ف}^{۲} = \frac{\frac{\text{ب}^{۴}}{۴} - \frac{\text{ا}^{۴}}{۴}}{\frac{\text{ب}^{۲}}{۲} - \frac{\text{ا}^{۲}}{۲}} = \frac{۱}{۲}\left(\text{ب}^{۲} + \text{ا}^{۲}\right)$$

## علی القوائم محوروں کا اصول (تین ابعادی صورت):-

شکل ۱۴۱ میں فرض کرو کہ مج$_{لا}$، مج$_{ما}$ اور مج$_{یا}$ جمود کا اثری معیار ہیں کوئی تین ایسے محوروں ولا، وما اور ویا کے گرد ہیں جو آپس میں ایک دوسرے پر علی القوائم ہیں۔ فرض کرو کہ ک کمیت کا ایک ذرہ ق پر واقع ہے جس کے محدد (لا، ما، یا) ہیں یعنی

ق ن = یا، ج ن = ما اور ج و = لا

ق گ، ق ج، اور ق ف بالترتیب ویا، ولا اور وما پر عمود کھینچو۔

شکل ۱۴۱

تب مج$_{لا}$ = ∑ک ق ج$^2$

= ∑ک (ما$^2$ + یا$^2$)

مج$_{ما}$ = ∑ک ق ف$^2$ = ∑ک (لا$^2$ + یا$^2$)

مج$_{یا}$ = ∑ک ق گ$^2$ = ∑ک و ن$^2$ = ∑ک (لا$^2$ + ما$^2$)

اگر مج$_{و}$، مبدء و کے گرد جمود کا معیار اثر ہو تو:—

مج$_{و}$ = ∑ک ق و$^2$ = ∑ک (لا$^2$ + ما$^2$ + یا$^2$)

∴ مج$_{لا}$ + مج$_{ما}$ + مج$_{یا}$ = ۲ مج$_{و}$ (۵)

یہ ایک نہایت اہم اصول ہے جس کی مدد سے اکثر سوالات حل کئے جا سکتے ہیں۔ مندرجہ ذیل دو صورتوں سے اس اصول کے اطلاق کی توضیح ہوگی:—

(۱۱) ایک پتلے کھوکھلے کرہ کے جمود کا معیار اثر اس کے قطب کے گرد:- کسی پتلے کھوکھلے کرہ کے تمام حصے مرکز و سے مساوی فاصلوں پر ہوتے ہیں لہذا

مج$_{و}$ = م ص$^2$

جہاں م = کرہ کی کمیت اور ص = اس کا نصف قطر

(۱۲) اسی کرہ کے جمود کا معیار اثر اس کے قطر کے گرد:— جمود کا معیار اثر قطر کے

گرد = $مج_{ل}$ = $مج_{ما}$ = $مج_{یا}$ فرض کرو۔

لہذا اوپر کی مساوات سے :۔ ۳ $مج_{ل}$ = ۲ $مج_{و}$ = ۲ م $ص^{۲}$

∴ $مج_{ل}$ = $\frac{۲}{۳}$ م $ص^{۲}$۔

اسی طرح اس کرہ کے جمود کا معیار اثر اس کے مماس کے گرد = $مج_{۲}$ (فرض کرو) = $مج_{ل}$ + م $ص^{۲}$ = $\frac{۵}{۳}$ م $ص^{۲}$

## قطبی جمود کا معیار اثر یا سطحی جمود کا معیار اثر

فرض کرو کہ شکل ۱۵ میں جو جسم دکہایا گیا ہے اس کا رقبہ ا ہے اور اسکا مستوی اس کاغذ کے مستوی کے علی القوائم ہے۔

اب ہم اسکا قطبی جمود کا معیار اثر محور ا ب کے گرد جو کاغذ کے مستوی میں ہے دریافت کرینگے۔

اس کے رقبہ کو چھوٹے چھوٹے رقبوں $ا_{۱}$، $ا_{۲}$، $ا_{۳}$ ...... وغیرہ میں تقسیم کرو اور فرض کرو کہ انکا فاصلہ محور سے $ص_{۱}$، $ص_{۲}$، $ص_{۳}$ ........ وغیرہ ہے۔

شکل ۱۵

اسکے قطبی جمود کے معیار اثر کو $مج_{۳}$ سے تعبیر کیا جائے تو

$مج_{۳}$ = ∑ ا $ص^{۲}$ = $ا_{۱}$ $ص_{۱}^{۲}$ + $ا_{۲}$ $ص_{۲}^{۲}$ + ..............

= ا $ف^{۲}$ جہاں ف = اسکا گردشی نصف قطر

یہ بالکل اسی طرح ہے جیسا کہ پہلے حاصل کیا گیا تھا لیکن یہاں کمیت کے بجائے رقبہ لیا گیا ہے۔

فرض کرو کہ شکل ۱۶ میں جو قرص دکہایا گیا ہے اسکا نصف قطر ص ہے اسکے قطبی جمود کا معیار اثر ایک ایسے محور کے گرد معلوم کریں گے جو جسم کے مرکز

میں سے گزرتا ہے اور اس کے مستوی کے علی القوائم ہو۔ اسکے مرکز سے اس کو چھوٹے چھوٹے حلقوں میں تقسیم کرو۔



شکل ۱۶

فرض کرو کہ مرکز سے ایک چھوٹے حلقہ کا فاصلہ = $ص_1$ اور اسکا عرض = $د\, فرص_1$

اس ٹکڑے کے قطبی جمود کا معیار اثر اس محور کے گرد = $2\pi\, ص_1\, فرص_1 \cdot ص_1^2$

∴ پورے فرص کی جمود کا معیار اثر $مج = \int_{صفر}^{ص} 2\pi\, ص_1\, فرص_1 \cdot ص_1^2$

$$= \frac{\pi\, ص^4}{2} = \pi\, ص^2 \times \frac{ص^2}{2}$$

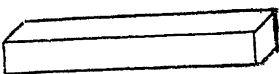
یہ نتیجہ بھی بالکل وہی ہے جو پہلے حاصل کیا گیا تھا لیکن یہاں بجائے قرص کی کمیت کے اسکا رقبہ $\pi\, ص^2$ لیا گیا ہے۔

اگر اسکے جمود کا معیار اثر $مج_1$ ایسے محور کے گرد جو مرکز میں سے گزرتا ہو اور اسکے مستوی میں ہو تو علی القوائم محوروں کے اصول سے

$$2\, مج_1 = مج = \frac{\pi\, ص^4}{2}$$

$$\therefore مج_1 = \frac{\pi\, ص^4}{4} = \pi\, ص^2 \times \frac{ص^2}{4}$$

یعنی اس صورت میں اسکا گردشی نصف قطر = $\frac{ص^2}{4}$

یہ نتیجہ بھی پہلے کی طرح ہے لیکن فرق صرف اتنا ہے کہ کمیت کے بجائے رقبہ لیا جائے۔

فرض کرو کہ شکل ۱۷ میں جو سلاخ دکھائی گئی ہے اسکا طول ل ہے ہم پہلے دریافت کر چکے ہیں کہ اسکے جمود کا معیار اثر مرکز کے گرد = $\frac{م\, ل^2}{12}$

شکل ۱۷

اگر سلاخ کا عرض ب ہو اور گہرائی د، تو اس کے سرے کی جانب سے دیکھنے سے اسکے قطبی جمود کا معیار اثر مرکز کے گرد = رقبہ × (گردشی نصف قطر)[۲]

لیکن اسکا رقبہ = ب د اور (گردشی نصف قطر)[۲] = $\frac{د^{۲}}{۱۲}$

∴ اسکا قطبی جمودی معیار اثر مرکز کے گرد = $\frac{ب\, د^{۳}}{۱۲}$

اگر اوپر سے لیا جائے تو مرکز کے گرد سطحی یا قطبی جمودی معیار اثر = $\frac{د\, ل^{۳}}{۱۲}$

اور اگر سامنے سے لیں تو اسکے مرکز کے گرد سطحی یا قطبی جمود کا معیار اثر

= $\frac{ل\, ب^{۳}}{۱۲}$

۲۰ (الف)

## Chapter I.

(۱) Properties of Matter "Wagstaff" P65 (1924)
(۲) ,, ,, ,, ,, P69 (1924)
(۳) Statics "Lamb"____________P162 (1924)
(۴) . ,, ____________P162 (1924)
(۵) Properties of Matter "Newman & Searle" P23 (1928)

# دوسرا باب

## نظریۂ اہتزاز

**توانائی بالفعل :-** فرض کرو کہ ایک جسم دائری وضع میں ایسے محور کے گرد گھومتا ہے جو اس کے مرکز میں سے گزرتا ہے۔ اس جسم میں ایک ایسا ذرہ ق تصور کرو جس کا فاصلۂ مرکز سے $\text{لا}_1$ ہو اور اس کی کمیت $\text{ک}_1$ کے مساوی ہو۔
فرض کرو کہ دوران گردش میں ذرہ کسی ایک بالکل چھوٹے وقفہ فرو میں فاصلہ فرس طے کرتا ہے۔

$$\text{تو قوت} = \text{ک}_1 \frac{\text{فر}^2\text{س}}{\text{فرو}^2} = \frac{\text{فر}}{\text{فرو}}\left(\text{ک}_1 \frac{\text{لا}_1\ \text{فرط}}{\text{فرو}}\right)$$

$$\text{اس کی قوت کا معیار اثر} = \frac{\text{فر}}{\text{فرو}}\left(\frac{\text{ک}_1\ \text{لا}_1^2\ \text{فرط}}{\text{فرو}}\right)$$

لہذا اس کل جسم کے لئے جبکہ وہ گردش کر رہا ہے تمام

شکل ۲-۱

$$\text{قوتوں کا معیار اثر} = \text{جفت}$$

$$= \text{ثہ} \quad (\text{فرض کرو})$$

$$= \frac{\text{فر}^2\text{ط}}{\text{فرو}^2} \sum \text{ک}_1\ \text{لا}_1^2$$

$$= \text{مج}\ \text{سغ} \qquad \text{.................} \qquad (۱)$$

جہاں مج = جمود کا معیار اثر اس کے مرکز کے گرد اور سغ = زاوئی اسراع

اس ذرہ کی توانائی بالفعل = $\frac{1}{2}$ ک$_1$ $\left(\frac{\text{فر س}}{\text{فر و}}\right)^2$

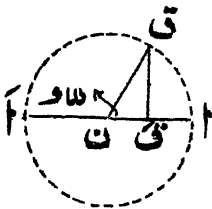
= $\frac{1}{2}$ ک$_1$ $\left(\text{لا}_1 \frac{\text{فرط}}{\text{فرو}}\right)^2$

لہذا اس پورے جسم کی توانائی بالفعل = $\sum \frac{1}{2}$ ک$_1$ لا$_1^2$ $\left(\frac{\text{فرط}}{\text{فرو}}\right)^2$

= $\frac{1}{2}$ مج س$^2$

= $\frac{1}{2}$ م فث س$^2$ .......... (۲)

جہاں م اس جسم کی کمیت ہے ۔ ف اسکا گردشی نصف قطر ہے' اور س زاوئی رفتار ۔

سادہ موسیقی حرکت :- فرض کرو کہ ذرہ ق یکساں زاوئی رفتار سے ایک دائرہ کے محیط پر حرکت کر رہا ہے ۔

شکل ۲ میں دائرہ کا کوئی قطر ا اَ لو اور ق سے ایک خط ق قَ کھینچو جو خط ا اَ کے علی القوائم ہو ۔ نقطہ قَ ' قطر ا اَ پر ق کا ظل کہلاتا ہے ۔ ن دائرہ کا مرکز ہے ۔

شکل ۲

ق جب دائرہ کے محیط پر چکر لگائے گا تو نقطہ قَ ' ا اَ پر ن کے دائیں اور بائیں جانب حرکت کرے گا ۔ اس نقطہ قَ کی حرکت اگر ایسی ہو کہ اسکا نقل مکان قَ ن (اسی ہی راستہ پر) اس کے اسراع کے متناسب ہو اور اسراع ہمیشہ مرکز کی طرف عمل کرے تو قَ کی ایسی حرکت سادہ موسیقی حرکت کہلاتی ہے ۔

فرض کرو کہ ق کی یکساں زاوئی رفتار س ہے ۔ و ثانیوں کے بعد وہ زاویہ س و طے کریگا ۔ فرض کرو کہ قَ ن = لا تو لا = ص جم س و

جہاں ص = دائرہ کا نصف قطر

لہذا قَ کا نقل مکان = لا = ص جم سلا و

اسلئے قَ کی رفتار $= \frac{\text{فرلا}}{\text{فرو}} =$ لاَ فرض کرو = ‒ص سلا جب سلا و

اور قَ کا اسراع $= \frac{\text{فرلاَ}}{\text{فرو}} =$ لاً فرض کرو = ‒ص $\text{س}^{2}$ جم سلا و

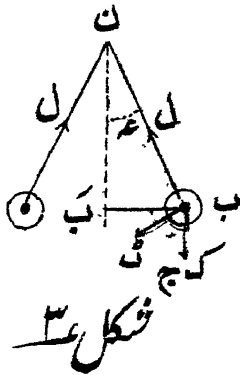
∴ اسراع = لاً = ‒لا $\text{س}^{2}$ = ‒ لا لہ جہاں لہ = $\text{س}^{2}$

یعنی اگر زاوئی رفتار یکساں ہو تو اسراع نقل مکان کے متناسب ہے۔

اور اگر زاوئی رفتار مستقل ہو تو س $= \frac{2\pi}{\text{و}}$ جہاں و = قَ یا قَ کا وقت دوران۔

یعنے و $= \frac{2\pi}{\text{س}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\text{لہ}}}$ .................................. (۳)

مثلاً اگر کسی سوال کے حل کرتے ہیں لاً = ‒ لا لہ کی طرح کی مساوات آجائے تو یہ تصور کیا جائے گا کہ ذرہ سادہ موسیقی حرکت کر رہا ہے۔ اسکا وقت دوران و $= \frac{2\pi}{\sqrt{\text{لہ}}}$ آسانی سے معلوم کیا جاسکتا ہے۔

مثال کے طور پر ایک سادہ رقاص پر غور کرو جو سادہ موسیقی حرکت کر رہا ہے۔ فرض کرو کہ شکل ۳ میں ب ن ایک رقاص ہے جس کی کمیت ک اور طول ل ہے۔ فرض کرو کہ رقاص حالت سکون سے کسی ایک وقت میں زاویہ عہ بناتا ہے رقاص کا وزن ک ج نیچے کی جانب عمل کرے گا اور دوسری قوت تناؤ کی ہوگی جو ڈوری کے سمت میں عمل کرے گی۔ اب چونکہ ب ٹ، ب ن کے علی القوائم ہے، اس لئے ب ٹ کی سمت میں جو قوت عمل کرے گی وہ = ک ج جب عہ

شکل ۳

قوت = کمیت × اسراع ∴ اسراع $= \frac{\text{قوت}}{\text{کمیت}} = \frac{\text{ک ج جب عہ}}{\text{ک}} =$ ج جب عہ

جہاں ج = اسراع بوجہ جاذبہ زمین

اسلئے ب ٹ کی سمت میں عمل کرنیوالا اسراع = ج جب عہ

= ج عہ اگر عہ بہت چھوٹا ہو

لہذا اسراع = لاً = ج عہ = $\frac{ج\ لا}{ل}$ جہاں لا = ب بَ = نقل مکان

اب چونکہ یہ سادہ موسیقی حرکت کی مساوات ہے۔

$\therefore$ وقت دوران و = ۲ $\pi$ $\sqrt{\frac{ل}{ج}}$ ............ (۴)

یہ ضابطہ اسی وقت صحیح ہے جبکہ عہ بہت چھوٹا ہو

صحیح ضابطہ حسب ذیل ہے :-

$$و = ۲\pi \sqrt{\frac{ل}{ج}} \left(۱ + \frac{عہ^۲}{۱۶}\right)$$

جہاں عہ = اہتزاز کا آدھا زاویہ۔ اس مساوات کو برنولی نے ۱۷۴۷ء میں ثابت کیا۔

**مرکب رقاص** :- شکل ۱۴ میں ایک مرکب رقاص دکھایا گیا ہے جس کا وزن ک ج ہے جو نیچے کی جانب عمل کر رہا ہے۔ فرض کرو کہ اس کا مرکز جاذبہ جَ ہے اور ن اسکا مرکز اہتزاز ہے۔ فرض کرو کہ دھاریدار کنارے اور مرکز جاذبہ کے درمیان فاصلہ = $ل_۱$

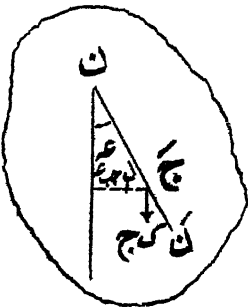
جب یہ رقاص حرکت کریگا تو جفت

= قوت × عمودی فاصلہ

= ک ج $ل_۱$ جب عہ

جہاں عہ = انتصابی سمت اور ن نَ کے درمیان زاویہ

لیکن ہمیں یہ معلوم ہے کہ جفت = مج $\frac{فر^۲ عہ}{فر و^۲}$

شکل ۱۴

جہاں مج = جمود کا معیار اثر ایسے محور کے گرد جو ن میں سے گزرتا ہے اور جو کاغذ کے مستوی کے علی القوائم ہے۔

$$\therefore \text{مج}\ \frac{\text{فر}^{2}\text{عہ}}{\text{فرو}^{2}} = -\text{ک ج ل}_{1}\ \text{جب عہ}$$

$$= -\text{ک ج ل}_{1}\ \text{عہ}\quad (\text{اگر عہ چھوٹا ہو})$$

$$\text{یعنے}\ \frac{\text{فر}^{2}\text{عہ}}{\text{فرو}^{2}} = \text{زاویۂ اسراع} = \frac{-\text{ک ج ل}_{1}\text{عہ}}{\text{مج}} = \frac{-\text{ک ج ل}_{1}\text{عہ}}{\text{ک ف}^{2}}$$

جہاں ف = اسکا گردشی نصف قطر اس ہی محور کے گرد

یہ ایک سادہ موسیقی حرکت کی مساوات ہے۔ لہٰذا اس کا وقت

$$\text{دوران و} = 2\pi\sqrt{\frac{\text{ف}^{2}}{\text{ج ل}_{1}}}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (5)$$

اگر سادہ رقاص اور اسکا وقت دوران مساوی ہو تو مساوات (۴) اور (۵) سے سادہ رقاص کا طول $\text{ل} = \frac{\text{ف}^{2}}{\text{ل}_{1}}$ متوازی محوروں کے اصول سے چونکہ کسی محور پر ایک رقاص کے جمود کا معیار اثر = اس محور کے متوازی محور پر کے جمود کے معیار اثر کے جو مرکز جاذبہ میں گزر رہا ہو + $\text{ک ل}_{1}^{2}$ جہاں $\text{ل}_{1} = \text{ن جَ}$ = دونوں محوروں کے درمیان فاصلہ

$$\therefore \text{ک ف}^{2} = \text{ک ط}^{2} + \text{ک ل}_{1}^{2}\quad \text{یعنی}\ \text{ف}^{2} = \text{ط}^{2} + \text{ل}_{1}^{2}$$

جہاں ط = گردشی نصف قطر ایسے محور کے گرد، جو جَ میں سے گزر رہا ہے اور جو کاغذ کے مستوی کے علی القوائم ہے۔

لہٰذا مرکب رقاص کے لئے ضابطہ $\text{و} = 2\pi\sqrt{\frac{\text{ل}_{1}^{2} + \text{ط}^{2}}{\text{ل}_{1}\text{ج}}}$ ........ (۶)

اگر مرکز اہتزاز ن، جَ سے منطبق ہو جائے تو $\text{ل}_{1}$ = صفر یعنی اس صورت میں وقت دوران لامتناہی ہو جاتا ہے۔

و کی قیمت اقل ہونے کی شرط یہ ہے کہ $\frac{\text{ل}_{1}^{2} + \text{ط}^{2}}{\text{ل}_{1}}$ اقل ہونا چاہیئے۔

یعنی $\frac{ل_۱^۲ - ۲ل_۱ط + ط^۲ + ۲ل_۱ط}{ل_۱}$ یا $\frac{(ل_۱ - ط)^۲ + ۲ل_۱ط}{ل_۱}$ کی قیمت

اقل ہونی چاہیے یا $ل_۱ = ط$ ہونا چاہیے۔

∴ اقل وقت دوران $و^{①} = ۲\pi \sqrt{\frac{۲ط}{ج}}$ ............ (۷)

فرض کرو کہ اوپر کی شکل نمبر ۴ میں مرکز اہتزاز نَ ایسا لیا جاتا ہے کہ

$ن نَ \times ن جَ = ف^۲ = ط^۲ + ن جَ^۲$

یعنی $ن جَ (ن نَ - ن جَ) = ط^۲$

یا $ن جَ \times نَ جَ = ط^۲$ .................. (۸)

فرض کرو کہ بجائے ن مرکز اہتزاز کے نً ایسا لیا گیا ہے کہ

$نً نَ \times نَ جَ = فَ^۲ = ط^۲ + نَ جَ^۲$

لیکن اسی طریقہ سے $نَ جَ \times نً جَ = ط^۲$ یعنی $نً جَ = ن جَ$

یعنی ن اور نً ایکدوسرے پر منطبق ہو جاتے ہیں۔

اب جبکہ ن مرکز اہتزاز ہے مرکب رقاص کا ضابطہ:—

$و = ۲\pi \sqrt{\frac{ل_۱^۲ + ط^۲}{ل_۱ ج}}$

$∴ ل_۱^۲ - \frac{ج و^۲}{۴\pi^۲} ل_۱ + ط^۲ = صفر$

$∴ ل_۱ = \frac{ج و^۲}{۸\pi^۲} \pm \sqrt{\frac{ج^۲ و^۴}{۶۴\pi^۴} - ط^۲}$

$= گ_۱ + گ_۲$ یا $گ_۱ - گ_۲$ فرض کرو

یعنی ل۱ کی دو قیمتیں ہیں جہاں کہ وقت دوران کی قیمتیں ایک ہوتی ہیں۔ اور یہ دونوں قیمتیں مرکز جاذبہ کے ایک جانب ہیں۔ اسی طرح اگر رقاص کو اولٹ دیا جائے تو ہم کو اور دو قیمتیں حاصل ہوں گی پس اس سے ظاہر ہوا کہ ل۱ کی

چار قیمتیں ہیں (دو مرکز جاذبہ کے ایک جانب اور دو دوسری جانب) جہاں پر وقت دوران کی قیمتیں مساوی ہوتی ہیں اور ل کی پہلی اور تیسری قیمتیں اور دوسری اور چوتھی قیمتیں آپس میں علی الترتیب مساوی ہوتی ہیں۔

اب فرض کرو کہ سادہ رقاص کا طول = ن نَ

ظاہر ہے کہ سادہ رقاص کا وقت دوران، مرکب رقاص کے وقت دوران کے مساوی ہوگا اس قسم کے سادہ رقاص کو جس کا طول ل = $\frac{ل_۱^۲ + ط^۲}{ل_۱}$ ہو معاول سادہ رقاص کہتے ہیں

اس وجہ سے کہ و = ۲ $\pi \sqrt{\frac{ل}{ج}}$ = ۲ $\pi \sqrt{\frac{ل_۱^۲ + ط^۲}{ل_۱ ج}}$ (۹)

فرض کرو کہ نَ مرکز اہتزاز ہے تب نَ ج = ل ـ ل۱ اگر اس صورت میں وقت دوران وَ فرض کیا جائے تو وَ = ۲ $\pi \sqrt{\frac{(ل - ل_۱)^۲ + ط^۲}{(ل - ل_۱) ج}}$

لیکن مساوات (۹) سے ل ـ ل۱ = $\frac{ط^۲}{ل_۱}$

$$\therefore \quad وَ = ۲\pi \sqrt{\frac{\left(\frac{ط^۲}{ل_۱}\right)^۲ + ط^۲}{\frac{ط^۲}{ل_۱} ج}} = ۲\pi \sqrt{\frac{ل_۱^۲ + ط^۲}{ل_۱ ج}}$$

∴ و = وَ یعنے وقت دوران ن اور نَ پر مساوی ہے۔

ان مساواتوں کی تصدیق کرنے کے لئے ذیل کا تجربہ کیا جاتا ہے:۔

شکل ۵ میں لوہے کی ایک میٹر لمبی اور ۳ سمر چوڑی ایک مستطیلی سلاخ دکھلائی گئی ہے، اس کو مختلف نقطوں پر سوراخوں کے ذریعہ جو دو دو سمر کے فاصلہ پر سلاخ کے طول میں بنے ہوئے ہوتے ہیں ایک دھاردار

کنارے سے لٹکایا جا سکتا ہے۔

تجربہ میں باری باری سے سلاخ کو ہر دوسرے سوراخ کے ذریعہ لٹکا کر ہر ایک کا وقت دوران دریافت کرو۔ سلاخ کے مرکز جاذبہ کا فاصلہ ہر ایسے سوراخ سے دریافت کرو جہاں پر سلاخ لٹکائی جاتی ہے۔ سلاخ کا مرکز جاذبہ آسانی سے سلاخ کو دہار یدار کنارے پر توازن میں لانے سے معلوم ہو سکتا ہے و کی مختلف قیمتوں کو مرکز جاذبہ اور سوراخوں کے درمیانی فاصلے کی متناظر قیمتوں کے مقابلہ میں مرقسم کرو۔

ایک ایسا منحنی حاصل ہوگا جو شکل ۶ میں دکہایا گیا ہے دونوں منحنیوں کے مماس ل م اور لَ مَ کہینچو

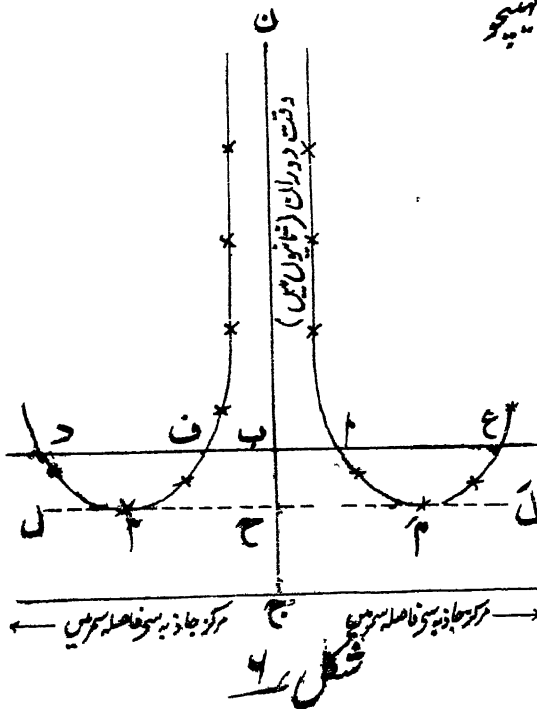
چونکہ ان دونوں نقاط م اور مَ پر وقت دوران اقل ہیں۔

لہذا ح م = ح مَ

= ل، = ط

اور چونکہ اقل وقت دوران

= ح ج = و

شکل ۶

لہذا مساوات (۷) سے ج کی قیمت دریافت کی جاسکتی ہے۔

دوران تجربہ میں اقل وقت دوران و کے قریبی نقطوں کی تعینیں بڑی احتیاط سے متعدد دفعہ تقریبی مقام کے ہر ایک جانب لی جائیں۔ اگر ج کی قیمت

معلوم ہو تو ط کی قیمت دریافت کی جا سکتی ہے اور جمود کے معیار اثر (مج) کی قیمت ایک ایسے محور کے گرد جو مرکز جاذبہ میں سے گزرے، صرف سلاخ کو تول کر دریافت کی جا سکتی ہے۔

کیونکہ مج = م ط$^2$ جہاں م = سلاخ کی کمیت

لا محور کے متوازی ایک خط د ف ب ا ع کھینچو، د، ف، ا اور ع پر وقت دوران و کی قیمت ایک ہی ہے اور ب ج کے مساوی ہے۔ چونکہ ف ب = ب ا اور ب د = ب ع۔

لہٰذا مساوات (۸) سے ب د × ب ا = ب ع × ب ف = ط$^2$

لہٰذا معادل سادہ رقاص کا طول ل = $\frac{\text{ب د}^2 + (\text{ب د} \times \text{ب ا})}{\text{ب د}}$

$$= \frac{\text{ب د} (\text{ب د} + \text{ب ا})}{\text{ب د}} = \text{ب د} + \text{ب ا}$$

$$\therefore \text{ل} = \text{ب د} + \text{ب ا} = \text{ب ع} + \text{ب ف} \quad \text{.........} \quad (۱۰)$$

لہٰذا مساوات (۴) سے ج کی قیمت دریافت کی جا سکتی ہے۔

**مثال** (الف) ایک میٹری سلاخ (ب) ۴۰ سم قطر کا ایک قرص، بطور رقاص علیحدہ علیحدہ لٹکائے گئے ہیں۔ ان دونوں کے نقاط تعلیق کے ایسے مقام دریافت کرو جہاں ہر ایک کا وقت دوران اقل ہو۔

(الف) اقل وقت دوران کی شرط یہ ہے کہ ل$_1$ = ط

لیکن سلاخ کے جمود کا معیار اثر اس کے مرکز کے گرد = $\frac{\text{م ل}^2}{۱۲}$ = م ط$^2$ جہاں م سلاخ کی کمیت کو اور ل اس کے طول کو تعبیر کرتا ہے۔

$$\therefore \text{ط} = \sqrt{\frac{\text{ل}^2}{۱۲}} = \sqrt{\frac{(۱۰۰)^2}{۱۲}} = \text{ل}_1$$

$\therefore$ ل$_1$ = ۲۸٫۸۶ سم، یعنی سلاخ کے مرکز جاذبہ سے نقطہ تعلیق کا فاصلہ ۲۸٫۸۶ سم ہونا چاہیئے تاکہ وقت دوران اقل ہو۔

(ب) قرص کا جمودی معیار اثر مرکز کے گرد = $\frac{\text{م ص}^2}{2}$

جہاں ص = قرص کا نصف قطر اور م = قرص کی کمیت

$\therefore$ ل₁ = ط = $\sqrt{\frac{\text{ص}^2}{2}} = \sqrt{\frac{20^2}{2}}$ = ۱۴،۱۴ اسمر

یعنی قرص کے مرکز سے ۱۴،۱۴ اسمر کے فاصلہ پر نقطہ تعلیق کو ہونا چاہیئے کہ اس کا وقت دوران اقل ہو

**کیٹر کا رقاص:۔** شکل ۷ میں ا ب ایک فولادی سلاخ ہے اور ن اور نَ دو دہاریدار کنارے ہیں جو مرکز جاذبہ کے دونوں جانب واقع ہیں۔ ق اور قَ دو بڑے استوانے ہیں جن میں سے ایک پیتیل کا ہوتا ہے اور دوسرا لکڑی کا۔ فرض کرو کہ ن اور نَ پر وقت دوران مساوی ہیں۔ اس صورت میں ن اور نَ کا درمیانی فاصلہ ایک ایسے سادہ رقاص کے طول کے مساوی ہوگا جسکا وقت دوران اس مرکب رقاص کے وقت دوران کے مساوی ہے۔

اس رقاص کو کپتان کیٹر نے ۱۸۱۷ء میں گھڑی کے رقاص کا طول دریافت کرنے کے لئے تیار کیا تھا۔

جَ ایک متحرک حلقہ ہے جس کو سلاخ پر اوپر یا نیچے ہٹایا جا سکتا ہے تاکہ وقت دوران ن اور نَ پر مساوی کیے جائیں۔

ج ایک چھوٹا متحرک حلقہ جس کی مدد سے وقت دوران کی قیمتوں کے درمیان چھوٹے فرق کو رفع کیا جاتا ہے۔

لیکن دونوں دہاریدار کناروں پر وقت دوران کی قیمتوں کو مساوی حاصل کرنا آسان نہیں۔ اس کے

ا
ق
ن
جَ
ج
نَ
قَ
ب

شکل ۷

لئے حسب ذیل طریقہ اختیار کیا جاتا ہے جس کو پہلی مرتبہ بسّل نے پیش کیا تھا اس طریقہ سے ط کی رقوم ضابطہ سے ساقط ہو جاتی ہیں۔

فرض کرو کہ $ج$ اور $ج$ کے ذریعہ $ل_1$ اور $ل_2$ پر کے وقت دوران تقریباً مساوی حاصل کر لئے گئے ہیں۔

اگر ان میں سے ایک $و_1$ اور دوسرا $و_2$ ہو تو $و_1 = 2\pi\sqrt{\frac{ط^2 + ل_1^2}{ل_1 ج}}$

اور $و_2 = 2\pi\sqrt{\frac{ط^2 + ل_2^2}{ل_2 ج}}$ دونوں مساواتوں کو مربع کرنیکے بعد

$$و_1^2 = 4\pi^2\left(\frac{ط^2 + ل_1^2}{ل_1 ج}\right) \quad \text{اور} \quad و_2^2 = 4\pi^2\left(\frac{ط^2 + ل_2^2}{ل_2 ج}\right)$$

ان دونوں ضابطوں کے ذریعہ ط کو ساقط کر دیا جائے تو

$$\frac{ج}{4\pi^2}\left(و_1^2 ل_1 - و_2^2 ل_2\right) = ل_1^2 - ل_2^2$$

$$\therefore \frac{4\pi^2}{ج} = \frac{و_1^2 ل_1 - و_2^2 ل_2}{ل_1^2 - ل_2^2} = \frac{4و_1^2 ل_1 - 4و_2^2 ل_2}{4(ل_1^2 - ل_2^2)}$$

$$= \frac{2و_1^2 ل_1 + 2و_1^2 ل_1 - 2ل_2 و_2^2 - 2ل_2 و_2^2 + 2ل_1 و_2^2 - 2ل_1 و_2^2 + 2ل_2 و_1^2 - 2ل_2 و_1^2}{2(ل_1 + ل_2)2(ل_1 - ل_2)}$$

$$= \frac{2و_1^2(ل_1 - ل_2) + 2و_1^2(ل_1 + ل_2) - 2و_2^2(ل_1 + ل_2) + 2و_2^2(ل_1 - ل_2)}{2(ل_1 + ل_2)2(ل_1 - ل_2)}$$

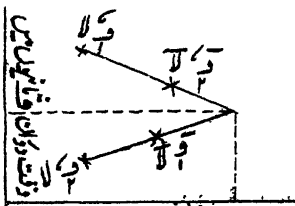
$$= \frac{2و_1^2}{4(ل_1 + ل_2)} + \frac{2و_1^2}{4(ل_1 - ل_2)} - \frac{2و_2^2}{4(ل_1 - ل_2)} + \frac{2و_2^2}{4(ل_1 + ل_2)}$$

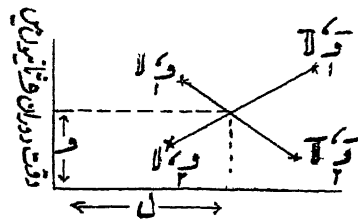
$$= \frac{و_1^2 + و_2^2}{2(ل_1 + ل_2)} + \frac{و_1^2 - و_2^2}{2(ل_1 - ل_2)}$$

$$\text{یعنی}\ \frac{4\pi^2}{ج} = \frac{و_1^2 + و_2^2}{2(ل_1 + ل_2)} + \frac{و_1^2 - و_2^2}{2(ل_1 - ل_2)} \quad \ldots\ldots\ldots (11)$$

رقاص کو دھاریدار کناروں پر توازن میں لا کر $ل_1$ اور $ل_2$ دریافت کرنے کے بعد اس مساوات کے ذریعہ ہم ج کی قیمت معلوم کر سکتے ہیں۔

دوسرا طریقہ :— اگر ہم کو صحیح وقت دوران (جو دونوں دھاریدار کناروں پر بالکل مساوی ہونا چاہیئے) معلوم ہو جائے تو سادہ رقاص کا ضابطہ استعمال کرنے سے ہم ج کی قیمت دریافت کر سکتے ہیں :—

فرض کرو کہ $و_1$ اور $و_2$ دونوں دھاریدار کناروں ن اور نَ پر وقت دوران ہیں اور ن اور نَ کے درمیان فاصلہ لا کے مساوی ہے اور $و_1$ تقریباً $و_2$ کے مساوی ہے ۔ دھاریدار کناروں کو ذرا سا ہٹاؤ اور فرض کرو کہ اب ن اور نَ پر وقت دوران کی قیمتیں جو قریب قریب مساوی ہیں، $وَ_1$ اور $وَ_2$ کے مساوی ہیں اور ان کا درمیانی فاصلہ لاَ کے مساوی ہے ۔ و اور لا کے درمیان ترسیم شکل ۸ یا ۹ کے مطابق کھینچو ۔

درمیانی فاصلہ لا سم میں

شکل ۸

درمیانی فاصلہ لا سم میں

شکل ۹

نقاط (و٫ لا) اور (وَ٫ لاَ) کو ملاؤ، اسی طرح (و١، لا) اور (وَ٢، لاَ) کو ملاؤ نقطہ تقاطع سے صحیح وقت دوران اور صحیح طول ملجائیگا۔ اور اس سے ج کی قیمت مساوات (۴) سے معلوم کی جا سکتی ہے۔ تجربہ میں ہوا کی مزاحمت کی وجہ سے وقت دوران میں فرق واقع ہوتا ہے یعنی اس میں کسی قدر کمی ہوتی ہے۔

دوران تجربہ میں تپش بھی مستقل ہونی چاہیئے ورنہ تپش کے بڑھنے سے رقاص کا طول بڑھ جائے گا اور اس سے وقت دوران پر اثر پڑے گا۔ تجربہ میں وہ مقام جہاں رقاص سہارا جاتا ہے مضبوطی کے ساتھ جما دینا چاہیئے ورنہ قسری ارتعاشوں کی وجہ سے وقت دوران میں فرق ہونے کا احتمال ہے۔

رقاص کی حرکت پر واسطہ کی لزوجت کا اثر صرف اتنا ہی ہوتا ہے کہ حیطۂ اہتزاز کو چھوٹا کر دے، وقت دوران پر یہ اثر قابل لحاظ نہیں ہوتا۔ وقت دوران کو $\left(1 + \frac{گ^2}{8\,لہ}\right)$ سے ضرب دینے سے اسکی تصحیح ہو جاتی ہے

یعنی $و = \frac{\pi^2}{لہ}\left(1 + \frac{گ^2}{8\,لہ}\right)$ جہاں گ ایسی ایک رقم ہے جو لزوجت پر منحصر ہوتی ہے۔ لہذا لزوجت (۱۳) سے وقت دوران $1 : 1 + \frac{گ^2}{8\,لہ}$ کی نسبت سے بڑھ جاتا ہے اور اس سے ظاہر ہے کہ و کی قیمت میں یہ بہت ہی قلیل اضافہ ہے چونکہ گ کی قیمت بالکل چھوٹی ہوتی ہے۔

عموماً کیٹر اور بورڈا کے رقاصوں میں ۲٫۱ : ۱ کی نسبت سے اہتزازی قوس میں کمی تقریباً ۵۰۰ ثانیوں میں واقع ہوتی ہے۔

دھاریدار کناروں کے انحنا کی تصحیح، ان کو آپس میں تبدیل کرنے کے بعد حسب معمول مشاہدات کو دوہرانے سے ہو سکتی ہے۔

طریقۂ انطباق :- کیٹر کے رقاص کے دونوں دھاریدار کناروں پر وقت دوران کی قیمتوں کو اس طرح ترتیب دو کہ یہ تقریباً مساوی ہو جائیں۔ رقاص کو دوربین سے دیکھو۔

ایک گھڑی کے ثانیہ رقاص کو برقی طریقہ سے اس طرح ترتیب دو کہ ٹیلیفون کے "وصول کنندہ" کے ذریعہ اسکی "ٹک ٹک" کی آواز صاف طور پر تمہیں سنائی دینے لگے۔

جس لمحہ میں کیٹر کے رقاص کا کوئی نشان زدہ نقطہ دوربین کے انتصابی صلیبی تار کے محاذی عین اسوقت پہنچے جبکہ گھڑی کی "ٹک" ساتھ ہی سنائی دے، ٹکوں کو گننا شروع کرو۔ اس طرح متبادل ٹکوں کی آوازوں کو اتنی دیر تک گنتے جاؤ کہ کیٹر کے رقاص کے نشان زدہ نقطہ کا انتصابی صلیبی تار کے محاذی آنا پھر ٹک کی آواز کے ساتھ منطبق ہو جائے۔ اس امر کا لحاظ رکھو کہ گننے کا عمل مسلسل رہے۔ فرض کرو کہ م دیں متبادل ٹک پر ن واں انطباق ہوتا ہے۔ چونکہ ہر متبادل ٹک کو شمار کیا گیا ہے اس وجہ سے اگر بالفرض کیٹر کے رقاص کا وقت دوران ۲ ثانیوں سے کم ہے تو رقاص ۲ م ثانیوں میں (م + ن) مکمل اہتزاز کرے گا۔ اگر اس کا وقت دوران ۲ ثانیوں سے زیادہ ہے تو ۲ م ثانیوں میں وہ (م - ن) مکمل اہتزاز کریگا۔

لہذا کیٹر کے رقاص کا صحیح وقت دوران $= \frac{۲م}{م \pm ن}$

اسی طرح دوسرے دھاریدار کنارہ سے وقت دوران دریافت کیا جاسکتا ہے

ہوا کی اچھال کا اثر صرف یہ ہوتا ہے کہ اس کی وجہ سے رقاص کے جمود کے معیار اثر کی قیمت بڑھ جاتی ہے لیکن رقاص کی بیرونی شکل اس کے وسطی نقطہ کے متشاکل بنائی جائے اور مرکز سے دونوں دھاریدار کناروں کا فاصلہ مساوی ہو تو ہوا کا اثر زائل ہو جاتا ہے۔ اس کی وجہ یہ ہے کہ دونوں

مشاہدات میں ہٹائی ہوئی ہوا کی کمیت یکساں رہتی ہے۔

ان تمام تصحیحوں پر ہم تفصیل کے ساتھ یہاں بحث کریں گے :۔

**زاویۂ اہتزاز کی تصحیح :۔** اس سے قبل یہ ذکر ہو چکا ہے کہ شکل ۳ اور ۴ میں زاویہ عہ بہت چھوٹا ہونا چاہیئے ورنہ وقت دوران و کی قیمت میں تصحیح کی ضرورت ہوتی ہے۔ اس کے لئے شکل ۴ پر غور کرو۔ فرض کرو کہ ت وقفہ کے بعد ن ج انتصابی سمت سے جو زاویہ بناتا ہے وہ ط کے مساوی ہے، اس لمحہ میں جسم کی زاویائی رفتار = س = فرط / فرت ج کی گہرائی ن کے نیچے ل جم ط ہے۔ اسکا مطلب یہ ہے کہ مرکز جاذبہ اپنے ابتدائی مقام سے بقدر ل (جم ط - جم عہ) نیچے اتر آیا ہے۔ لہذا جاذبۂ زمین سے اسپر جو کام ہوا = ک ج ل (جم ط - جم عہ)

لیکن مساوات (۲) سے جسم کی توانائی بالفعل

$$= \frac{1}{2}\ \text{مج}\ س^2 = \frac{1}{2}\ ک\ ف^2\ \left(\frac{فرط}{فرت}\right)^2$$

لیکن توانائی بالفعل = کام جو کیا گیا

$$\therefore\ ک\ ج\ ل\ (\text{جم ط} - \text{جم عہ}) = \frac{1}{2}\ ک\ ف^2\ \left(\frac{فرط}{فرت}\right)^2$$

$$\therefore\ ف^2\ \left(\frac{فرط}{فرت}\right)^2 = 2\ ج\ ل\ (\text{جم ط} - \text{جم عہ})$$

لیکن مساوات (۵) اور (۶) سے :۔ $ف^2 = ل^2 + ط^2$

$$\therefore\ (ل^2 + ط^2)\left(\frac{فرط}{فرت}\right)^2 = 2\ ج\ ل\ (\text{جم ط} - \text{جم عہ})$$

اسکو تکملانے سے :۔

$$\int_{\text{صفر}}^{\frac{و}{4}} \sqrt{\frac{2\ ج\ ل}{ل^2 + ط^2}}\ فرت = \int_{\text{صفر}}^{عہ} \frac{فرط}{\sqrt{\text{جم ط} - \text{جم عہ}}}$$

جہاں و وقت دوران ہے

$$\therefore\ \frac{و}{2}\sqrt{\frac{ج\ ل}{ل^2 + ط^2}} = \int_{\text{صفر}}^{عہ} \frac{فرط}{\sqrt{\text{جب}^2 \frac{عہ}{2} - \text{جب}^2 \frac{ط}{2}}}$$

اب $\text{جب}\,\frac{\text{ط}}{۲} = \text{جب}\,\frac{\text{ع}}{۲}\,.\,\text{جب فہ}$، رکھو جہاں فہ = کوئی خاص زاویہ (فرض کرو)

اس کو تفرق لینے سے :- $\text{جم}\,\frac{\text{ط}}{۲}\,.\,\text{فر}\,\frac{\text{ط}}{۲} = \text{جب}\,\frac{\text{ع}}{۲}\,\text{جم فہ فرفہ}$

$$\therefore \text{فرط} = \frac{۲\,\text{جب}\,\frac{\text{ع}}{۲}\,.\,\text{جم فہ فرفہ}}{\text{جم}\,\frac{\text{ط}}{۲}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{ا})$$

اور

$$\sqrt{\text{جب}^۲\,\frac{\text{ع}}{۲} - \text{جب}^۲\,\frac{\text{ط}}{۲}} = \sqrt{\text{جب}^۲\,\frac{\text{ع}}{۲}\,(۱ - \text{جب}^۲\,\text{فہ})}$$

$$= \sqrt{\text{جب}^۲\,\frac{\text{ع}}{۲}\,\text{جم}^۲\,\text{فہ}}$$

$$= \text{جب}\,\frac{\text{ع}}{۲}\,\text{جم فہ} \quad \ldots\ldots (\text{ب})$$

ان مساواتوں (ا) اور (ب) کو اس تکمل میں درج کرنے سے :-

$$\frac{\text{و}}{۲}\,.\,\sqrt{\frac{\text{ج ل}_۱}{\text{ل}_۱^۲ + \text{ط}^۲}} = \int_{\text{صفر}}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{۲\,\text{فرفہ}}{\text{جم}\,\frac{\text{ط}}{۲}} = \int_{\text{صفر}}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{۲\,\text{فرفہ}}{\sqrt{۱ - \text{جب}^۲\,\frac{\text{ط}}{۲}}}$$

$$= \int_{\text{صفر}}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{۲\,\text{فرفہ}}{\sqrt{۱ - \text{جب}^۲\,\frac{\text{ع}}{۲}\,\text{جب}^۲\,\text{فہ}}}$$

$$\therefore \text{و} = ۴\sqrt{\frac{\text{ل}_۱^۲ + \text{ط}^۲}{\text{ج ل}_۱}} \int_{\text{صفر}}^{\frac{\pi}{۲}} \Big(۱ + \frac{۱}{۲}\,\text{جب}^۲\,\frac{\text{ع}}{۲}\,\text{جب}^۲\,\text{فہ}$$

$$+ \frac{۳}{۸}\,\text{جب}^۴\,\frac{\text{ع}}{۲}\,\text{جب}^۴\,\text{فہ} + \ldots\ldots\ldots \Big)\,\text{فرفہ}$$

$$= ۴\sqrt{\frac{\text{ل}_۱^۲ + \text{ط}^۲}{\text{ج ل}_۱}}\,.\,\frac{\pi}{۲}\Big(۱ + \frac{۱}{۴}\,\text{جب}^۲\,\frac{\text{ع}}{۲} + \frac{۹}{۶۴}\,\text{جب}^۴\,\frac{\text{ع}}{۲} + \ldots\Big)$$

$$= 2\pi \sqrt{\frac{\text{ل}_1^2 + \text{ط}^2}{\text{ج}\,\text{ل}_1}} \left(1 + \frac{1}{4}\,\text{جب}^2\,\frac{\text{عہ}}{2}\right)$$

اگر عہ بہت چھوٹا ہو تو

$$\text{و} = 2\pi \sqrt{\frac{\text{ل}_1^2 + \text{ط}^2}{\text{ج}\,\text{ل}_1}} \left(1 + \frac{\text{عہ}^2}{16}\right) \quad (4)$$

**ہوا کی تصحیح :-** چونکہ رقاص بجائے خلا کے ہوا میں اہتزاز کرتا ہے اسلئے ہوا کی وجہ سے جو اثرات مرتب ہوتے ہیں ان کی تصحیح ضروری ہے - نیوٹن کے خیال کے مطابق کیبٹر نے صرف اوچھال کے اثر کو ملحوظ رکھا جس کی وجہ سے رقاص کے وزن میں کسی قدر کمی واقع ہوتی ہے - ہوا اور رقاص کے حاصل جفت کو مدنظر رکھ کر اس نے حسب ذیل مساوات فرض کی :-

$$\frac{\text{فز}^2\,\text{عہ}}{\text{فزو}^2} = \frac{(\text{ک} - \text{کَ})\,\text{ج}\,\text{ل}_1\,\text{عہ}}{\text{ک}\,(\text{ل}_1^2 + \text{ط}^2)}$$

جہاں کَ = ہوا کی کمیت جو رقاص سے ہٹائی جاتی ہے

یہ ایک سادہ موسیقی حرکت کی مساوات ہے -

$$\therefore \text{وقت دوران و} = 2\pi \sqrt{\frac{(\text{ل}_1^2 + \text{ط}^2)\,\text{ک}}{\text{ج}\,\text{ل}_1\,(\text{ک} - \text{کَ})}}$$

$$= 2\pi \sqrt{\frac{\text{ل}_1^2 + \text{ط}^2}{\text{ج}\,\text{ل}_1 \left(1 - \frac{\text{کَ}}{\text{ک}}\right)}}$$

کَ کی قیمت کرے کی تپش پر ہوا کی کثافت اور رقاص کے حجم سے معلوم کی جا سکتی ہے۔

اس صورت میں سادہ معادل رقاص کا طول = $\frac{ل_1^2 + ط^2}{ل_1(1 - \frac{کَ}{ک})}$

بسل نے یہ دکھلایا کہ ہوا کا اثر اور زیادہ پیچیدہ ہوتا ہے۔ حاصل اسراع پیدا کرنے والی قوت نہ صرف رقاص پر عمل کرتی ہے بلکہ واسطہ کے ملے ہوئے حصوں پر بھی اسکا اثر پڑتا ہے اور اس کی وجہ سے توانائی کی مساوات کا ہر حصہ متاثر ہوتا ہے۔

لہذا اس صورت میں توانائی کی مساوات حسب ذیل ہو جاتی ہے:۔

$$\frac{1}{2} ک (ل_1^2 + ط^2) \left(\frac{فرط}{فرت}\right)^2 = ک ج ل_1 جم ط + گ$$

جہاں گ، ہوا کی صورت میں ایک مستقل ہے یہ فرض کرتے ہوئے کہ جسم کی بیرونی شکل اور رفتار کی وجہ سے گ میں جو کمی واقع ہوتی ہے وہ نظر انداز کئے جانے کے قابل ہے۔

ظاہر ہے کہ ہوا کے ہر متحرک ذرہ میں توانائی بالفعل پیدا ہوتی ہے۔ اگر کسی ایک ذرہ کی کمیت فرکَ اور اسکی رفتار س ہو تو واسطہ کے متاثرہ حصہ کی توانائی بالفعل $= \frac{1}{2} \int$ فرکَ . س$^2$

لہذا اس مساوات کے داہنی جانب میں، جو رقاص کی توانائی بالفعل کو تعبیر کرتی ہے، اتنی مقدار کا اضافہ ہونا چاہیئے۔

مساوات کے بائیں جانب میں ۲ کَ ج س جم ط کے مساوی کمی کرنا ہوگا جہاں س رقاص کے مرکز تعلیق اور ہٹائی ہوئی ہوا کے مرکز جاذبہ کے درمیان فاصلہ ہے۔

$$\therefore ک (ل_1^2 + ط^2) \left(\frac{فرط}{فرت}\right)^2 + \int فرکَ\ س^2 =$$

$$= 2\,\text{ج}\,(\text{ک}\,\text{ل}_1 - \text{کَ}\,\text{س})\,\text{جم}\,\text{ط} + \text{گ}_1$$ جہاں $\text{گ}_1 = 2\,\text{گ}$ فرض کرو

تکمل $\int \text{ر}^2\,\text{فرکَ}$ کی قیمت دریافت نہیں کی گئی ہے لیکن ہم یہ فرض کرسکتے ہیں کہ رقاص جب حرکت کرتا ہے تو ہوا کا ہر ذرہ بھی حرکت کرتا ہے جسکی وجہ سے رفتار $\text{ر}_1 \frac{\text{فرط}}{\text{فرت}}$ کے متناسب ہوتی ہے اور ذرہ کے مقام اور جسم کی شکل پر منحصر ہوتی ہے۔

$\therefore \int \text{ر}^2\,\text{فرکَ} = \text{کَ}\,\text{ھ}\left(\frac{\text{فرط}}{\text{فرت}}\right)^2$ جہاں ھ ایک مستقل ہے۔

$$\therefore \left(\frac{\text{فرط}}{\text{فرت}}\right)^2 \text{ک}\left\{\text{ل}_1^2 + \text{ط}^2 + \frac{\text{کَ}}{\text{ک}}\,\text{ھ}\right\}$$
$$= 2\,\text{ج}\,(\text{ک}\,\text{ل}_1 - \text{کَ}\,\text{س})\,\text{جم}\,\text{ط} + \text{گ}_1$$

اسکو تفرقانے سے:—

$$2\,\frac{\text{فر}^2\text{ط}}{\text{فرت}^2}\,\text{ک}\left\{\text{ل}_1^2 + \text{ط}^2 + \frac{\text{کَ}}{\text{ک}}\,\text{ھ}\right\}$$
$$= 2\,\text{ج}\,(\text{ک}\,\text{ل}_1 - \text{کَ}\,\text{س})\,\text{جب}\,\text{ط}$$

اگر ط بہت چھوٹا ہو تو $\text{جب}\,\text{ط} \doteq \text{ط}$

اور یہ ایک سادہ موسیقی حرکت ہے

$$\therefore \text{وقت دوران}\ \text{و} = 2\pi\sqrt{\frac{\text{ل}_1^2 + \text{ط}^2 + \frac{\text{کَ}}{\text{ک}}\,\text{ھ}}{\left(\text{ل}_1 - \frac{\text{کَ}}{\text{ک}}\,\text{س}\right)\text{ج}}}$$

$$\text{اور سادہ معادل رقاص کا طول} = \frac{\left(\text{ل}_1^2 + \text{ط}^2 + \frac{\text{کَ}}{\text{ک}}\,\text{ھ}\right)}{\left(\text{ل}_1 - \frac{\text{کَ}}{\text{ک}}\,\text{س}\right)}$$

اس ھ کی قیمت تجربہ سے ہوا کے لئے مستقل ثابت ہوئی ہے۔

ایک ایسے رقاص کے لئے جو الٹایا جاسکتا ہو، فرض کرو کہ $\text{و}_1$ اور $\text{و}_2$

دو دو باریدار کناروں کے گرد وقت دوران کی قیمتیں ہیں اور مرکز جاذبہ کے متناظر فاصلے $\text{ل}_1$ اور $\text{ل}_2$ ہیں تب

$$\frac{\text{ج}\,\text{و}_1^2}{4\pi^2} = \frac{\text{ل}_1^2 + \text{ط}^2 + \text{ھ}_1}{\text{ل}_1\left(1 - \frac{\text{ک}'}{\text{ک}} \cdot \frac{\text{س}_1}{\text{ل}_1}\right)}$$

چھوٹی مقداروں کے حاصلضرب کی قیمتوں کو نظرانداز کرتے ہوئے :—

$$\frac{\text{ج}\,\text{و}_1^2}{4\pi^2} = \frac{\text{ل}_1^2 + \text{ط}^2}{\text{ل}_1} + \frac{\text{ل}_1^2 + \text{ط}^2}{\text{ل}_1}\left(\frac{\text{ک}'}{\text{ک}} \cdot \frac{\text{س}_1}{\text{ل}_1}\right) + \frac{\text{ھ}_1}{\text{ل}_1}$$

اسی طرح :—

$$\frac{\text{ج}\,\text{و}_2^2}{4\pi^2} = \frac{\text{ل}_2^2 + \text{ط}^2}{\text{ل}_2} + \frac{\text{ل}_2^2 + \text{ط}^2}{\text{ل}_2}\left(\frac{\text{ک}'}{\text{ک}} \cdot \frac{\text{س}_2}{\text{ل}_2}\right) + \frac{\text{ھ}_2}{\text{ل}_2}$$

ایک کو دوسرے سے تفریق کرنے سے :—

$$\frac{\text{ج}}{4\pi^2}\left(\text{و}_1^2\,\text{ل}_1 - \text{و}_2^2\,\text{ل}_2\right) = \text{ل}_1^2 - \text{ل}_2^2$$

$$+ \left(\text{ل}_1^2 + \text{ط}^2\right)\frac{\text{ک}'}{\text{ک}} \cdot \frac{\text{س}_1}{\text{ل}_1} - \left(\text{ل}_2^2 + \text{ط}^2\right)\frac{\text{ک}'}{\text{ک}} \cdot \frac{\text{س}_2}{\text{ل}_2} + \left(\text{ھ}_1 - \text{ھ}_2\right)$$

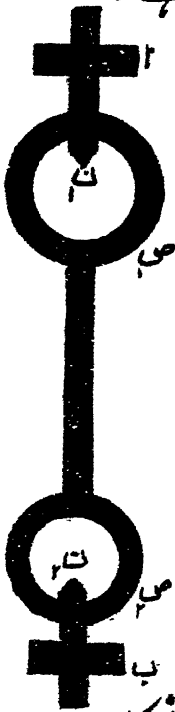
سادہ معادل رقاص کا طول تقریباً $= \text{ل} = \frac{\text{ل}_1^2 + \text{ط}^2}{\text{ل}_1} = \frac{\text{ل}_2^2 + \text{ط}^2}{\text{ل}_2}$

ل کی قیمت ان مقداروں کے لئے لکھئے اور $(\text{ل}_1 - \text{ل}_2)$ سے کل اوپر کی مساوات کو تقسیم کر دیجئے :—

$$\frac{\text{ج}}{4\pi^2}\left(\frac{\text{و}_1^2\,\text{ل}_1 - \text{و}_2^2\,\text{ل}_2}{\text{ل}_1 - \text{ل}_2}\right) = \left(\text{ل}_1 + \text{ل}_2\right) \tag{5}$$

$$+ \frac{\text{ک}'\,\text{ل}}{\text{ک}}\left(\frac{\text{س}_1 - \text{س}_2}{\text{ل}_1 - \text{ل}_2}\right) + \frac{\text{ھ}_1 - \text{ھ}_2}{\text{ل}_1 - \text{ل}_2}$$

بائیں جانب کے مقادیر تصحیح کے رقوم ہیں $(\text{س}_1 - \text{س}_2)$ کی قیمت حسابی طریقہ

سے دریافت کی جا سکتی ہے۔ آخری جز، ایک ہی ناپ اور شکل کے دو رقاصوں کی مدد سے، جن کی کمیتیں مختلف ہوں، دریافت کیا جا سکتا ہے۔ ھ اور ھ کی قیمتیں دریافت کرنی ہوں تو دونوں مساواتوں کو حل کرنا ہوگا۔ اگر رقاص کی شکل ایسی ہو کہ وہ درمیانی نقطہ پر متشاکل ہو تو س۱ = س۲ اور ھ۱ = ھ۲، اور ہوا کی تصحیح ساقط ہو جاتی ہے۔ ایسے رقاص کو جو ان شرائط کو پورا کرتا ہو پہلے پہل رپسالڈ نے بنایا اور اسکو شکل ۱۰ میں دکھلایا گیا ہے۔

ایک سلاخ دو حلقوں ص۱ اور ص۲ میں جوڑ دی جاتی ہے۔ ان حلقوں میں دو چھوٹی سلاخیں جن کے سروں پر دھاریدار کنارے ن۱ اور ن۲ ہوتے ہیں، پیچ کے ذریعہ کس دی جاتی ہیں اور ان کے ساتھ دو اسطوانے ا اور ب لگے ہوئے ہوتے ہیں ان میں سے ایک ٹھوس اور دوسرا کھوکھلا ہوتا ہے۔ ان اسطوانوں کو سلاخ کے کسی مقام پر، اوپر یا نیچے کی جانب ہٹا کر پیچ کے ذریعہ جکڑ دیا جا سکتا ہے اور اس طرح ن۱ اور ن۲ کے گرد، وقت دوران کی قیمتیں تقریباً مساوی کی جا سکتی ہیں۔

ا ن۱ ص۱ ن۲ ص۲ ب

شکل ۱۰

دھاریدار کناروں کا انحنا :- اگر دھاریدار کنارے اچھی طرح تیز نہ ہوں تو دھاریدار کنارہ کے (اپنے سہارے کے ساتھ) پھسلواں (لڑھکنے والے) تماس کی وجہ سے، رقاص اہتزاز کرتا ہے۔

فرض کرو کہ دھاریدار کنارے ص۱ اور ص۲ نصف قطر کے اسطوانے ہیں (شکل ۱۱ میں ق کو ایک دھاریدار کنارے کا (جس کا نقطہ تماس گ ہے) انحنا کا مرکز فرض کیا گیا ہے۔ مرکز جاذبہ ج، دھاریدار کنارہ سے ل۱ فاصلہ پر ہے۔

تھامنے والا جفت = ک ج × ق م

= ک ج (ل$_1$ + ص$_1$) جب طہ

اگر طہ چھوٹا ہو تو یہ جفت = ک ج (ل$_1$ + ص$_1$) طہ

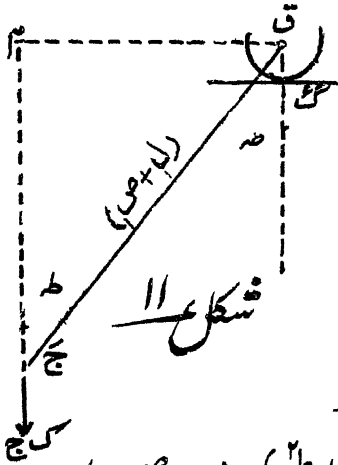
$$\text{لیکن جفت} = \text{مج}\ \frac{\text{ف}^2\,\text{طہ}}{\text{فت}^2}$$

$$= \text{ک}\,(\text{ل}_1^2 + \text{ط}^2)\ \frac{\text{ف}^2\,\text{طہ}}{\text{فت}^2}$$

$$= \text{ک ج}\,(\text{ل}_1 + \text{ص}_1)\,\text{طہ}$$

م، ق، ط، طہ، ج، ک ج، (ل$_1$ + ص$_1$)

شکل ۱۱

اور یہ ایک سادہ موسیقی حرکت کی مساوات ہے اسلئے:—

$$\frac{\text{ج}\ \text{و}_1^2}{4\pi^2} = \frac{\text{ل}_1^2 + \text{ط}^2}{\text{ل}_1 + \text{ص}_1} = \frac{(\text{ل}_1^2 + \text{ط}^2)}{\text{ل}_1} \cdot \left(1 - \frac{\text{ص}_1}{\text{ل}_1}\right)$$

اسی طرح دوسرے دہاریدار کنارے کے لئے:—

$$\frac{\text{ج}\ \text{و}_2^2}{4\pi^2} = \frac{(\text{ل}_2^2 + \text{ط}^2)}{\text{ل}_2} \cdot \left(1 - \frac{\text{ص}_2}{\text{ل}_2}\right)$$

دونوں کو ایک دوسرے میں سے تفریق کرنے سے:—

$$\frac{\text{ج}}{4\pi^2}(\text{و}_1^2\,\text{ل}_1 - \text{و}_2^2\,\text{ل}_2) = (\text{ل}_1^2 - \text{ل}_2^2) - \left(\frac{\text{ل}_1^2 + \text{ط}^2}{\text{ل}_1}\right)\text{ص}_1 + \left(\frac{\text{ل}_2^2 + \text{ط}^2}{\text{ل}_2}\right)\text{ص}_2$$

$$\text{اب سادہ معادل رقاص کا طول} = \text{ل} = \frac{\text{ل}_1^2 + \text{ط}^2}{\text{ل}_1} = \frac{\text{ل}_2^2 + \text{ط}^2}{\text{ل}_2}$$

ل کی رقوم میں لکھنے اور اوپر کی مساوات کو (ل$_1$ − ل$_2$) سے تقسیم کرنے سے:—

$$\frac{\text{ج}}{4\pi^2}\left\{\frac{\text{و}_1^2\,\text{ل}_1 - \text{و}_2^2\,\text{ل}_2}{\text{ل}_1 - \text{ل}_2}\right\} = (\text{ل}_1 + \text{ل}_2) + \left(\frac{\text{ل}}{\text{ل}_1 - \text{ل}_2}\right)(\text{ص}_2 - \text{ص}_1)$$

اگر دہاریدار کناروں کو الٹ دیا جائے جس طرح کہ ریپسالڈ کے رقاص کی صورت میں کیا جا سکتا ہے تو

$$\frac{ج}{۴\pi^۲}\left\{\frac{ف_۱^۲ ل_۱ - ف_۲^۲ ل_۲}{ل_۱ - ل_۲}\right\} = (ل_۱ + ل_۲) + \frac{ل}{ل_۱ - ل_۲}(ص_۱ - ص_۲)$$

ان دونوں مساواتوں کو جمع کرنے سے $ص_۱$ اور $ص_۲$ کی قیمتیں ساقط ہو جاتی ہیں، ورنہ $ص_۱$ اور $ص_۲$ کی قیمتیں دریافت کرنی ہوں گی۔

اگر سہارے میں ایک ثابت دھاریدار کنارہ اور رقاص پر مستوی بیرنگ ہو تو $ص_۱ = ص_۲$، لہذا اس صورت میں کسی تصحیح کی ضرورت نہیں۔

**سہارے کی حرکت:-** سہارا اگر مضبوطی کے ساتھ نہ جمایا گیا ہو، تو رقاص کی حرکت کے ساتھ مجبوراً خود بھی ضرور حرکت کرنے لگے گا، سہارے کی اس حرکت کو انتصابی و افقی اجزاء میں تحلیل کیا جا سکتا ہے، لیکن موخر الذکر کا اثر وقت دوران پر زیادہ ہوتا ہے اور انتصابی کا بالکل کم ہوتا ہے، اسلئے یہ ضروری ہے کہ سہارے کو خصوصاً عرضی سمت میں، مضبوطی کے ساتھ جما دیا جائے۔

شکل ۱۲ میں ایک دھاریدار کنارہ کا نقطہ تعلیق فرض کرو ن ہے اور ۱ مرکز جاذبہ ہے، جہاں $ن ۱ = ل_۱$،

فرض کرو کہ سہارا، افقی سمت میں فی اکائی قوت، بقدر ع، حرکت کرتا ہے۔

$$۱۱' \text{ کی سمت میں اسراع} = ل_۱ \frac{فر^۲ طہ}{فرت^۲}$$

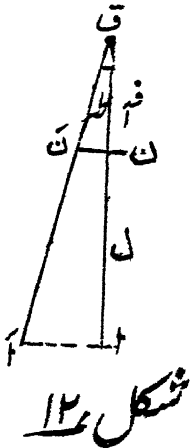
$$\text{لہذا قوت } ۱۱' \text{ کی سمت میں} = ک ل_۱ \frac{فر^۲ ط}{فرت^۲}$$

$$\text{لیکن } \frac{فر^۲ ط}{فرت^۲} = \frac{ج ل_۱ ط}{ل_۱^۲ + ط^۲}$$

$$\text{لہذا سہارے پر قوت} = \frac{ک ج ل_۱^۲ ط}{ل_۱^۲ + ط^۲}$$

$$\text{چونکہ } \frac{ل_۱^۲ + ط^۲}{ل_۱} = \frac{ل_۲^۲ + ط^۲}{ل_۲} = ل$$

شکل ۱۲

$$\therefore\ \text{ط}^2 = \text{ل}_1\,\text{ل}_2$$

$$\therefore\ \text{سہارے پر قوت} = \frac{\text{ک ج ل}_1\ \text{ط}}{\text{ل}_1 + \text{ل}_2}$$

لیکن اکائی قوت کے لئے سہارہ عہ کے مساوی حرکت کرتا ہے۔

$$\therefore\ \text{اس قوت کے لئے سہارہ جتنی حرکت کریگا} = \frac{\text{ک ج ل}_1\ \text{ط}}{\text{ل}_1 + \text{ل}_2}\ .\ \text{عہ}$$

لیکن اس قوت سے سہارہ زاویٔ نقل مکان طہ کے لئے بقدر ن نَ حرکت کرتا ہے۔

$$\text{لہذا}\quad \frac{\text{ک ج ل}_1\ \text{طہ}}{\text{ل}_1 + \text{ل}_2}\ .\ \text{عہ} = \text{ن نَ}$$

$$\text{لیکن ن نَ} = \text{فہ طہ}$$

$$\therefore\ \text{فہ} = \frac{\text{ک ج عہ ل}_1}{\text{ل}_1 + \text{ل}_2}$$

اور مرکز اہتزاز ق تک اونچا کر دیا گیا ہے۔

لہذا وقت دوران کے لئے:—

$$\frac{\text{ج و}_1^2}{4\pi^2} = \frac{(\text{ل}_1 + \text{فہ}_1)^2 + \text{ط}^2}{(\text{ل}_1 + \text{فہ}_1)}$$

$$= \text{ل}_1 + \text{فہ}_1 + \frac{\text{ط}^2}{\text{ل}_1 + \text{فہ}_1}$$

دوسرے دھاریدار کنارے کے لئے:—

$$\frac{\text{ج و}_2^2}{4\pi^2} = \text{ل}_2 + \text{فہ}_2 + \frac{\text{ط}^2}{\text{ل}_2 + \text{فہ}_2}$$

∴ ایک کو دوسرے میں سے تفریق کرنے سے:—

$$\frac{\text{ج}}{4\pi^2}\left\{\frac{\text{و}_1^2\,\text{ل}_1 - \text{و}_2^2\,\text{ل}_2}{\text{ل}_1 - \text{ل}_2}\right\}$$

$$= \frac{1}{\text{ل}_1 - \text{ل}_2}\left\{\text{ل}_1^2 + \text{فہ ل}_1 + \frac{\text{ط}^2\,\text{ل}_1}{\text{ل}_1 + \text{فہ}} - \text{ل}_2^2 - \text{فہ ل}_2 - \frac{\text{ط}^2\,\text{ل}_2}{\text{ل}_2 + \text{فہ}}\right\}$$

اب چونکہ $\text{ف}_{۲} = \dfrac{\text{ک ج ع ل}_{۲}}{\text{ل}_{۱} + \text{ل}_{۲}}$

$\therefore \dfrac{\text{ف}_{۱}}{\text{ف}_{۲}} = \dfrac{\text{ل}_{۱}}{\text{ل}_{۲}}$ یعنی $\text{ف}_{۱}\,\text{ل}_{۲} = \text{ف}_{۲}\,\text{ل}_{۱}$

$$\therefore \frac{\text{ج}}{۴\pi^{۲}} \left\{ \frac{\text{ف}_{۱}\text{ل}_{۱}^{۲} - \text{ف}_{۲}\text{ل}_{۲}^{۲}}{\text{ل}_{۱} - \text{ل}_{۲}} \right\} = (\text{ل}_{۱} + \text{ل}_{۲}) + \frac{۱}{\text{ل}_{۱} - \text{ل}_{۲}} (\text{ف}_{۱}\text{ل}_{۱} - \text{ف}_{۲}\text{ل}_{۲})$$

$$= (\text{ل}_{۱} + \text{ل}_{۲}) + \frac{۱}{\text{ل}_{۱} - \text{ل}_{۲}} \left(\text{ف}_{۱}\text{ل}_{۱} - \text{ف}_{۱} \frac{\text{ل}_{۲}^{۲}}{\text{ل}_{۱}}\right)$$

$$= (\text{ل}_{۱} + \text{ل}_{۲}) + \frac{\text{ف}_{۱}}{\text{ل}_{۱}} (\text{ل}_{۱} + \text{ل}_{۲})$$

$$= (\text{ل}_{۱} + \text{ل}_{۲}) + \text{ک ج ع}$$

لہذا رقاص کے وزن سے، سہارہ جو افقی حرکت کرتا ہے اسکا تصیحی جزو "ک ج ع" ہے۔

**بورڈا کا رقاص** یہ بالکل سادہ رقاص کی طرح ہوتا ہے۔ ایک بڑا فولاد کا یا لوہے کا ٹھوس کرہ، باریک تار کے ذریعہ لٹکایا جاتا ہے۔

چونکہ کسی ٹھوس کرہ کے جمود کا معیار اثر اس کے قطر کے گرد $= \text{م}\,\frac{۲}{۵}\,\text{ص}^{۲}$

اس لئے وقت دوران $\text{و} = ۲\pi \sqrt{\dfrac{\text{ل}_{۱}^{۲} + \frac{۲}{۵}\text{ص}^{۲}}{\text{ل}_{۱}\,\text{ج}}}$ ......... (۱۲)

جہاں $\text{ل}_{۱}$ دہار یعنی دار کنارے اور کرہ کے مرکز جاذبہ کے درمیان فاصلہ ہے۔ اس سے ج کی قیمت دریافت کی جا سکتی ہے۔

## ایک لچکدار ڈوری کے ذریعہ کسی جسم کا ارتعاش کرنا

فرض کرو کہ ایک جسم جس کی کمیت م ہے کسی لچکدار ڈوری کے ذریعہ لٹکایا گیا ہے دیکھو شکل نمبر ۱۳

اگر جسم کو لٹکانے کے بغیر ڈوری کا صحیح طول ل کے مساوی ہو اور اُسکو لٹکانے کے بعد اس میں اضافہ طول = ۲، تو ہوک کے کلیہ کی رو سے* ڈوری میں تناؤ یا زور = م ج = ی $\frac{۲}{ل}$ جہاں ی = ڈوری کے مادہ کا ینگ کا معیار لچک

اب اگر جسم اہتزاز کر رہا ہو اور کچھ وقت میں فاصلہ لا اپنے پہلے مقام سے نیچے اُتر جائے تو ڈوری میں زور یا تناؤ = $\frac{۲ + لا}{ل}$ ی

اور دوسری قوت یا زور جو عمل کر رہا ہے = م ج

∴ حاصل قوت = $\frac{ی(۲ + لا)}{ل}$ - م ج

= ی $\frac{(۲ + لا)}{ل}$ - ی $\frac{۲}{ل}$

= $\frac{ی لا}{ل}$

ل
م
۲
م
لا
م

شکل ع ۱۳

∴ جسم کا اسراع = $\frac{فر^۲ لا}{فر و^۲}$ = $\frac{ی لا}{م ل}$ ،

یہ سادہ موسیقی حرکت کی مساوات ہے۔

∴ وقت دوران و = ۲ π $\sqrt{\frac{م ل}{ی}}$ ............ (۱۳)

اور چونکہ م ج = ی $\frac{۲}{ل}$ ∴ $\frac{م ل}{ی}$ = $\frac{۲}{ج}$

∴ و = ۲ π $\sqrt{\frac{۲}{ج}}$ ............ (۱۴)

اس سے ج کی قیمت معلوم ہو سکتی ہے اور اگر و، م، اور ل کی قیمتیں معلوم ہو جائیں تو ی کی بھی پیمائش ہو سکتی ہے۔

فرض کرو کہ وزن کے اضافہ مَ ج کی وجہ سے طول میں اضافہ ب ہوتا ہے۔

اوپر کے طریقہ سے، مَ ج = ی $\frac{ب}{ل}$

ی کو ساقط کرنے کے بعد و = ۲ π $\sqrt{\frac{ب م}{مَ ج}}$

---

* چوتھا باب دیکھو۔

پس ج کی قیمت معلوم ہو جا سکتی ہے۔ صحیح قیمت حاصل کرنے کے لئے ڈوری کی کمیت کا تیسرا حصہ م میں جمع کرنا چاہئیے یعنی و = ۲ π √( ب ا (م + ک/۳) / م ج )

جہاں ک = ڈوری کی کمیت

**دو ریشی تعلیق** فرض کرو کہ شکل ۱۴ میں ایک سلاخ جس کا مرکز ن ہے دو مساوی طول ل کی ڈوریوں کے ذریعہ ا اور ب پر لٹکائی گئی ہے۔ فرض کرو کہ

ا اور ب کا درمیانی فاصلہ = د۱ اور سلاخ کا طول = د۲

ف ف۲ کوئی افقی خط فرض کیا جائے جس پر سلاخ ابتدا میں تھی اور ا ب، ف ف۲ کے متوازی ہے

شکل ۱۴

اگر سلاخ کے سروں کو یکے بعد دیگرے آگے اور پیچھے علی الترتیب اہتزاز میں لایا جائے۔

تو سلاخ کا مرکز افقی خط سے کوئی زاویہ بنائے گا۔ فرض کرو کہ یہ زاویہ ظہ کے مساوی ہے اور نیز یہ بھی فرض کرو کہ انتصابی وضع سے ڈوری جو زاویہ بناتی ہے وہ ثہ کے مساوی ہے۔

ف۲ سے ایک خط کھینچو جو سلاخ کے سرے قَ میں سے گزرے۔ ایک اور خط ن قَ کھینچو جو ف۲ قَ کے علی القوائم ہو۔

فرض کرو کہ ف ف۲ اور ف۲ قَ کے درمیان زاویہ حہ کے مساوی ہے

اب اگر سلاخ کی کمیت = م

تو $\frac{\text{م ج}}{\text{تٓ}^{2}}$ = جم ثه　　جہاں ڈوری کا تناؤ = ت

یعنی م ج = ۲ ت جم ثه

اور جفت = م فٓ$^{2}$ . $\frac{\text{فز}^{2}\,\text{طه}}{\text{فز و}^{2}}$ = ۲ ن ق × ت جب ثه

جہاں فا = گردشی نصف قطر

یعنی م فا$^{2}$ . $\frac{\text{فز}^{2}\,\text{طه}}{\text{فز و}^{2}}$ = ۲ ن ق × $\frac{\text{م ج}}{2}$ مس ثه

= $\frac{\text{د}_2}{2}$ جب حه . $\frac{\text{م ج}}{2}$ . $\frac{\text{قَ ف}_2}{\text{ل}}$ تقریباً

اگر ثه چھوٹا ہو

مثلث نٓ قَ ف$_2$ میں

$\frac{\text{ف}_2\,\text{قَ}}{\text{جب طه}}$ = $\frac{\text{قَ نٓ}}{\text{جب حه}}$ ≐ $\frac{\text{د}_2}{2\ \text{جب حه}}$

یعنی ف$_2$ قَ = $\frac{\text{د}_2\ \text{جب طه}}{2\ \text{جب حه}}$

∴ م فا$^{2}$ $\frac{\text{فز}^{2}\,\text{طه}}{\text{فز و}^{2}}$ = $\frac{2\,\text{د}_1\,\text{د}_2\,\text{جب طه م ج}}{8\ \text{ل}}$ = $\frac{\text{د}_1\,\text{د}_2\,\text{م ج طه}}{4\ \text{ل}}$

یعنی $\frac{\text{فز}^{2}\,\text{طه}}{\text{فز و}^{2}}$ = زاویٔ اسراع = $\frac{\text{د}_1\,\text{د}_2\ \text{ج طه}}{4\ \text{ل ف}^{2}}$

چونکہ یہ ایک سادہ موسیقی حرکت ہے اس لئے وقت دوران و = ۲π $\sqrt{\frac{4\ \text{ل ف}^{2}}{\text{د}_1\,\text{د}_2\ \text{ج}}}$

= ۴π ف $\sqrt{\frac{\text{ل}}{\text{ج د}_1\,\text{د}_2}}$ ............ (۱۵)

اگر سلاخ مستطیل کی شکل کی ہو تو ف = $\frac{\text{ا}^{2} + \text{ب}^{2}}{12}$

جہاں ا = سلاخ کا طول

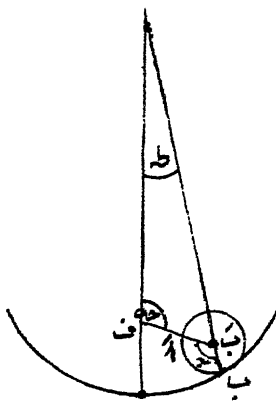
ب = 〃 عرض

اور اگر استوانہ سنا ہو تو $ف = \left(\frac{ل^2}{12} + \frac{ص^2}{4}\right)$

جہاں ص = استوانہ کا نصف قطر

## ایک گولی کو مقعر آئینہ پر لڑھکا کر ج کی قیمت دریافت کرنا۔

شکل ۱۵ میں فرض کرو کہ ن مقعر آئینہ کا مرکز انحنا ہے اور ب ایک گولی ہے جو مقعر آئینہ پر لڑھک رہی ہے۔

ایک نقطہ اَ گولی پر اس طرح کا اگر دیا جائے کہ جب وہ بائیں جانب لڑھکے تو آئینہ کے مرکز ا سے منطبق ہو جائے یعنی قوس ب اَ = قوس ب ا کے۔

فرض کرو کہ گولی کا مرکز بَ، اس کا نصف قطر $ص_1$ اور آئینہ کا نصف قطر انحنا $ص_2$ ہے۔

بَ اَ کو ملاؤ اور فرض کرو کہ ن ا کو یہ نقطہ ف پر قطع کرتا ہے۔ ن بَ کو ملاؤ

شکل ۱۵

چونکہ قوس ا ب = قوس ب اَ اس لئے $ص_1 ط = ص_1 ہ$

اور $ح = ہ - ط = \frac{ص_2 ط}{ص_1} - ط = \frac{ط (ص_2 - ص_1)}{ص_1}$

فرض کرو کہ گولی کے جمود کا معیار اثر ایسے محور کے گرد جو کہ ب میں سے گزر رہا ہے = مج = جمود کے معیار اثر اس کے ایسے متوازی محور کے گرد جو بَ میں سے گزر رہا ہے + م $ص_1^2 = \frac{2}{5}$ م $ص_1^2$ + م $ص_1^2 = \frac{7}{5}$ م $ص_1^2$ [جہاں م = گولی کی کمیت]

گولی کی زاویئی رفتار $= \frac{فرح}{فرو} = \frac{\frac{فرط (ص_2 - ص_1)}{ص_1}}{فرو} = س$ [فرض کرو]

گولی کی توانائی بالفعل $= \frac{1}{2}\,\text{مج}\,\text{ک}^2 =$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{7}{5}\,\text{م}\,\text{ص}_2^2\right)\left(\frac{\text{ص}_1-\text{ص}_2}{\text{ص}_2}\right)^2\left(\frac{\text{فرط}}{\text{فرو}}\right)^2$$

اور توانائی بالقوہ = گولی کا وزن × وہ فاصلہ جو گولی کا مرکز اوپر کی طرف ہٹا

$$= \text{م ج}\left\{(\text{ص}_1-\text{ص}_2)-(\text{ص}_1-\text{ص}_2)\,\text{جم ط}\right\}$$

$$= \text{م ج}\,(\text{ص}_1-\text{ص}_2)(1-\text{جم ط})$$

چونکہ توانائی بالفعل + توانائی بالقوہ = مستقل

لہذا
$$\text{م ج}(\text{ص}_1-\text{ص}_2)(1-\text{جم ط}) + \frac{1}{2}\cdot\frac{7}{5}\,\text{م}\,\text{ص}_2^2\left(\frac{\text{ص}_1-\text{ص}_2}{\text{ص}_2}\right)^2\left(\frac{\text{فرط}}{\text{فرو}}\right)^2 = \text{مستقل}$$

اس کو تفرقانے سے
$$\text{م ج}(\text{ص}_1-\text{ص}_2)\,\text{جب ط}\,\frac{\text{فرط}}{\text{فرو}} + \frac{7}{10}\cdot 2\,\text{م}(\text{ص}_1-\text{ص}_2)^2\,\frac{\text{فرط}}{\text{فرو}}\cdot\frac{\text{فر}^2\text{ط}}{\text{فرو}^2} = \text{صفر}$$

اگر زاویہ ط چھوٹا ہو تو
$$\text{ج ط} + \frac{7}{5}(\text{ص}_1-\text{ص}_2)\frac{\text{فر}^2\text{ط}}{\text{فرو}^2} = \text{صفر}$$

یعنی اسراع
$$= \frac{\text{فر}^2\text{ط}}{\text{فرو}^2} = \frac{-5\,\text{ج ط}}{7(\text{ص}_1-\text{ص}_2)}$$

اور چونکہ یہ سادہ موسیقی حرکت کی مساوات ہے۔

لہذا وقت دوران
$$\text{و} = 2\pi\sqrt{\frac{7}{5}\cdot\frac{(\text{ص}_1-\text{ص}_2)}{\text{ج}}} \quad \ldots\ldots (16)$$

اس مساوات سے ج کی قیمت دریافت کی جا سکتی ہے۔

## ڈھنیلی (دھویں سے سیاہ شدہ) تختی کو گرا کر ج کی قیمت کی دریافت۔

تجربہ میں ایک مستطیل شکل کی تختی کو کاجل کے ذریعہ ڈھنیلا کیا جاتا ہے۔ ایک سر پیدا کرنے والے دوشاخہ کو لے کر اس کے ایک شاخ کے سرے پر تیلا تار لگا دیا جاتا ہے اور دوشاخہ کو تختی کے نچلے حصہ میں اسطرح رکھا جاتا ہے کہ تار کا سرا تختی کے ساتھ مس کرتا ہے دیکھو شکل ۱۶ اب

اگر تختی کو گرا دیا جائے تو اس پر موجی شکل کا ایک منحنی بنے گا جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے فرض کرو کہ ا تعداد کی موجوں کے لئے تختی نے جو فاصلہ طے کیا $= \text{س}_۱$ اور اسی ا موجوں کے لئے فرض کرو کہ تختی کے دوسرے حصہ میں جو فاصلہ طے کیا گیا وہ $= \text{س}_۲$

شکل ۱۶

$\text{س}_۱ = \text{ما} \frac{\text{ا}}{\text{ن}} + \frac{۱}{۲} \text{ج} \left(\frac{\text{ا}}{\text{ن}}\right)^۲$ جہاں ما = ابتدا میں تختی کی رفتار جبکہ پہلی ا موجیں بنی تھیں

$\therefore ۲\,\text{س}_۱ = ۲\,\text{ما} \frac{\text{ا}}{\text{ن}} + \text{ج} \left(\frac{\text{ا}}{\text{ن}}\right)^۲$

اور $\text{س}_۱ + \text{س}_۲ = \text{ما} \left(\frac{۲\text{ا}}{\text{ن}}\right) + \frac{۱}{۲} \text{ج} \left(\frac{۲\text{ا}}{\text{ن}}\right)^۲$

$\therefore \text{س}_۱ - \text{س}_۲ = \text{ج} \left(\frac{\text{ا}}{\text{ن}}\right)^۲ - \frac{۱}{۲} \text{ج} \left(\frac{۲\text{ا}}{\text{ن}}\right)^۲ = \text{ج} \left(\frac{\text{ا}}{\text{ن}}\right)^۲ (۱-۲)$

$\therefore \text{س}_۲ - \text{س}_۱ = \text{ج} \left(\frac{\text{ا}}{\text{ن}}\right)^۲$

$\therefore \text{ج} = \frac{\text{ن}^۲}{\text{ا}^۲} (\text{س}_۲ - \text{س}_۱)$ ........................ (۱۷)

## سطح زمین پر ج کی قیمت کا تغیر:—

۱۶۷۲ء میں ریشر نامی شخص نے پہلی دفعہ یہ ثابت کیا کہ مختلف مقامات پر ج کی قیمت مختلف ہوتی ہے۔ چونکہ زمین اپنے محور پر گردش کرتی رہتی ہے اس وجہ سے اسکی سطح پر مختلف اشیا میں اس امر کا تقاضا ہوتا ہے کہ

زمین کی سطح سے علیحدہ ہو کر دور پھینکے جائیں۔ یہ تقاضا خطِ استوا پر اعظم ہوتا ہے جہاں کہ گردش کی رفتار اعظم ہوتی ہے اور قطبوں کے قریب یہ اقل ہوتا ہے چونکہ زمین کے خطِ اسُتوا کا نصف قطر، قطبی نصف قطر سے بہت بڑا ہے لہذا جو اشیا خطِ استوا پر واقع ہیں انکا فاصلہ، زمین کے مرکز ثقیت سے، بہ نسبت قطبوں پر واقع ہونے والی اشیا کے فاصلہ کے بہت زیادہ ہوتا ہے۔ اسی وجہ سے خطِ استوا پر جاذبہ کی قوت کسی کمیت پر قطبوں کی بہ نسبت کم ہوتی ہے۔ اس سے ظاہر ہے کہ ج کی قیمت خطِ استوا پر کم اور قطبوں پر زیادہ ہوتی ہے۔

۱۷۴۳ء میں کلیبرو نے یہ ثابت کیا کہ کسی عرض البلد له پر ج کی قیمت کی تعبیر ذیل کی مساوات سے ہوتی ہے :-

$$\text{ج}_{\text{له}} = \text{ج}_{۱} \left[ ۱ + \left( \tfrac{۵}{۲}\text{ک} - \text{ھ} \right) \text{جب}^{۲}\,\text{له} \right] \quad (۵)$$

جہاں $\text{ج}_{۱}$ = خط استوا پر ج کی قیمت

$$\text{ک} = \frac{\text{قوت مرکز گریز خط استوا پر}}{\text{ج}_{۱}}$$

$$\text{ھ} = \frac{\text{استوائی اور قطبی نصف قطروں کا فرق}}{\text{استوائی نصف قطر}}$$

۱۸۸۴ء میں ہلمرٹ نے صحیح ضابطہ دریافت کیا جو آجکل بھی معیاری تصور کیا جاتا ہے۔

$$\text{ج}_{\text{له}} = ۹۷۸٫۰۰ \,(۱ + ۰٫۰۰۵۳۱\ \text{جب}^{۲}\,\text{له})$$

سر جارج ایری وغیرہ نے یہ ثابت کر دکھایا کہ ایک ہی مقام پر ج کی قیمت زمین سے مختلف بلندیوں پر بدلتی رہتی ہے۔ کسی پہاڑ کی چوٹی پر

سطح سمندر کے مقابلہ میں ج کی قیمت کم ہوتی ہے اسکی وجہ یہ ہے کہ زمین کا مرکزی حصہ بالائی حصہ کی بہ نسبت زیادہ کثیف ہے۔ لہذا کسی کان کے اندر ج کی قیمت بلند مقامات کی بہ نسبت زیادہ ہوگی۔ ایوان تجارت نے حسب ذیل ضابطہ معین کیا ہے۔

یہ فرض کرتے ہوئے کہ زمین ت نصف قطر کا ایک کرہ ہے۔

$$\text{ج}_{\text{لہ ب}} = ۹۸۰٫۶۲\,(۱ - ۰٫۰۰۲۵۷\ \text{جم}\,۲\,\text{لہ})\left[۱ - \frac{۵\,\text{ب}}{۴\,\text{ت}}\right]$$

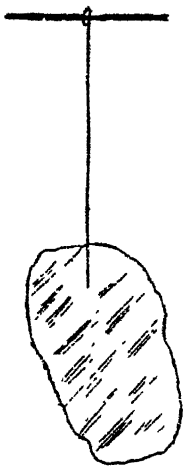
جہاں $\text{ج}_{\text{لہ ب}}$ = ج کی قیمت عرض البلد لہ اور سطح سمندر سے بلندی ب پر

زمین کے مختلف مقامات پر ج کی قیمت حسب ذیل ہے:۔

| مقام | عرض البلد | ج سم فی ثانیہ فی ثانیہ |
|---|---|---|
| خط استوا | ۰° – ۰' | ۹۷۸٫۱۰ |
| مدراس | ۱۳° – ۴' | ۹۷۸٫۲۹ |
| حیدرآباد دکن | ۱۷° – ۲۵' – ۵۴" | ۹۷۸٫۳۰ |
| کلکتہ | ۲۲° – ۳۳' | ۹۷۸٫۷۷ |
| کیپ ٹاؤن | ۳۳° – ۵۶' | ۹۷۹٫۶۴ |
| ٹوکیو | ۳۵° – ۴۱' | ۹۷۹٫۹۵ |
| ملبورن | ۳۷° – ۵۰' | ۹۷۹٫۹۸ |
| نیویارک | ۴۰° – ۴۴' | ۹۸۰٫۲۳ |
| پیرس | ۴۸° – ۵۰' | ۹۸۰٫۹۴ |
| لندن | ۵۱° – ۳۱' | ۹۸۱٫۱۹ |

| مقام | عرض البلد | ج سمر فی ثانیہ فی ثانیہ |
|---|---|---|
| کیمبرج | ۵۲ - ۱۳ | ۹۸۱٫۲۵ |
| اڈنبرا | ۵۵ - ۵۶ | ۹۸۱٫۵۸ |
| قطب شمالی | ۹۰ - ۰ | ۹۸۳٫۲۱ |

**مروڑی اہتزاز:۔**

فرض کرو کہ ایک جسم دائری وضع میں اہتزاز کر رہا ہے یعنی مروڑی اہتزاز ہو رہا ہے۔

اگر یہ کسی وقت و میں زاویہ عہ گھومے تو جفت

$$= \text{مج} \frac{\text{فر}^2 \text{عہ}}{\text{فر و}^2}$$

اور یہ جفت = ٹہ عہ جہاں ٹہ = مروڑ کا جفت فی اکائی زاویہ

$$\therefore \text{مج} \frac{\text{فر}^2 \text{عہ}}{\text{فر و}^2} = \text{ٹہ عہ}$$

یعنی زاویٰ اسراع $= \frac{\text{فر}^2 \text{عہ}}{\text{فر و}^2} = \frac{\text{ٹہ عہ}}{\text{مج}}$

اور چونکہ یہ ایک سادہ موسیقی حرکت کی مساوات ہے اس لئے وقت دوران

$$\text{و} = 2\pi \sqrt{\frac{\text{مج}}{\text{ٹہ}}} \quad \ldots\ldots (۱۸)$$

شکل ۱۷

## Chapter II.

(۱) Advanced Practical Physics "Worsnop & Flint" P69 (1927)
(۲) ,, ,, ,, ,, P71 (1927)
(۳) Properties of Matter "Poynting & Thomson" P14 (1922)
(۴) Properties of Matter "Newman & Searle" P43 (1928)
(۵) ,, ,, ,, P46, (1928)
(۶) ,, ,, ,, P49, (1928)
(۷) Properties of Matter "Wagstaff" P85 (1924)
(۸) Phil. Trans 40, 19 (1737)
(۹) Properties of Matter "Wagstaff" P142, (1924)

محمد معین الدین

# تیسرا باب

## قوت جاذبہ کا مستقل

نیوٹن کا کلیہ جاذبہ :۔ اگر دو جسموں کی کمیت $ک_۱$ اور $ک_۲$ ہو اور ان کے درمیان فاصلہ ف تو دونوں کے درمیان کشش کی قوت ق $\propto \frac{ک_۱ ک_۲}{ف^۲}$

یعنی $ق = جہ \frac{ک_۱ ک_۲}{ف^۲}$

جہ جاذبہ کا مستقل کہلاتا ہے ۔ کیونڈش ' بائز ' جولی ' اور پوائنٹنگ وغیرہ نے جہ کی قیمت تجربہ کے ذریعہ دریافت کی ہے ۔

نیوٹن کے شہرۂ آفاق کلیہ کی رو سے کسی $ک_۲$ کمیت کا اسراع کسی دوسرے جسم کی طرف $= \frac{جہ ک_۱}{ف^۲}$

اس نتیجہ کی مدد سے ہم مختلف اجرام سماوی کی کمیتیں بہ آسانی دریافت کر سکتے ہیں ۔

مثلاً فرض کرو کہ چاند کی زاویٔ رفتار $= ω_چ$ اور اس کا فاصلہ زمین سے $= ف_چ$ اور س = سورج کی کمیت

$ز$ = زمین کی کمیت اور $ω_ز$ = زمین کی زاویٔ رفتار اور $ف_ز$ = زمین کا فاصلہ سورج سے اس صورت میں چاند کا اسراع زمین کی طرف

$$= ف_چ \times ω_چ^۲$$

$$= \frac{جہ\ ز}{ف_چ^۲} \quad \text{.................} \quad (۱)$$

اور زمین کا اسراع سورج کی طرف = $ف_ز \times س^۲ل_ز$

$$= \frac{ج\,س}{ف_ز^۲} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (۲)$$

مساوات (۱) کو (۲) سے تقسیم کرنے سے:-

$$\frac{ف_ز^۲}{ف_چ^۲} \times \frac{ز}{س} = \frac{س^۲ل_چ \times ف_چ}{ف_ز \times س^۲ل_ز}$$

$$\therefore \frac{ز}{س} = \frac{ف_چ^۳ \times س^۲ل_چ}{ف_ز^۳ \times س^۲ل_ز}$$

$$= \left(\frac{۲۴۰۰۰}{۹۲۰۰۰۰۰۰}\right)^۳ \cdot \left(\frac{۳۶۵}{۲۷}\right)^۲$$

$$= \frac{۱}{۳۰۰۰۰۰}$$

لیکن ہمیں یہ معلوم ہے کہ زمین کا وزن تقریباً $۱۰^{۲۵} \times ۱،۲۵$ پونڈ ہے

لہذا سورج کا وزن تقریباً $= ۱،۲۵ \times ۱۰^{۲۵} \times ۳۰۰۰۰۰$

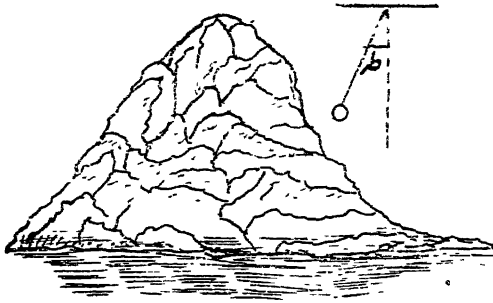
$= ۳،۷۵ \times ۱۰^{۳۰}$ پونڈ

زمین کی کمیت کسی پہاڑ کی کمیت کے رقوم میں :- کسی پہاڑ کے کنارے کے قریب ایک چھوٹا سا گولا لٹکا دیا جائے تو پہاڑ کی کشش کی وجہ سے ایک افقی قوت گولہ کو اس کی طرف جذب کرے گی اور قوت جاذبہ زمین اس کو نیچے کی جانب انتصابی سمت میں کھینچے گی، لہذا گولہ جس ڈوری سے بندھا ہوا ہوگا یہ ڈوری ان دونوں قوتوں کی حاصل سمت اختیار کرے گی۔ اگر انتصابی سمت سے ڈوری زاویہ ط بنائے تو

$$مس\ ط = \frac{ق_۱}{ق_۲}$$

جہاں ق۱ = پہاڑ کی کشش کی وجہ افقی قوت

ق۲ = جاذبۂ زمین کی وجہ انتصابی قوت

فرض کرو کہ ک۱ پہاڑ کی اور م گولہ کی کمیت ہے۔ پہاڑ کی کشش کے مرکز سے گولہ کا فاصلہ = ف، اور زمین کی کمیت ز ہے اور زمین کے مرکز کا فاصلہ گولہ سے = ص،

تب ق۱ = ج $\frac{\text{ک}_1\ \text{م}}{\text{ف}^2}$

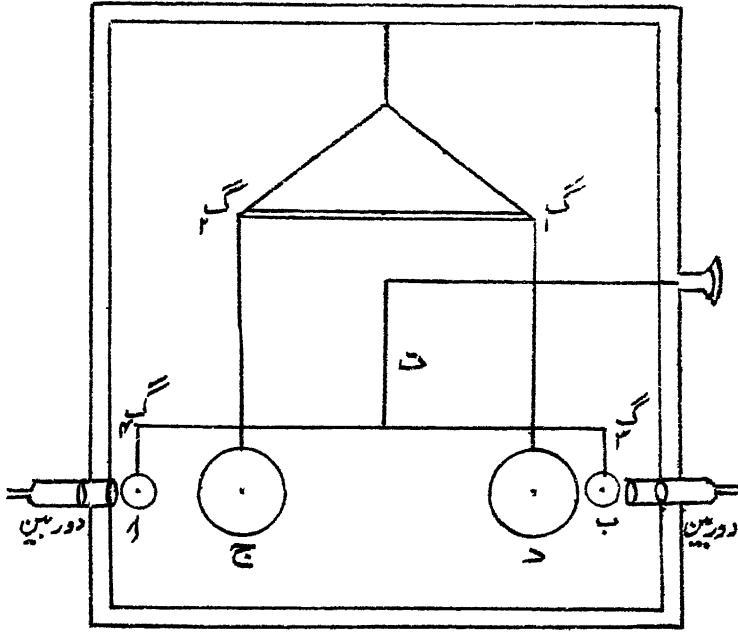
اور ق۲ = $\frac{\text{ج ز م}}{\text{ص}^2}$

$$\therefore \frac{\text{ق}_1}{\text{ق}_2} = \text{مس ط} = \frac{\text{ک}_1\ \text{ص}^2}{\text{ز ف}^2}$$

لہذا ز کی قیمت حساب کے ذریعہ معلوم کی جا سکتی ہے۔ زمیں کا حجم اگر معلوم ہو تو اس کی کثافت بھی دریافت کی جا سکتی ہے۔

پہلے پہل ۱۷۴۰ء میں اس قسم کا تجربہ کرنے کی کوشش بوگے نے کی تھی۔ اس کے بعد ۱۷۷۴ء میں میسکیلین نامی ایک انگریز ہیئت داں نے اسی قسم کے تجربہ کو دوہرایا اور زمین کی کثافت اس نے ۵ء۴ دریافت کی(۱)۔ لیکن پہاڑ کی کمیت صحیح طور پر معلوم کرنے کے بعد زمین کی کثافت کی صحیح قیمت ۵ نکلی۔ ۱۸۵۴ء میں ایبرای نے زمین کی کثافت ۵ء۶ دریافت کی(۲)۔

ج کی قیمت کی دریافت ہنری کیونڈش کے طریقہ سے:— اصل میں اس تجربہ کی

بنیاد جان مچیکل نے ڈالی تھی لیکن بعد میں کیونڈش نے ۱۷۹۷ء میں

شکل ۱

صحیح طور پر اس کو کیا تھا[۳]،

شکل ۱ میں ج، د دو بڑے سیسہ کے گولے ہیں جنکا قطر ۱۲ انچ ہے اور یہ ایک سلاخ گ$_{1}$ گ$_{2}$ کے ذریعہ لٹکائے گئے ہیں۔ اس سلاخ کو ہم دائری وضع میں گھما سکتے ہیں، گ$_{3}$ گ$_{4}$ ایک پتلی ہلکی سلاخ ہے جس کے ذریعہ دو چھوٹے سیسہ کے گولے ب اور ا آویزاں کئے گئے ہیں۔ ان چاروں گولوں کے مرکز ایک ہی اُفقی مستوی میں واقع ہیں۔

تجربہ میں یہ کُل چیزیں ایک بند صندوق میں رکھ دی جاتی ہیں تاکہ بیرونی اثرات سے محفوظ رہیں شروع میں گ$_{1}$ گ$_{2}$ کو اس طرح گھمایا جاتا ہے کہ اس کی سمت گ$_{3}$ گ$_{4}$ کے علی القوائم ہو جائے اور مروڑے ہوئے تار ت کی مروڑ

نکال دی جاتی ہے۔ پھر سلاخ $گ_۱ گ_۲$ کو اسکی پہلی وضع میں اسطرح گھمایا جاتا ہے کہ ج، ا کے اور د، ب کے قریب آجائے۔ ا اور ج اور ب اور د میں کشش ہوگی اور اس کی وجہ سے سلاخ $گ_۱ گ_۲$ میں انصراف ہوگا۔ یہ انصراف معلوم کرلیا جاتا ہے۔ اس کے بعد سلاخ $گ_۱ گ_۲$ کو دوسری طرف گھماکر اسی طرح تجربہ دوہرایا جاتا ہے۔ اور یہ انصراف دوربینوں کی مدد سے معلوم کیا جاتا ہے تجربہ کے دوران میں تپش کا مستقل رکھنا ضروری ہے۔ کیونڈش نے یہ تجربہ ایک بند کمرے میں کیا تھا تاکہ ہوا کے اثرات نہ ہونے پائیں۔ چونکہ آلات میں خود کشش کا خوف تھا اس لئے کیونڈش نے ایک شیشہ کا صندوق بنایا۔ اب اور ج، د کی کمیت اور جسامت علی الترتیب یکساں ہونی چاہیے۔ فرض کرو کہ $ک_۱$ کسی ایک بڑے گولے کی کمیت ہے اور $ک_۲$ کسی چھوٹے گولے کی، اور ب اور د کے مرکزوں کے درمیان فاصلہ = ف جبکہ سلاخ $گ_۱ گ_۲$ میں انصراف = عہ اور سلاخ $گ_۱ گ_۲$ کا طول = ۲ ل

تب ب اور د کے درمیان کشش کی قوت ق = $جہ \frac{ک_۱ ک_۲}{ف^۲}$

اور انکے محور کے گرد معیار اثر = $\frac{۲ل\, جہ\, ک_۱ ک_۲}{ف^۲}$ = جفت

= ثہ عہ جہاں ثہ پیچیدگی کا جفت فی اکائی زاویہ ہے

$$\therefore جہ = \frac{ثہ\, عہ\, ق^۲}{۲ل\, ک_۱ ک_۲} \quad \text{......} \quad (۳)$$

اس مساوات سے اگر ثہ کی قیمت معلوم ہو تو جہ کی قیمت معلوم ہوجاتی ہے اگر $گ_۱ گ_۲$ کو دائری وضع میں اہتزاز کراکے اس کا وقت دوران ۏ معلوم ہوجائے اور اس سلاخ کے جمود کا معیار اثر جج ہو تو ثہ کی قیمت

$ۏ = ۲\pi \sqrt{\frac{جج}{ثہ}}$ سے معلوم ہوجائے گی

اگر جہ معلوم ہو جائے تو زمین کی کثافت آسانی سے معلوم کی جا سکتی ہے۔ فرض کرو کہ زمین پر ایک جسم جس کی کمیت ک ہے رکھا ہوا ہے۔ زمین اور جسم کے درمیان کشش کی قوت = اس جسم کے وزن کے جو زمین کی جانب عمل کر رہا ہے۔ چونکہ زمین کی کمیت = $\frac{۴}{۳}$ ‎π صں^۳ ث جہاں صں = زمین کا نصف قطر

∴ کشش کی قوت = ک ج = جہ $\frac{(\frac{۴}{۳} \pi \text{ صں}^{۳} \text{ ث}) \text{ ک}}{\text{صں}^{۲}}$

∴ ث = زمین کی کثافت = $\frac{۳ \text{ ج}}{۴ \pi \text{ جہ صں}}$

تجربہ سے جہ = ۶۶ء۶ × ۱۰^{-۸}

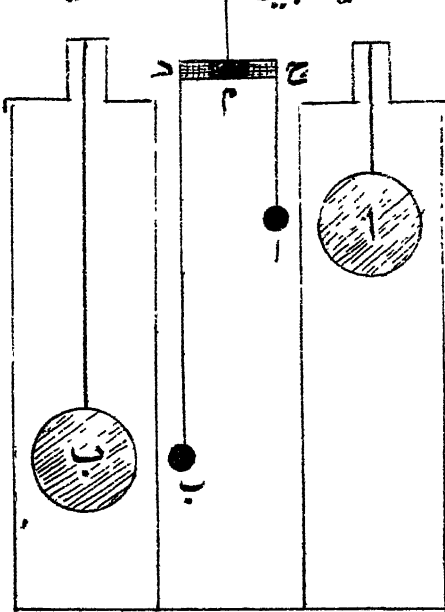
اس سے ث معلوم ہو جاتا اگر ہمیں صں معلوم ہو صں کی قیمت درج کرنیسے ث کی قیمت ۵ء۵۴ گرام فی مکعب سم حاصل ہوتی ہے۔

بعد میں اس تجربہ کو رلیش نے جرمنی میں بیلی نے انگلستان میں اور کارنو اور بیلے نے فرانس میں دوہرایا۔ ان تمام کے نتائج کیونڈش کے نتائج کے بہت ہی قریب ہیں۔

شکل ۲

**جہ کی قیمت کی دریافت**

**ورنن بائز کے تجربہ سے:۔**

پروفیسر بائز نے سنہ ۱۸۹۵ء میں جو تجربہ کیا وہ حسب ذیل ہے (۴)

اس نے کوارٹز کے بہت ہی

باریک ریشے بنانے کا ایک طریقہ دریافت کیا اس نے دیکھا کہ یہ ریشے بہت مضبوط ہوتے ہیں اور لچک دار خواص ان میں صحیح طور پر پائے جاتے ہیں۔ اسوجہ سے اسنے کوارٹز کے ریشوں کو اپنے تجربہ میں ایسی جگہ استعمال کیا جہاں چھوٹی چھوٹی قوتیں ناپنے کی ضرورت تھی شکل ۲ میں اَ ب سونے کے دو چھوٹے کرّے ہیں جن کے قطر ۰٫۲۵ انچ ہیں۔

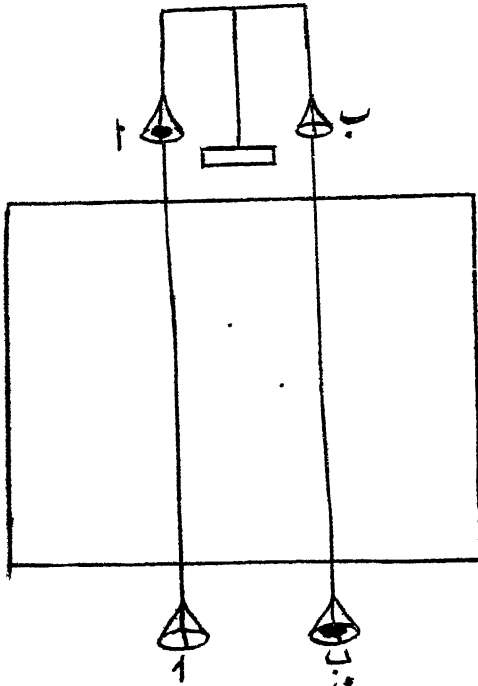
ان کو کوارٹز کے ریشوں کے ذریعہ ایک بہت چھوٹی مروڑی سلاخ ج د کے دونوں سروں پر لٹکایا جاتا ہے جس کے ساتھ ایک آئینہ م بھی لگا ہوا ہوتا ہے۔ کشش کرنے والی کمیتین ا اور ب سیسہ کے کرّے تھے جنکا قطر ۴٫۵ انچ تھا۔ کیونڈش کے تجربہ کی طرح کشش کرنے والی قوتیں ایک ہی سطح میں ہوتیں تو اتنی چھوٹی مروڑی سلاخ کے ساتھ ا اور ب دونوں سونے کے کرّوں کو تقریباً مساوی قوت سے جذب کرتے۔ اس کو روکنے کے لئے پروفیسر بائز نے ا، ا کو ایک سطح میں اور ب، ب کو ۶ انچ نیچے، دوسری سطح میں رکھا۔

کشش کرنے والی کمیتین ا اور ب ایک کھوکھلے استوانہ نما بکس کے ڈھکن سے جس کا قطر ۱۰ انچ تھا اور جو گھوم سکتا تھا لٹکائی گئیں، اور کرّے اَ بَ ایک نلی کے اندر لٹکائے گئے جس کا قطر تقریباً ۱٫۵ انچ تھا۔

تجربہ میں کمیتیں ا اور ب، بکس کے ڈھکن کو گھما کر اسطرح رکھی گئی تھیں کہ پہلے ایک سمت میں اور پھر دوسری سمت میں طلائی کرّوں پر اُن کا اعظم جفت عمل کرے۔ بائز نے جہ کی قیمت مساوات (۳) کی مدد سے دریافت کی اور یہ $6.657 \times 10^{-8}$ کے مساوی تھی۔

اس تجربہ کو ۱۸۹۶ء میں ڈاکٹر بران نے بھی اس میں کچھ تھوڑی سی تبدیلی کرنے کے بعد دوہرایا۔ اسنے بھی جہ کی قیمت تقریباً یہی دریافت

کی جو بائنز کو حاصل ہوئی تھی۔

**جہ دریافت کرنے کے لئے پروفیسر جولی کا تجربہ :-** پہلے پہل ۱۸۸۱ء میں جولی نے اس تجربہ کو کیا تھا، شکل ۳ میں ایک ترازو دکھایا گیا ہے۔ اس ترازو کو جرمنی میں ایک مینار کی چھت سے لٹکایا گیا۔ چھوٹے پلڑوں ا اور ب سے دو بڑے پلڑے اُ، بُ لمبے تاروں کے ذریعے ۲۱۰ سمر نیچے لٹکائے گئے۔ فرض کرو کہ ا اور ب میں دو ایسے وزن ڈالے گئے کہ دونوں پلڑے

ا ب

اُ بُ

شکل ۳

تعادل میں رہیں، اب اگر ایک وزن ب میں رکھا جائے جیسا کہ شکل سے ظاہر ہے تو یہ وزن زمین کے مرکز کے قریب ہو جائے گا اور اوپر والے وزن سے بھاری ہو جائے گا۔ جولی نے دریافت کیا کہ ۵ کلوگرام کے وزن میں تقریباً ۳۲ ملی گرام کا اضافہ ہوا۔ اس کے بعد جولی نے ایک بڑا لوہے کا ۳۶ انچ قطر والا کرہ نچلے پلڑے کے نیچے رکھا اور اس وقت ۵ کلوگرام میں ۳۲ر۵ ملی گرام کا اضافہ ہوا جبکہ وزن پیشتر کی طرح اوپر سے نیچے کے پلڑے میں لایا گیا، لہذا صرف کرہ کی وجہ سے ۵ر ملی گرام کے مساوی کشش ہوئی۔

فرض کرو کہ پلڑے میں کمیت = م اور زمین کی کمیت = $ن_۱$ اور کرہ کی کمیت = ک تب زمین اور پلڑے کی کمیتوں میں قوت جاذبہ = $\frac{ج\, ن_۱\, م}{ص^۲}$ = ۵۰۰۰ گرام جہاں ص = زمین کا نصف قطر اگر $ص_۱$ = کرہ کا نصف قطر تو

پلڑے کی کمیت اور کرہ کے درمیان جاذبہ کی قوت = $\frac{ج\, ک\, م}{ص_۱^۲}$

= ۵ ء ملی گرام = ۰۰۰۵ء گرام

لہذا ایک کو دوسرے سے تقسیم کرنے سے:-

$$\frac{ن_۱}{ص^۲} \times \frac{ص_۱^۲}{ک} = \frac{۵۰۰۰}{۰۰۰۵ء} = ۱۰^{٦}$$

$$لہذا\ \frac{ن_۱}{ک} = \frac{\frac{۴}{۳}\pi ص^۳ \times ث}{\frac{۴}{۳}\pi ص_۱^۳ \times ث_۱} = \frac{۱۰^{٦} \times ص_۱^۲}{ص^۲}$$

$\therefore ث = \frac{ص_۱ \times ۱۰^{٦} \times ث_۱}{ص}$ جہاں $ث_۱$ = کرہ کے مادہ کی کثافت

اور ث = زمین کی کثافت

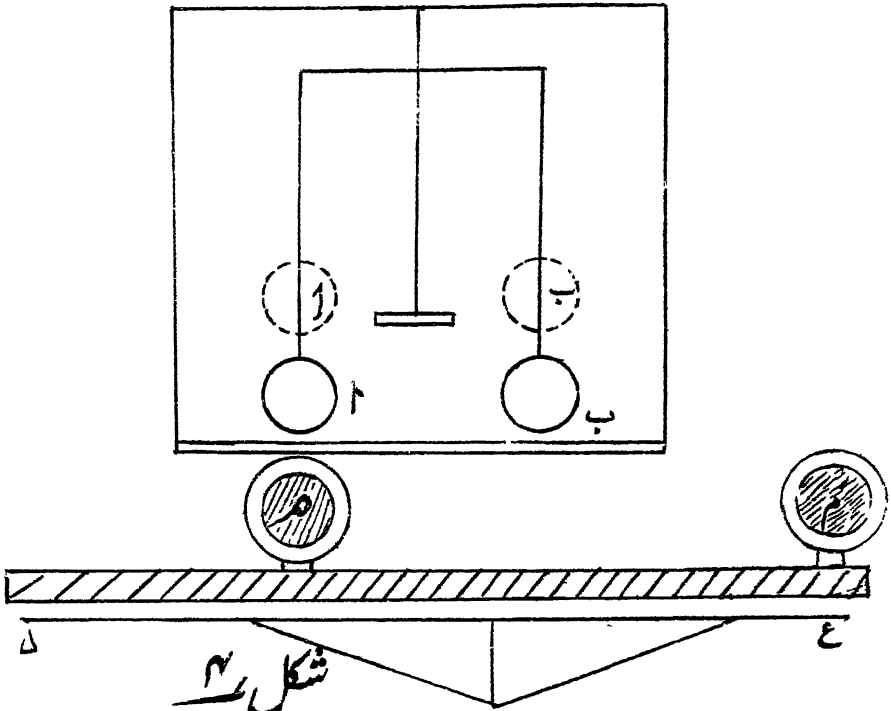
اسطرح جولی نے ث کی قیمت ۵ء۶۹ گرام فی مکعب سمر حاصل کی۔

چونکہ اسطرح ث کی قیمت معلوم ہو چکی ہے اس وجہ سے ج آسانی سے معلوم کیا جا سکتا ہے۔

ریشارڈز

اسکے بعد ۱۸۹۸ء میں ریچرز اور کریگر منسل نے بھی جولی کی طرح تجربہ کیا اور انہوں نے ث کی قیمت ۵ء۵۱ حاصل کی۔

ج معلوم کرنے کے لئے پوائنٹنگ کا تجربہ[5] :- شکل ۲۴ میں طریقہ عمل کی عام ترتیب بتائی گئی ہے۔

ا اور ب دو سیسہ کے گولے ہیں جن میں سے ہر ایک کا وزن ۵۰ پونڈ ہے۔ ان کو ایک مضبوط ترازو کے سروں پر لٹکایا جاتا ہے۔ ترازو کو ایک لکڑی کے بکس میں بند کر دیا جاتا ہے۔

شکل ۴

م ایک بڑا سیسہ کا کرہ ہے جسکا وزن تقریباً ۳۵۰ پونڈ ہے اس کو ایک نالی دار نلی ل ع میں رکھا جاتا ہے۔ حسب ضرورت اس کرہ کو نالی میں لڑھکا کر ا کے یا ب کے نیچے لایا جا سکتا ہے۔ م توازن قائم رکھنے والا وزن ہے' ا اور م کے مرکزوں کے درمیان فاصلہ تقریباً ایک فٹ ہوتا ہے۔ جب م ا کے نیچے ہوتا ہے تو ا پر کشش کا عمل کرتا ہے جس سے اسکا وزن بڑھ جاتا ہے۔

ا اور ب' وہ دو مقامات ہیں جہاں ا اور ب' ایک فٹ اور اونچے کر دئے جائیں تو واقع ہوں گے۔ اس صورت میں چونکہ ترازو کی ڈنڈی اور معلق تاروں پر م کی کشش وہی رہتی ہے جو پہلے تھی لہذا ان دو مقاموں پر ا اور ب کی کشش میں علی الترتیب فرق لینے سے ڈنڈی وغیرہ کی کشش کے اثرات زائل ہو جاتے ہیں اور صرف فاصلوں کی تبدیلی سے

کشش کا فرق حاصل ہوتا ہے۔

اس طرح پروفیسر پوائنٹنگ نے جہ کی قیمت $۶٫۶۹۸ \times ۱۰^{-۸}$ دریافت کی۔ اب ہم اُن امور پر بحث کرینگے جن کی وجہ سے کلیہ تجاذب میں تغیر واقع ہو سکتا ہے:—

**قوت جاذبہ اور واسطہ:—** اوپر، قوت جاذبہ کے متعلق جن تجربوں کا ذکر کیا گیا ہے، ان میں تجاذبی اجسام کی کمیتوں کے درمیان ہوائی واسطہ تھا، یہاں یہ سوال پیدا ہوتا ہے کہ واسطہ کی نوعیت کا تجاذبی مستقل کی قیمت پر کوئی اثر بھی ہوتا ہے یا نہیں۔ آسٹن اور تھوانگ نے اس کو دریافت کرنے کے لئے متعدد تجربے کئے، انہوں نے مختلف اشیا کی تختیاں تجاذبی کمیتوں کے درمیان رکھیں اور یہ دریافت کیا کہ "جہ" کی قیمت پر کوئی اثر نہیں ہوتا اور اگر ہوتا بھی ہو تو مقناطیسیت اور برق میں نفوذ پذیری اور نوعی ایالی گنجائش کے اثرات کی بہ نسبت بعید خفیف ہوتا ہے۔

**قوت جاذبہ اور کشش کرنے والی کمیتیں:—** نیوٹن کے کلیہ کی رو سے کشش کرنے والی کمیتوں کی نوعیت زیادہ اہمیت نہیں رکھتی، صرف کمیت کی مقدار پر، جہ کی قیمت منحصر ہوتی ہے نہ کہ جوہر کی خاصیت پر، یہ ممکن ہے کہ بعض مادہ پر، اسکی کمیت کا مقابلہ کرتے، زیادہ کشش عمل کرتی ہو اور بعض پر کم، کیونڈش کے طریقہ والے تجربوں میں جہ کی قیمت دریافت کرتے وقت، مختلف نوعیت کی اشیا تجاذبی کمیتوں کے طور پر رکھی گئی تھیں مگر جہ کی قیمت میں کوئی فرق نہیں ہوا، اسی طرح کرۂ زمین کی اوسط کثافت کی دریافت میں بھی مختلف نوعیت کی اشیا کو رکھ کر تجربے کئے گئے لیکن عملی طور پر تمام کے لئے نتیجہ ایک ہی حاصل ہوا۔

**قوت جاذبہ اور قلمی مادہ:—** اکثر صورتوں میں کسی قلمی شئے کے طبعی خواص، اسکے اندر مختلف سمتوں میں، مختلف ہوتے ہیں، مثلاً، ان میں

حرارت کی وجہ سے پھیلاؤ مختلف ہوتا ہے، اُن کی موصلیت حرارت یکساں نہیں ہوتی اور ان ہیں سے نور جب گزرتا ہے تو مختلف سمتوں میں اس کی رفتار بھی مختلف ہوتی ہے۔ اس سے ہم فوراً اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ کسی قلم میں قوت جاذبہ کے خطوط بھی مختلف سمتوں میں غیر مساوی طور پر پھیل جاتے ہیں۔ ڈاکٹر میکنزی[5] نے امریکہ میں اس ہی کی دریافت کے لئے تجربہ کیا تھا، لیکن نتیجہ کچھ حاصل نہ ہوا، کچھ دنوں بعد پوائنٹنگ اور گرے[8] نے بھی اس اثر کے معلوم کرنے کے لئے تجربے کئے۔ انہوں نے قسری اہتزاز کے نظریہ کو کام میں لانے کی کوشش اسطرح کی، کہ کوارٹز کا ایک کرہ لیکر، لٹکے ہوئے ایک دوسرے کرہ کے قریب، گھمایا۔ اگر قوت جاذبہ کے خطوط کی تقسیم کوارٹز کے مختلف محوروں پر مختلف ہو تو لٹکے ہوئے اہتزاز کرنے والے کرہ پر ایک جفت عمل کرے گا۔ اگر قسری جفت کا وقت دوران، لٹکے ہوئے نظام کے آزاد وقت دوران کے تقریباً مساوی ہو تو اسکا نتیجہ ایک بڑا اہتزاز ہوگا، لیکن تجربہ سے ایسی کوئی بات نہیں واقع ہوئی جس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ قلموں کی صورت میں بھی جہ کی قیمت میں کوئی تبدیلی نہیں واقع ہوتی۔

قوت جاذبہ اور تپش[9] :- پوائنٹنگ، فلپ اور لینڈالٹ وغیرہ نے یہ معلوم کیا کہ جہ کی قیمت پر تپش کا کوئی اثر نہیں ہوتا۔ بعد میں شا نے ۱۹۱۶ء میں تجربہ سے یہ دریافت کیا کہ جہ کی قیمت، جبکہ کشش کرنے والی کمیتیں گرم کی جاتی ہیں، کسی قدر بڑھ جاتی ہے، لیکن اسکے بعد کے نتایج سے یہ ثابت ہوتا ہے کہ صفر° م اور ۲۵۰° م کے درمیان جہ کی قیمت عملی طور پر مستقل رہتی ہے۔

نیوٹن کے کلیہ کی صحت[10] :- متعدد تجربوں سے نیوٹن کا کلیہ تجاذب ثابت ہو چکا ہے لیکن مشاہدات اور نتیجے میں کسی قدر فرق ہو تو اس کی

وجہ یہ ہے کہ کلیہ مذکور تقریباً صحیح ہے۔ اس کلیہ میں دو بڑی دقتیں پیش آتی ہیں۔ اول یہ کہ آئنسٹائین کے "نظریۂ اضافیت" کی رو سے کسی شئے کی کمیت اسکی رفتار کے ساتھ متغیر ہوتی ہے اور اس وجہ سے ہمیں شبہ یہ ہونے لگتا ہے کہ نیوٹن کے ضابطے میں درج کرنے کے لئے کونسی قیمت لینی ہوگی۔

دوم یہ کہ "فاصلے" کا مفہوم اتنا سادہ نہیں ہے جتنا کہ عام طور پر خیال کیا جاتا ہے اسکی پیمائش مشاہد کے حالات پر منحصر ہوتی ہے نظریہ اضافیت کی رو سے دو نقطوں کے درمیان فاصلہ تجربہ کرنے والے کے ساتھ متغیر ہوتا رہتا ہے۔

نیوٹن کے کلیہ کی ان دونوں خامیوں سے، مشاہدات اور واقعات کی صحیح قیمتوں کے فرق کی توضیح ہوتی ہے۔ آئنسٹائین نے اپنے نظریۂ اضافیت کی بنا پر نیوٹن کے کلیہ کی تصحیح کرنے کی کوشش کی، اس لئے اس تصحیح شدہ کلیہ کو ہم "آئنسٹائین نیوٹنی کلیہ یا اضافیتی کلیۂ تجاذب سے" موسوم کریں گے۔

نور کی شعاع بھی اپنی تیز رفتار کی وجہ سے کچھ کمیت رکھتی ہے اور اس میں جبکہ وہ کسی طاقتور تجاذبی میدان میں حرکت کر رہی ہو، انصراف کا ہونا ضروری ہے۔ ایسا انصراف اور چنانچہ مبدء نور کا اپنے مقام سے ظاہری طور پر ہٹاؤ آئنسٹائین نیوٹنی کلیہ کی مدد سے، حسابی طور پر بالکل صحیح پیمانہ پر دریافت کیا جا سکتا ہے لیکن صرف نیوٹن کے کلیہ سے نصف ہٹاؤ حاصل ہوتا ہے اسکے متعلق یہاں پر ہم اس سے زیادہ تفصیلی بحث نہیں کر سکتے اسلئے کہ تشفی صرف اس صورت میں حاصل ہو سکتی ہے جبکہ نظریہ اضافیت کا مطالعہ نہایت گہرے طور پر کیا جائے۔ یہاں البتہ اتنا کہا جا سکتا ہے کہ نیوٹن کا کلیہ "بالکل" صحیح نہیں ہے اور صرف اقل ترین فاصلوں کی صورت میں اس سے کام لیا جا سکتا ہے۔

## Chapter III.

(۱) Properties of Matter 'Poynting & Thomson" P33 (1922)
(۲) Phil Trans 141, 297, (1856)
(۳) Phil. Trans 83, 388 (1798)
(۴) General Physics for students "Edser" P207, (1926)
(۵) Phil. Trans. A. 182, 565, (1891)
(۶) Phys. Rev. 5 (1897)
(۷) Phys. Rev. 2, (1895)
(۸) Phil. Trans. 192, 245 (1899)
(۹) Properties of Matter ' Newman & Searle" P74, (1928)
(۱۰) ,, ,, ,, ,, P76 (1928)

# چوتھا باب

## لچک، مروڑ، کھچاؤ اور مرغولہ دار کمانیاں

**تعریفات :-** ایک متجانس جسم وہ ہے کہ جب دو مساوی مستطیلی ٹکڑے اُسمیں سے کاٹے جائیں اور ایک ٹکڑے کے ایسے کنارے جو دوسرے ٹکڑے کے متناظر کناروں کے متوازی ہوں تو بالکل ایک دوسرے کے مماثل ہوں اور آپس میں مطلق تمیز نہ کئے جا سکیں۔ سیسہ، موم، کوارٹز، شیشہ وغیرہ متجانس اجسام کی مثالیں ہیں۔

کوارٹز کے ایک کرہ کو اگر گرم کیا جائے تو چونکہ وہ ایک سمت میں، دوسری سمت کی نسبت زیادہ پھیلتا ہے اسوجہ سے کرہ ہیئت باقی رہتا۔ ایسے اجسام غیر متساوی السموت کہلاتے ہیں۔

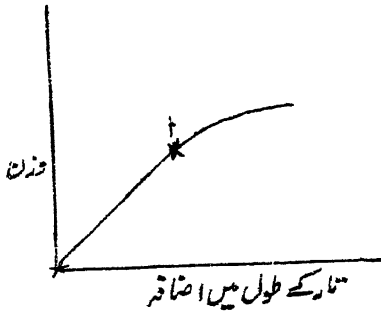
ایک ایسا جسم جس کے دو مساوی متشابہ ٹکڑے کسی وضع سے کاٹے جائیں جو بالکل مماثل اور آپس میں تمیز نہ کئے جا سکیں تو وہ متساوی السموت کہلاتا ہے، مثلاً شیشہ متساوی السموت شے ہے جب کسی جسم کی شکل یا حجم میں تبدیلی ہوتی ہے تو کہا جاتا ہے کہ اس میں بگاڑ یا فساد واقع ہو رہا ہے اور یہ تبدیلی، بگاڑ یا فساد کہلاتی ہے۔

کسی جسم کے دو خطوط جو بگاڑ کے پہلے مساوی اور متوازی تھے، بگاڑ کے بعد بھی مساوی اور متوازی ہیں تو ایسا بگاڑ "متجانس بگاڑ" کہلاتا ہے۔

ایسی تین سمتیں جو کسی جسم میں علی القوائم تھیں اور بگاڑ کے بعد بھی اگر

ایک دوسرے کے علی القوائم رہیں تو یہ بگاڑ کے صدر محوربن کہلاتے ہیں۔

ایسا بگاڑ جو کسی جسم کی شکل میں تو تبدیلی پیدا کرتا ہے لیکن جسامت کو نہیں بدلتا "جزہ" کہلاتا ہے۔ لچک دار جسم وہ ہے کہ اگر قوتوں کے اثر سے اسکی جسامت اور حجم میں تبدیلی پیدا ہو جائے تو ان قوتوں کو علیحدہ کر دینے کے بعد جسم مذکور اپنی اصلی حالت پر واپس آ جائے۔

اگر ایک تار سے ہم وزن لٹکائیں تو تار کے طول میں اضافہ ہوگا۔ اگر تار لچک دار ہو تو یہ اضافہ طول لٹکائے ہوئے وزن کے متناسب ہوگا۔ اگر وزن کو ہم بتدریج بڑھاتے جائیں تو کسی خاص کلیہ کے تحت طول میں بھی بتدریج اضافہ ہوتا جائے گا اگر وزن ایک خاص حد سے بڑھایا جائے تو ایک ایسا وقت آئے گا کہ تار کے طول میں، ایک بالکل چھوٹے وزن کے اضافہ سے بھی، انتہائی اضافہ ہونے لگے گا۔ ایسے وزن کو کہ جس کے لگانے کے بعد تار میں لچک کے خواص باقی نہ رہیں، اس تار کے "نقطہ مغلوبیت" سے تعبیر کیا جاتا ہے۔ شکل ۱ کی ترسیم کو دیکھو، نقطہ ا تک پہنچنے تک تار کامل لچک دار رہتا ہے۔

شکل ۱

نوٹ۔ یہاں ہم جو ضابطے اخذ کریں گے اور جن تجربوں کا ذکر کریں گے ان سب میں یہ فرض کر لیا جائے گا کہ جسم اپنی کامل لچک کے خواص کو برقرار رکھتا ہے۔

ہوک کا کلیہ :۔ لاطینی زبان میں جملہ "UT TENSiO SiC ViS" سے اسکی تعبیر ہوتی ہے یعنی ہم اگر کسی لچک دار چیز کو کھینچیں تو کھنچاؤ، کھینچنے

والی قوت کے متناسب ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ ہم ایک ایسا تار لیتے ہیں جس کا طول ل اور تراش عمودی کا رقبہ ا ہے۔ اگر ایک قوت ق لگانے سے تار میں کھچاؤ لَ ہو تو ہوک کا کلیہ یہی ہے کہ لَ ∝ ق ینگ نے ہوک کے کلیہ کو اس طرح بیان کیا۔

زور ∝ بگاڑ یعنی $\frac{\text{زور}}{\text{بگاڑ}}$ = گ = مستقل

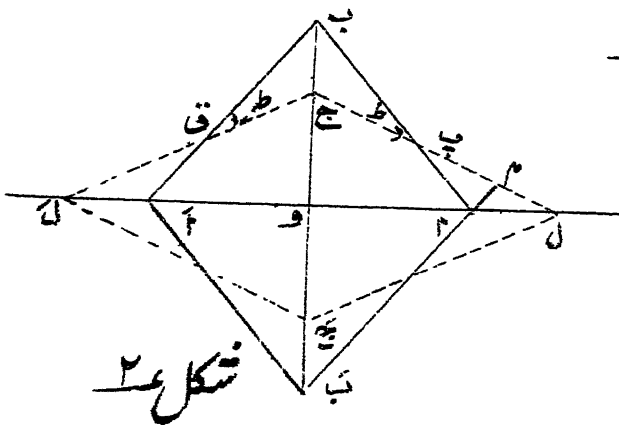
لیکن زور = $\frac{ق}{ا}$ اور بگاڑ = $\frac{لَ}{ل}$

$$\text{لہذا}\quad \frac{\frac{ق}{ا}}{\frac{لَ}{ل}} = \frac{ق\,ل}{ا\,لَ} = گ = ی \quad \text{فرض کرو}$$

اس ی کو "ینگ کے معیار لچک" سے تعبیر کیا جاتا ہے۔

بگاڑ سے پہلے کسی جسم کا جو اکائی حجم ہوتا ہے، اس حجم کی کمی اگر بگاڑ ہے تو ایسی صورت میں گ = ح جہاں ح حجمی لچک کا معیار کہلاتا ہے۔

اگر بگاڑ جزئی ہو جس کی قیمت اُس زاویہ سے ناپی جاتی ہے جو مماسی زور کی وجہ سے بنتا ہے تو گ = د جہاں د، استواری کی شرح کہلاتا ہے۔

متجانس بگاڑ جو کسی جسم کی شکل کو تو بدل دیتا ہے لیکن جسامت کو نہیں بدلتا۔[1]

شکل ۲

کسی جسم میں فرض کرو کہ و ا اور و ب وہ محور ہیں جن کی سمتوں میں

پھیلاؤ یا سکڑاؤ واقع ہوتا ہے۔

اور نیز یہ بھی فرض کرو و ا = و ب = و اَ = و بَ = ۱

یعنی بگاڑ سے پہلے فرض کرو کہ ا ب اَ بَ ایک مربع ہے بگاڑ کے بعد فرض کرو کہ مربع، ایک متوازی الاضلاع ل ج لَ جَ بن جاتا ہے۔

یہ فرض کرتے ہوئے کہ بگاڑ متجانس ہے

و ا کی سمت میں اضافہ = و ب کی سمت میں کمی

= ن (فرض کرو)

تب و ل = ۱ + ن اور و ج = ۱ − ن

چونکہ (و ل)$^{۲}$ + (و ج)$^{۲}$ = (ل ج)$^{۲}$

∴ (ل ج)$^{۲}$ = ۲ ن$^{۲}$ + ۲ ...... ≏ ۲

(۱ + ن)$^{۲}$ + (۱ − ن)$^{۲}$

۱ + ۲ن + ن$^{۲}$ + ۱ − ۲ن + ن$^{۲}$

۲ + ۲ن$^{۲}$

کیونکہ ن کی قیمت بہت ہی چھوٹی ہونے کی وجہ سے ن کے بڑے قوت نماؤں والی رقموں کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔

(ا ب)$^{۲}$ = ۱$^{۲}$ + ۱$^{۲}$ = ۲

لہذا ا ب = ل ج

اور اسی طرح اَ بَ = لَ جَ

چونکہ ا ب = $\sqrt{۲}$ = اَ بَ

∴ ابتدائی رقبہ = $\sqrt{۲}$ × $\sqrt{۲}$ = ۲

اور بگاڑ کے بعد جدید رقبہ = ل ج × ل جَ

≏ $\sqrt{۲}$ × $\sqrt{۲}$ = ۲

لہذا رقبہ یوں کہنا چاہئیے کہ جسامت میں کوئی تبدیلی نہیں واقع ہوئی۔

ل ج لَ جَ کو اگر اسطرح گھمایا جائے کہ خط ل ج، ا ب سے

منطبق ہو جائے اور ل ج کو ا ب کی سمت میں اتنا ہٹایا گیا ہے کہ ج نقطہ ب سے منطبق ہو گیا ہے۔

اس صورت میں ج ل′ ب ا′ کے ساتھ جو زاویہ بنائے گا وہ

= ∠ب ق ج + ∠ب پ ج = ۲ ط

یہی چیز اُس وقت بھی ہوتی اگر ہم ا ب کو قائم رکھتے اور جسم کے اندر کے ہر ایک نقطہ کو ا ب کے متوازی ایک مماسی قوت ف سے اتنے فاصلہ تک ہٹاتے جو ا ب کے متناسب ہوتا۔

دیکھو شکل ۳ ل ج کو ا ب کی سمت میں گھمانے اور ہٹانے کے بعد ا′ ب′ ل′ ج کا نیا مقام ہوگا۔

لہذا ∠ا′ب ا′ = عہ

= ۲ ط

زاویہ عہ جزّی زاویہ کہلاتا ہے۔

شکل ۲ میں ا م ایک ایسا خط کھینچو جو ج ل پر عمود ہو۔

چونکہ ∠ل پ ا بہت چھوٹا ہے، لہذا

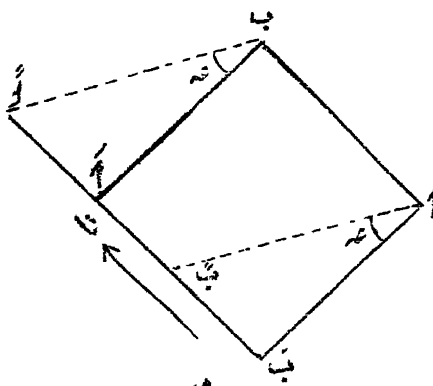
∠پ ل ا ∽ ∠پ ا و = ۴۵°

اور دائری پیمانہ میں زاویہ ط = ا م / ا پ

= ال جب ∠پ ل ا / (ا ر / ۲)

شکل ۳

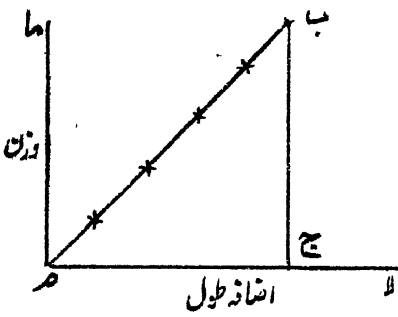
= ا ل = ن

چونکہ ا پ = ½ ا ب

لہذا جزئی زاویہ عہ = ۲ طہ = ۲ ن

کام جو بگاڑ پیدا کرنے میں صرف ہوتا ہے ⑫ :-

اگر یہ ہم فرض کرلیں کہ ہوک کا کلیہ صحیح ہے تو تار کے اضافۂ طول کی ترسیم اُس پر لگائے ہوئے متناظر اوزان کے مقابلہ میں جو آئیگی وہ شکل عہ۴ کے مطابق ہوگی۔

وزن
ب
ج
اضافہ طول
ل

شکل عہ۴

تار کو ھ سے ج تک کھینچنے میں جو کام ہوا اُس کی تعبیر مثلث ھ ج ب کے رقبہ سے ہوگی اور

یہ = ½ ھ ج × ج ب

اگر تار کی تراش عمودی کا رقبہ = ا اور تار کا طول = ل

تو زور = ج ب / ا

اور بگاڑ = ھ ج / ل

∴ کام جو ہوا = ½ × ا × ل × بگاڑ × زور

لیکن ا × ل = تار کے حجم کے

لہذا تار کے فی اکائی حجم میں توانائی = ½ × زور × بگاڑ

اگر جسم کے ذرات ایک مماسی زور سے آگے کی جانب کھینچے جائیں جیسا کہ شکل عہ۳ میں دکھایا گیا ہے اور جزئی زاویہ عہ ہو تو اس جسم کی توانائی فی اکائی حجم = ½ ت عہ اگر کسی کھینچنے والی قوت ق کی سمت میں جو اضافہ طول ہوتا ہے وہ ن فرض کیا جائے تو ن ایک ایسی سمت میں بھی گھٹاؤ ہوگا جو کھنچاؤ کی سمت کے علی القوائم ہو اور ایسی

صورت میں ق ایک ڈھکیلنے والی قوت ہوگی۔

لہذا جسم کے فی اکائی حجم کے لئے، کھنچاؤ سے جو کام ہوگا وہ

$= \frac{1}{2}$ ق × ن

لہذا جسم کے فی اکائی حجم کیلئے، ڈھکیلنے سے جو کام ہوگا وہ

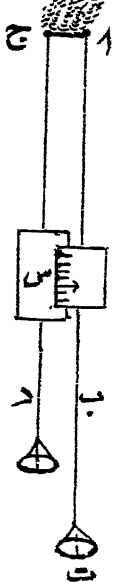
$= \frac{1}{2}$ ق × ن

لہذا مجموعی توانائی فی اکائی حجم $= \frac{1}{2}$ ق ن $+ \frac{1}{2}$ ق ن $=$ ق ن

$\therefore$ ق ن $= \frac{1}{2}$ ت عہ مگر ہم کو معلوم ہے کہ عہ $=$ ۲ ن

$\therefore$ ق $=$ ت،

اگر د $=$ استواری کی شرح تو د $= \frac{ت}{عہ} = \frac{ق}{۲ ن}$

ینگ کا معیار لچک حسب ذیل طریقہ سے دریافت کیا جاتا ہے:۔

ا ب اور ج د دو تار ہیں جو ا اور ج پر مضبوطی کے ساتھ جما دئے گئے ہیں، س ایک کسر پیما ہے۔ پہلے دونوں پلڑوں میں جسکا وزن مساوی ہوتا ہے، مساوی بانٹ رکھ دئے جاتے ہیں پھر ت پلڑے میں اضافہ وزن ک ج رکھا جاتا ہے اور کسر پیما س کے ذریعہ تار ا ب کا اضافہ طول لَ معلوم کر لیا جاتا ہے اگر ا ب کا ابتدائی طول ل معلوم ہو اور تار کے تراش عمودی کا رقبہ ا ہو تو:۔

ینگ کا معیار لچک ی $= \frac{ک ج ل}{ا لَ}$

ی کی دریافت کے دیگر طریقے آیندہ اس باب میں بیان کئے جائیں گے۔

ج ا س د ب ت

شکل ۵

آواز کی کتابوں میں یہ ثابت کیا گیا ہے کہ ر $= \sqrt{\frac{ح}{کثہ}}$

جہاں ح $=$ واسطہ کی حجمی لچک کا معیار

کثر = واسطہ کی کثافت

اور سا = آواز کی رفتار اس مادی واسطہ میں

اس سے ح کی قیمت معلوم کی جاسکتی ہے۔

کسی گیس کے لئے نیوٹن نے بائیل کے کلیہ کی مدد سے ثابت کیا تھا کہ

ح = د یعنی دباؤ کے

لیکن لاپلاس(۳) نے بعد میں یہ ثابت کر دکھایا کہ ح = لا د

جہاں لا = مستقل دباؤ کے تحت حرارت نوعی / مستقل حجم کے تحت حرارت نوعی

**پواساں کی نسبت**:۔ فرض کرو کہ ایک سلاخ جس کی تراش عمودی کا رقبہ اکائی ہے ق قوت سے کھنچی جارہی ہے اور بڑھاؤ یا طول میں اضافہ فی اکائی طول = عہ ق، جہاں عہ کوئی مستقل ہے

سلاخ جیسی جیسی کھنچتی جائے گی اسکے تراش عمودی کا رقبہ بھی کم ہوتا جائیگا۔

فرض کرو کہ سلاخ کی موٹائی میں فی اکائی طول کمی = بہ ق = گھٹاؤ،

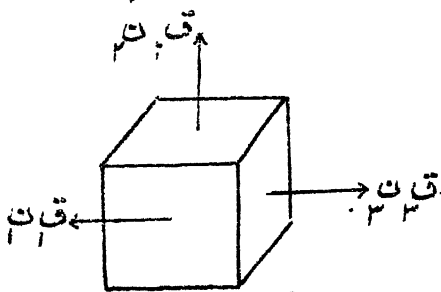
جہاں بہ کوئی مستقل ہے۔

تب بہ ق / عہ ق = بہ / عہ، اس نسبت کو پواسان کی نسبت سے تعبیر کیا جاتا ہے۔

پواسان کی نسبت مختلف دھاتوں کے لئے مختلف ہوتی ہے۔

ایک مکعب کی شکل میں

ق ن۲ ، ق ن۳ ، ق ن۱

شکل ع۶

**تبدیلی**:۔ فرض کرو کہ شکل ع۶ میں جو مکعب دکھایا گیا ہے اسکے ہر ایک ضلع کا طول اکائی ہے۔

فرض کرو کہ $\text{ق}_1$، $\text{ق}_2$، $\text{ق}_3$ قوتیں فی اکائی رقبہ مکعب کے ضلع کے دونوں جانب علی الترتیب لا، ما، یا کی سمتوں میں عمل کر رہی ہیں اور فرض کرو کہ $\text{ن}_1$، $\text{ن}_2$، $\text{ن}_3$ کھنچاؤ یا اضافہ لا، ما، یا کی سمتوں میں ہوتا ہے۔

چونکہ مکعب کا ابتدائی حجم = ۱

اور بعد میں اسی مکعب کا حجم $= (1 + \text{ن}_1)(1 + \text{ن}_2)(1 + \text{ن}_3)$

$= 1 + \text{ن}_1 + \text{ن}_2 + \text{ن}_3$ جبکہ $\text{ن}_1$، $\text{ن}_2$ اور $\text{ن}_3$ کی قیمتیں بالکل چھوٹی ہوں۔

لہذا اضافۂ حجم $= \text{ن}_1 + \text{ن}_2 + \text{ن}_3$

= اضافہ طول فی اکائی طول لا کی سمت میں + اضافہ طول فی اکائی طول ما کی سمت میں + اضافہ طول فی اکائی طول یا کی سمت میں

اب اگر $\text{ق}_1$ کی سمت میں کھنچاؤ اور $\text{ق}_2$ اور $\text{ق}_3$ کی سمت میں گھٹاؤ واقع ہو

تو $\text{ن}_1 = \text{ع}\,\text{ق}_1 - \text{بہ}\,\text{ق}_2 - \text{بہ}\,\text{ق}_3$

$= \text{ع}\,\text{ق}_1 - \text{بہ}\,(\text{ق}_2 + \text{ق}_3)$

اور اسیطرح $\text{ن}_2 = \text{ع}\,\text{ق}_2 - \text{بہ}\,\text{ق}_1 - \text{بہ}\,\text{ق}_3$

$= \text{ع}\,\text{ق}_2 - \text{بہ}\,(\text{ق}_1 + \text{ق}_3)$ ......... (۱)

اور $\text{ن}_3 = \text{ع}\,\text{ق}_3 - \text{بہ}\,\text{ق}_1 - \text{بہ}\,\text{ق}_2$

$= \text{ع}\,\text{ق}_3 - \text{بہ}\,(\text{ق}_1 + \text{ق}_2)$

اگر $\text{ق}_1 = \text{ق}_2 = \text{ق}_3$ تو $\text{ن}_1 = \text{ن}_2 = \text{ن}_3$

$\therefore \text{ن} = \text{ع}\,\text{ق} - 2\,\text{بہ}\,\text{ق}$

کھنچاؤ یا گھٹاؤ فی اکائی حجم میں اور اضافہ دباؤ فی اکائی رقبہ میں جو نسبت ہوتی ہے وہ پچکاؤ کی شرح کہلاتی ہے اور اسکے مقلوب یعنی $\frac{1}{\text{پچکاؤ کی شرح}}$

کو حجمی لچک کے معیار سے تعبیر کیا جاتا ہے۔

یعنی اگر $\text{ن}_1 = \text{ن}_2 = \text{ن}_3$ اور $\text{ق}_1 = \text{ق}_2 = \text{ق}_3$

$$\text{تو پچکاؤ کی شرح} = \frac{\text{کھنچاؤ یا گھٹاؤ فی اکائی حجم}}{\text{کھینچنے والا زور یا دباؤ فی اکائی رقبہ}} = \frac{3\,\text{ن}_1}{\text{ق}_1}$$

اسلئے، حجمی لچک کا معیار اگر ح فرض کیا جائے تو:-

$$\text{ح} = \left[\frac{\text{ق}_1}{3\,\text{ن}_1}\right] = \frac{\text{ق}_1}{3(\text{عہ}\,\text{ق}_1 - 2\,\text{بہ}\,\text{ق}_1)}$$

$$= \frac{1}{3(\text{عہ} - 2\,\text{بہ})}$$ بشرطیکہ $\text{ق}_1 = \text{ق}_2 = \text{ق}_3$

اور $\text{ن}_1 = \text{ن}_2 = \text{ن}_3$

اب فرض کرو کہ $\text{ق}_1 = -\text{ق}_2$ اور $\text{ق}_3 =$ صفر یعنی $\text{ن}_1 = -\text{ن}_2$ اور $\text{ن}_3 =$ صفر

تب $\text{ن}_1 = \text{عہ}\,\text{ق}_1 + \text{بہ}\,\text{ق}_1 = \text{ق}_1(\text{عہ} + \text{بہ})$

لیکن استواری کا معیار $= \left[\frac{\text{ق}_1}{2\,\text{ن}_1}\right] =$ فرض کرو د

$$= \frac{\text{ق}_1}{2\,\text{ق}_1(\text{عہ} + \text{بہ})}$$

$$= \frac{1}{2(\text{عہ} + \text{بہ})}$$ بشرطیکہ $\text{ق}_1 = -\text{ق}_2$ اور $\text{ق}_3 =$ صفر

اور ینگ کا معیار لچک ی $= \frac{\text{ق}_1}{\text{ن}_1} = \frac{1}{\text{عہ}}$ بشرطیکہ $\text{ق}_2 = \text{ق}_3 =$ صفر

ح اور د کی اوپر والی مساواتوں کی مدد سے ہم عہ اور بہ کی قیمتیں معلوم کرسکتے ہیں۔

اُن مساواتوں کو حل کرنے سے $\text{عہ} = \frac{\text{۳ح + د}}{\text{۹ ح د}}$ اور $\text{بہ} = \frac{\text{۳ح − ۲د}}{\text{۱۸ ح د}}$

حاصل ہوتے ہیں۔

$$\therefore \text{ی} = \frac{1}{\text{عہ}} = \frac{\text{۹ ح د}}{\text{۳ح + د}}$$ اور پواسان کی نسبت $\frac{\text{بہ}}{\text{عہ}}$

$= \frac{\text{۳ح − ۲د}}{\text{۲(۳ح + د)}}$ حاصل ہوگی۔ $=$ مہ فرض کرو

اب چونکہ $\text{ی} = \frac{\text{۹ ح د}}{\text{۳ح + د}}$

$$\therefore \text{۳ح ی + د ی = ۹ ح د}$$

یعنے $\text{ح(۹د − ۳ی) = دی} \quad \therefore \text{ح} = \frac{\text{دی}}{\text{۹د − ۳ی}} = \frac{\text{دی}}{\text{۳(۳د − ی)}}$

$$\therefore \text{مہ} = \frac{\text{۳ح − ۲د}}{\text{۲(۳ح + د)}} = \frac{\left(\frac{\text{۳دی}}{\text{۳(۳د − ی)}} - \text{۲د}\right)}{\text{۲}\left(\frac{\text{۳دی}}{\text{۳(۳د − ی)}} + \text{د}\right)}$$

$$= \frac{\text{ی}}{\text{۲د}} - 1 \quad \text{.................. (۲)}$$

پھر چونکہ $\text{مہ} = \frac{\text{۳ح − ۲د}}{\text{۲(۳ح + د)}}$

اسلئے $\text{۲مہ(۳ح + د) = ۳ح − ۲د}$

یعنی $\text{۳ح(۱ − ۲مہ) = ۲د(مہ + ۱)}$

$\therefore$ مہ کی قیمت کو $-1$ اور $\frac{1}{2}$ کے درمیان ہونا چاہیئے۔

اب شکل ۱۶ پر غور کرو۔ ق۱، ن۱ کے متناسب ہے اور دوسری دو سمتوں میں وہ ن۲ اور ن۳ کے متناسب ہے۔

$$\therefore \text{ق}_1 = \text{ک ن}_1 + \text{گ (ن}_2 + \text{ن}_3)$$

اسیطرح ق۲ = ک ن۲ + گ (ن۱ + ن۳)
اور ق۳ = ک ن۳ + گ (ن۱ + ن۲) جہاں ک اور گ مستقل ہیں ... (۳)

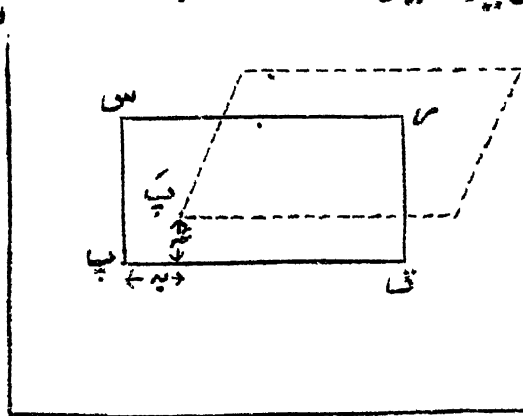
اگر ن۲ = ن۳ = صفر تو ق۱ / ن۱ = ک = ی

اگر ن۱ = ن۲ = ن۳ تو ق۱ / ۳ن۱ = ح = (ک + ۲گ) / ۳

اور اگر ن۱ = − ن۲ اور ن۳ = صفر تو ق۱ / ۲ن۱ = د = (ک − گ) / ۲

اوپر کی آخری دو مساواتوں کو حل کرنے سے :-

ک = ح + ۴/۳ د اور گ = ح − ۲/۳ د

**ایک مستطیلی حصہ کی شکل میں تبدیلی :-** فرض کرو کہ پ ق ر س سے کسی شے کے ایک چھوٹے مستطیل ٹکڑے کی تعبیر ہوتی ہے۔ (دیکھو شکل ۷) نقطہ پ کے محدد فرض کرو کہ لا، ما ہیں اور نقطہ ر کے (لا + لا٬، ما + ما٬) ہیں اس صورت میں پ ق = لا٬ اور ق ر = ما٬

شکل ۷

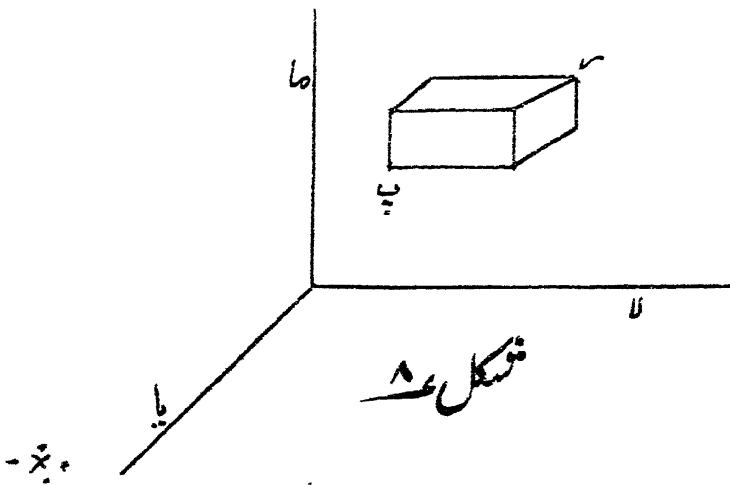
فرض کرو کہ نقطہ پ کا نقل مکان، بگاڑ کی وجہ سے (عہ، بہ) ہوتا ہے
تب نقطہ ق کا نقل مکان (عہ + فرعہ/فرلا . لا٬، بہ + فربہ/فرلا . لا٬) ہوگا

اسی طرح نقطہ س کا نقل مکان = (عہ + فرعہ/فرما . ما٬، بہ + فربہ/فرما . ما٬)

اور نقطہ س کا نقل مکان = $(\text{عہ} + \frac{\text{فرعہ}}{\text{فرلا}} . \text{لا} + \frac{\text{فرعہ}}{\text{فرما}} . \text{ما}$ ،

$\text{بہ} + \frac{\text{فربہ}}{\text{فرما}} \text{ما} + \frac{\text{فربہ}}{\text{فرلا}} . \text{لا})$

سہ ابعادی حالت میں فرض کرو کہ س کے جدید محدد، پ کا لحاظ کرتے لاَ ، ماَ ، یاَ ہیں اور تینوں سمتوں میں س کا نقل مکان علی الترتیب عہَ ، بہَ ، جہَ ہے۔

شکل ۸

$$\text{عہَ} = \text{عہ} + \frac{\text{فرعہ}}{\text{فرلا}} \text{لا} + \frac{\text{فرعہ}}{\text{فرما}} . \text{ما} + \frac{\text{فرعہ}}{\text{فریا}} . \text{یا}$$

$$\text{بہَ} = \text{بہ} + \frac{\text{فربہ}}{\text{فرما}} \text{ما} + \frac{\text{فربہ}}{\text{فرلا}} . \text{لا} + \frac{\text{فربہ}}{\text{فریا}} \text{یا}$$

$$\text{جہَ} = \text{جہ} + \frac{\text{فرجہ}}{\text{فریا}} . \text{یا} + \frac{\text{فرجہ}}{\text{فرلا}} . \text{لا} + \frac{\text{فرجہ}}{\text{فرما}} \text{ما}$$

$$\therefore \text{لاَ} = \text{لا} + \text{عہَ} - \text{عہ} = \text{لا} (۱ + \frac{\text{فرعہ}}{\text{فرلا}}) + \frac{\text{فرعہ}}{\text{فرما}} . \text{ما} + \frac{\text{فرعہ}}{\text{فریا}} . \text{یا}$$

$$\text{ماَ} = \text{ما} + \text{بہَ} - \text{بہ} = \frac{\text{فربہ}}{\text{فرلا}} . \text{لا} + \text{ما} (۱ + \frac{\text{فربہ}}{\text{فرما}}) + \frac{\text{فربہ}}{\text{فریا}} . \text{یا}$$

$$\text{یاَ} = \text{یا} + \text{جہَ} - \text{جہ} = \frac{\text{فرجہ}}{\text{فرلا}} . \text{لا} + \frac{\text{فرجہ}}{\text{فرما}} . \text{ما} + \text{یا} (۱ + \frac{\text{فرجہ}}{\text{فربا}})$$

خالص متجانس بگاڑ اگر واقع ہو رہا ہو تو
بگاڑ کے صدر محور اسی سمت میں برقرار رہتے ہیں لہذا

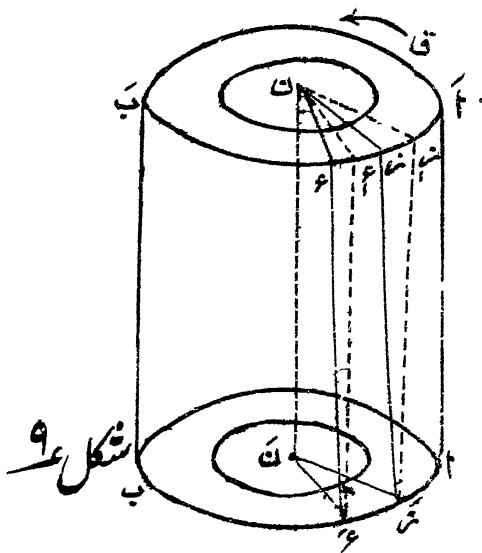
$$\left.\begin{array}{l} \frac{\text{فرعہ}}{\text{فرما}} = \frac{\text{فرعہ}}{\text{فریا}} = \text{صفر} \\ \frac{\text{فربہ}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{فربہ}}{\text{فریا}} = \text{صفر} \\ \frac{\text{فرجہ}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{فرجہ}}{\text{فرما}} = \text{صفر} \end{array}\right\}$$

بعض نسبت تیر

$$\therefore \text{لاَ} = \text{لا}\left(1 + \frac{\text{فرعہ}}{\text{فرلا}}\right) = \text{لا}\left(1 + \text{ن}_1\right)$$

$$\text{ماَ} = \text{ما}\left(1 + \frac{\text{فربہ}}{\text{فرما}}\right) = \text{ما}\left(1 + \text{ن}_2\right)$$

$$\text{اور یاَ} = \text{یا}\left(1 + \frac{\text{فرجہ}}{\text{فریا}}\right) = \text{یا}\left(1 + \text{ن}_3\right)$$

جہاں $\text{ن}_1$، $\text{ن}_2$، $\text{ن}_3$ لا، ما اور یا سمتوں میں اضافہ طول کو
علی الترتیب تعبیر کرتے ہیں۔
ٹھوس اسطوانہ کی مروڑ ۔ شکل ۹ میں ایک اسطوانہ دکھلایا گیا ہے۔

شکل ۹

فرض کرو کہ اس اسطوانے
کا طول ل اور اسکا محور
ن نَ ہے، اسکی اوپر والی
سطح کے کنارہ پر دو نقطے
جو ایک دوسرے سے قریب
ہوں ع اور شا ہوں اور
نچلے رخ کی سطح پر بھی
دو نقطے عَ اور شَ اسی

طرح لو۔ فرض کرو کہ اسطوانہ کا نچلا حصہ اب مضبوطی کے ساتھ جکڑ دیا گیا ہے اور اوپر کے حصہ میں دائری وضع میں ایک جفت عمل کر رہا ہے۔

فرض کرو کہ اسطوانہ مروڑ کی وجہ سے زاویہ عہ مروڑا جاتا ہے، یعنی بالفاظ دیگر، فرض کرو کہ اسطوانہ میں مروڑ = عہ

اب اس اسطوانہ کے حصہ ع ن نَ عَ پر غور کرو۔ نقاط ع ن، اب، ع۱ ن۱ پر آ گئے ہیں۔

لیکن نَ عَ وہیں اپنی پہلی وضع میں قائم ہیں۔

زاویہ مروڑ عہ = ∠ع ن ع۱ = ∠ن نَ ن۱

اور ع ع۱ = ص عہ جہاں ص = اسطوانہ کا نصف قطر

اور ∠ع عَ ع۱ = $\frac{\text{ص عہ}}{\text{ل}}$

فرض کرو کہ مروڑی قوت = س فی اکائی رقبہ = زور

چونکہ $\frac{\text{زور}}{\text{بگاڑ}}$ = استواری کا معیار د

∴ زور = س = د × بگاڑ = د × $\frac{\text{ص عہ}}{\text{ل}}$

فرض کرو کہ ع کے اطراف کے ایک چھوٹے ٹکڑے کا رقبہ = ا

لہذا مماسی قوت = $\frac{\text{د ص عہ}}{\text{ل}}$ . ا

لہذا محور کے گرد قوتوں کا معیار اثر = $\frac{\text{د ص عہ}}{\text{ل}}$ ا ص = $\frac{\text{د عہ ا ص}^2}{\text{ل}}$

تمام چھوٹے چھوٹے ٹکڑوں کے معیار اثر کا مجموعہ محور کے گرد =

= $\frac{\text{د عہ}}{\text{ل}}$ . $\sum$ ا ص$^2$

لیکن $\sum$ ا ص$^2$ قطبی جمود کا معیار اثر کہلاتا ہے جو فرض کرو = مج

∴ قوتوں کے اثری معیاروں کا مجموعہ = جفت = ق = $\frac{\text{د عہ}}{\text{ل}}$ . مج

لیکن کسی اسطوانے کا مج اسکے محور کے گرد = $\frac{\pi \text{ ص}^4}{2}$

∴ ق = $\frac{\text{د عہ}}{\text{ل}}$ . $\frac{\pi \text{ ص}^4}{2}$ ........ (۴)

اگر ٹھوس سلاخ کی بجائے ہم ایک موٹی نلی لیں جس کے اندرونی اور بیرونی نصف قطر علی الترتیب ص۱ اور ص۲ ہوں تو اس کو زاویہ عہ میں مروڑنے کے لئے جو جفت ق درکار ہوگا وہ حسب ذیل ہے :-

$$\text{ق} = \frac{\text{د عہ}}{\text{ل}} \cdot \pi \left( \frac{\text{ص}_2^4 - \text{ص}_1^4}{2} \right)$$

اور اسطوانہ کو کسی زاویہ عہ میں مروڑنے کے لئے جو کام مطلوب ہوگا وہ $= \frac{1}{2}\,\text{ق} \times \text{عہ}$ اسکو ثابت کرنیکا طریقہ بالکل اسی طرح کا ہے جیسا کہ کسی تار میں بگاڑ کی صورت میں پہلے سجھایا گیا ہے۔

لہٰذا کام جو کیا گیا یا ایک ٹھوس مروڑی ہوئی سلاخ کی صورت میں توانائی $= \frac{1}{4} \cdot \frac{\text{د عہ}^2 \, \pi \, \text{ص}^4}{\text{ل}}$ اس ٹھوس اسطوانہ کے بجائے فرض کرو کہ ایک تار جس کا طول ل اور نصف قطر ص ہے ایک سرے پر جکڑ دیا گیا ہے اور اسکا دوسرا سرا مروڑا جا رہا ہے۔

$$\text{تب جفت} = \text{ق} = \frac{\text{د عہ}}{\text{ل}} \cdot \frac{\pi \, \text{ص}^4}{2} = \text{ٹہ عہ}$$

[جہاں ٹہ = پیچیدگی کا معیاری اکائی زاویہ]

$\therefore \text{ٹہ} = \frac{\text{د} \, \pi \, \text{ص}^4}{2\text{ل}}$ ، اسطرح ٹہ کی قیمت معلوم کی جا سکتی ہے۔

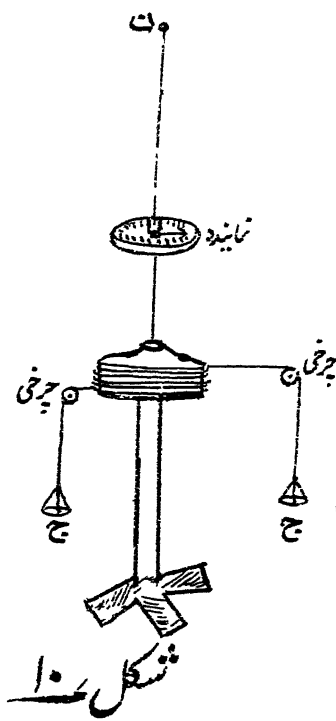
$$\text{اور د} = \frac{2\,\text{ق ل}}{\text{عہ} \, \pi \, \text{ص}^4}$$

اسکے ذریعے ہم د کی تعریف کر سکتے ہیں۔

استواری کا معیار $= \frac{2\,\text{ق}}{\text{عہ}}$ بشرطیکہ اسطوانہ کا طول اکائی اور تراش عمودی کا رقبہ بھی اکائی ہو۔

**د کی دریافت کا طریقہ :-** ج ج ترازو کے دو پلڑے ایک ڈوری کے ذریعہ جو ایک اسطوانہ پر لپیٹ دی

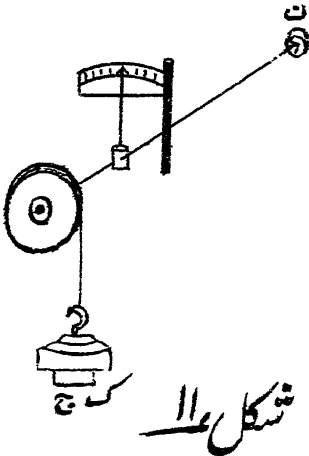
شکل ۱۰

شکل ۱۱

جاتی ہے (شکل ۱۰) لٹکائے جاتے ہیں،
یہ اسطوانہ تار کے نچلے سرے پر نصب کیا
جاتا ہے۔ تار کے ایک حصہ پر نمایندہ
لگا دیا جاتا ہے جس کی مدد سے پیمانہ پر
مروڑ کا زاویہ عہ پڑھا جا سکتا ہے۔

تار کے اوپر کا سرا اس طرح جما دیا گیا
ہے کہ وہ گھوم نہ سکے۔ صرف نچلا سرا
ج ج میں وزن رکھنے سے گھوم سکتا
ہے۔ تجربہ میں دونوں پلڑوں میں مساوی
وزن ک ج رکھے جاتے ہیں اور زاویہ
عہ پڑھ لیا جاتا ہے۔

چونکہ دونوں طرف ہر ایک وزن
ک ج ہے، اسلئے جفت = ۲ ک ج ف

$$= \frac{د\ عہ}{ل} \cdot \frac{\pi\ ص^4}{2}$$

جہاں ف اس اسطوانہ کا نصف قطر ہے۔

د معلوم کرنے کا دوسرا طریقہ:۔
ایک دائری وضع کی سلاخ کا ایک
سرا ت پر جما دیا جاتا ہے اور
دوسرا سرا۔ ایک پہیئے کے مرکز پر
قائم کیا جاتا ہے (شکل ۱۱) پہیئے
کے گرد مضبوطی کے ساتھ ایک
ڈوری ثابت کردی جاتی ہے اور

اس ڈوری کے دوسرے سرے پر وزن ک ج لٹکا کر پہیہ جو زاویہ عہ گھومتا ہے پیمانہ پر نمایندہ کے ذریعہ پڑھ لیا جاتا ہے۔ چونکہ یہاں صرف ایک ہی وزن ہے، اسلئے جفت = ک ج ف، جہاں ف پہیہ کا نصف قطر ہے۔

$$\therefore \text{ک ج ف} = \frac{\text{د عہ}}{\text{ل}} \cdot \frac{\pi\,\text{ص}^4}{2}$$

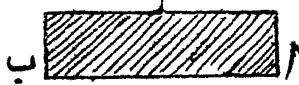
اس سے د کی قیمت دریافت ہو جاتی ہے۔

**یادداشت:-** تجربہ میں اس امر کو یاد رکھنا ضروری ہے کہ زاویہ عہ کی قیمت دائری پیمانہ میں ہوتی ہے۔ اس لئے ضروری ہے کہ اگر دائری پیمانہ میں تبدیل کرنا ہو تو درجوں کو $\frac{\pi}{180}$ سے ضرب دیا جائے۔

**د معلوم کرنے کا تیسرا طریقہ:-** ا ب ایک یکساں وضع کی سلاخ ہے جو ایک تار کے نچلے سرے سے آویزاں کی گئی ہے۔ دیکھو شکل ۱۲۔ تار کا اوپر کا سرا ثابت کر دیا جاتا ہے اور نچلا سرا سلاخ کے بیچ حصہ سے جوڑ دیا گیا ہے۔ اگر سلاخ کو دائری وضع میں اہتزاز میں لایا جائے اور اس کا وقت دوران دریافت کر لیا جائے تو تار کی استواری کا معیار دریافت کیا جا سکتا ہے۔

فرض کرو کہ کسی آن میں ا ب اپنی پہلی وضع سے زاویہ عہ گھومتا ہے۔

$$\text{تو جفت} = \text{مج}\,\frac{\text{فر}^2\,\text{عہ}}{\text{فر و}^2} = \text{ک ف}^2\,\frac{\text{فر}^2\,\text{عہ}}{\text{فر و}^2}$$

$$= \frac{\text{د عہ}}{\text{ل}} \cdot \frac{\pi\,\text{ص}^4}{2}$$

جہاں ف = سلاخ کا گردشی نصف قطر اور ک

ب ا

شکل ۱۲

= سلاخ کی کمیت

$$\therefore \frac{فر^2 عہ}{فر و^2} = \frac{د عہ}{ل ک ف^2} \cdot \frac{\pi ص^4}{2}$$

سلاخ کے بجائے ایک قرص بھی استعمال کیا جا سکتا ہے۔ قرص کو دائری وضع میں اہتزاز کرنے دو۔ قرص کا مج اس کے مرکز میں سے گزرنے والے محور کے گرد = $\frac{م ص^2}{2}$ جہاں م = کمیت اور ص = نصف قطر

چونکہ یہ سادہ موسیقی حرکت ہے لہذا وقت دوران

$$و = 2\pi \sqrt{\frac{2 ک ل ف^2}{د \pi ص^4}} \quad ......... (۵)$$

اس سے د کی قیمت معلوم ہو جاتی ہے۔

اگر سلاخ اسطوانی وضع کی ہو تو ک $ف^2$ = مج

= ک $\left(\frac{ل_1^2}{12} + \frac{ص_1^2}{4}\right)$ جہاں $ص_1$ = سلاخ کا نصف قطر

اور $ل_1$ = سلاخ کا طول

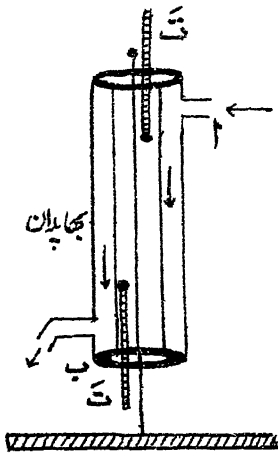
اگر سلاخ مستطیلی شکل کی ہو تو

مج = ک $\frac{(ل_1^2 + ل_2^2)}{12}$ جہاں $ل_1$ = اس سلاخ کا طول

اور $ل_2$ = 〃 〃 عرض

ی، د اور ح میں تپش کی تبدیلی کی وجہ سے اچھی خاصی تبدیلی ہو جاتی ہے اس دوران تجربہ میں تپش کا مستقل رکھنا ضروری ہے۔ ی اور د میں گھٹاؤ، اضافۂ تپش کی وجہ سے ہوتا ہے۔ د میں تپش کے لحاظ سے جو تبدیلی ہوتی ہے وہ حسب ذیل مساوات سے ظاہر ہے

$د_ت = د_0 (۱ - عہ ت)$ جہاں $د_ت$ = استواری کا معیار ت° مئی پر اور $د_0$ = استواری کا معیار صفر درجہ مئی پر

عہ = استواری کے معیار کی تپش کی قدر

شکل ۱۳

عہ کی قیمت معلوم کرنا ہو تو $و_{ت}$ کی قیمت تپش $ت_1$ پر اور $و_{ت_2}$ کی قیمت تپش $ت_2$ پر معلوم کی جاتی ہے۔ شکل ۱۳ میں ا ب ایک نلی ہے جسکے درمیان سے تار گزرتا ہے، ا میں سے بھاپ داخل ہوتی ہے اور ب سے باہر نکل جاتی ہے۔ تَ اور تَ دو تپش پیما ہیں جن کے مدد سے تار کی اوسط تپش معلوم کی جاسکتی ہے۔

$و_{ت_1}^2 = \frac{ن}{د_{ت_1}}$ جہاں ن مستقل ہے جو کہ مساوی ہے $\frac{8\pi^2 ک ل ف^2}{\pi ص^4}$

اور $و_{ت_2}^2 = \frac{ن}{د_{ت_2}}$

$$\therefore \frac{د_{ت_1}}{د_{ت_2}} = \frac{و_{ت_2}^2}{و_{ت_1}^2} = \left\{ 1 - عه (ت_1 - ت_2) \right\}$$

$$\therefore عه = \frac{\left(1 - \frac{و_{ت_1}^2}{و_{ت_2}^2}\right)}{(ت_1 - ت_2)}$$

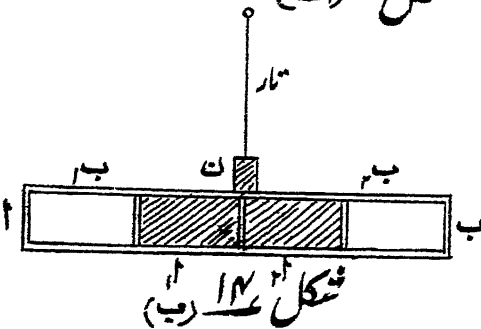
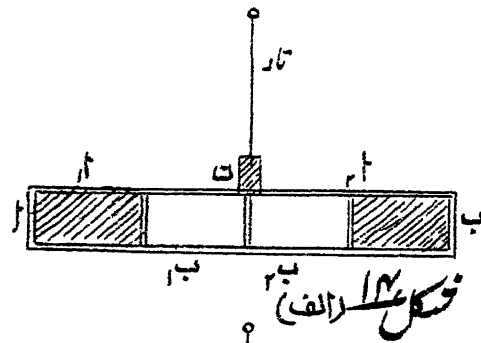
اوپر جو استواری کی دریافت کے طریقے بیان کئے گئے ہیں ان میں یہ اعتراض ہو سکتا ہے کہ چونکہ ص کی قوت چار ہے اس لئے اسکی دریافت میں ذراسی بھی غلطی، د کی صحیح قیمت میں بہت بڑے فرق کا باعث ہو جاتی ہے۔ جب تک اس سلاخ کا مادّہ جو تجربہ میں استعمال کی جاتی ہے متجانس نہ ہو، د کی قیمت حاصل کرنے کے لئے ضابطہ کا استعمال صحیح

نہیں ہوگا۔ عملاً سلاخ متجانس نہیں ہوتی۔

نکل کے لئے، ینگ کے معیار لچک کی تپشی قدر کو پروفیسر ہیریسن نے دریافت کیا۔ اس نے نکل کے تار کو برقی طریقے سے گرم کرکے تپش کو تار کی مزاحمت کی رقوم میں، کیلنڈر اور گریفتھ کے پل سے معلوم کیا۔ تپش کو مستقل رکھ کر تناؤ تار میں پیدا کیا گیا اور طول میں اضافہ ناپ لیا گیا۔ ۹۰۰° مئی کی تپش تک اس نے تجربہ کیا اور اس کے بعد اس نے ایک منحنی کھینچا جس میں ینگ کے معیار لچک اور تپش کا تعلق بتایا گیا تھا۔ اس منحنی سے یہ نتیجہ نکلا کہ تپش کے اضافہ سے ینگ کے معیار لچک میں کمی واقع ہوتی ہے۔

**میکسول کی سوئی :-** شکل ۱۴ میں ا ب ایک کھوکھلی اسطوانہ نما سلاخ ہے جسکا طول فرض کرو ط کے مساوی ہے اسکا اصول وہی ہے جو پہلے بیان ہوچکا ہے۔ اگر اس کھوکھلی سلاخ ا ب کے جمود کا معیار اثر صحیح طور پر دریافت کرلیا جائے تو وقت دوران معلوم ہوسکتا ہے اور آسانی کے ساتھ د یعنی استواری کا معیار دریافت کیا جاسکتا ہے، لیکن پیچوں، آئینہ وغیرہ کی موجودگی سے جسکو شکل میں ن سے ظاہر کیا گیا ہے کھوکھلے استوانہ کا صحیح جمود کا معیار اثر نہیں معلوم ہوسکتا بلکہ اسکی قیمت کچھ بڑھ جاتی ہے

شکل ۱۴ (الف)

شکل ۱۴ (ب)

جس کی وجہ سے تجربہ میں خطا عائد ہوتی ہے۔

میکسول نے ن کی وجہ سے جو خطا ہوتی ہے اس کی صحت کے لئے کھوکھلے اسطوانہ ۲ ب کے جمود کے معیار اثر کو حسب ذیل تفریق کے عمل سے ساقط کر دیا۔ اگر ن کا صحیح جمود کا معیار اثر ہم کو معلوم ہو جائے تو پھر ا ب کے جمود کے معیار اثر کو ساقط کرنے کی ضرورت نہیں رہتی۔

شکل میں $ا_۱$ $ا_۲$ پیتل کے دو ٹھوس اسطوانے اور $ب_۱$ $ب_۲$ پیتل کے دو کھوکھلے اسطوانے ہیں۔ ان میں سے ہر ایک کا طول = $\frac{ط}{۴}$ اور یہ اسطوانہ ۲ ب میں آسانی کیساتھ ٹھیک بٹھائے جا سکتے ہیں۔

تجربہ میں شکل ۱۴ (الف) کی طرح ٹھوس اسطوانے $ا_۱$ $ا_۲$ کو ا ب کے بیرونی حصہ میں رکھا جاتا ہے۔ اور $ب_۱$ $ب_۲$ کو اندرونی حصہ میں۔ اس کے بعد ۲ ب کو اہتزاز میں لا کر ن سے منعکس شعاع اور دوربین وغیرہ کی مدد سے وقت دوران $و_۱$ دریافت کر لیا جاتا ہے اور پھر کھوکھلے اسطوانہ $ب_۱$ $ب_۲$ کو ۲ ب کے بیرونی حصہ میں اور $ا_۱$ $ا_۲$ کو اندرونی حصہ میں (جیسا کہ شکل ۱۴ (ب) میں دکھلایا گیا ہے) رکھ کر اس صورت میں وقت دوران $و_۲$ معلوم کر لیا جاتا ہے۔ $ا_۱$ یا $ا_۲$ کی کمیت $ک_۱$ معلوم کر لی جاتی ہے اور اسی طرح کھوکھلے اسطوانہ $ب_۱$ یا $ب_۲$ کی کمیت $ک_۲$ بھی دریافت کر لی جاتی ہے۔

فرض کرو کہ کھوکھلے اسطوانہ ۲ ب کے جمود کا معیار اثر اس محور کے گرد جو تار کا خود محور ہے = مج اور $ا_۱$ یا $ا_۲$ کے جمود کا معیار اثر ایسے محور کے گرد جو اس کے مرکز ثقل میں سے گزر رہا ہو اور تار کے محور کے متوازی ہو = $مج_۱$ اور $ب_۱$ یا $ب_۲$ کے جمود کا معیار اثر اسی طرح کے محور کے گرد = $مج_۲$

لہذا متوازی محوروں کے اصول سے اگر شکل ۱۴ (الف) کی طرح $ا_۱$ اور $ا_۲$

ہوں تو $ا_۱$ یا $ا_۲$ کے جمود کا معیار اثر تار کے محور کے گرد فرض کرو = $\bar{مج}_۱$

$= مج_۱ + ک_۱ \left(\frac{ط}{۲} + \frac{ط}{۸}\right)^۲$

$= مج_۱ + ک_۱ \left(\frac{۳ط}{۸}\right)^۲$

∴ $ا_۱$ اور $ا_۲$ دونوں اسطوانوں کے جمود کا معیار اثر تار کے محور کے گرد

$= ۲\,\bar{مج} = ۲\,مج_۱ + ۲\,ک_۱ \left(\frac{۳ط}{۸}\right)^۲$

اور اسی شکل ۱۴(الف) میں متوازی محوروں کے اصول سے $ب_۱$ یا $ب_۲$ کے جمود کا معیار اثر تار کے محور کے گرد = $\bar{مج}_۲$ فرض کرو

$= مج_۲ + ک_۲ \left(\frac{ط}{۸}\right)^۲$

∴ $ب_۱$ اور $ب_۲$ دونوں کے جمود کا معیار اثر تار کے محور کے گرد $= ۲\,\bar{مج}_۲$

$= ۲\,مج_۲ + ۲\,ک_۲ \left(\frac{ط}{۸}\right)^۲$

شکل ۱۴(الف) کی وضع کے لئے اگر مجموعہ کے جمود کا معیار اثر تار کے محور کے گرد = $\bar{مج}$

تو $\bar{مج} = مج + ۲\,\bar{مج}_۱ + ۲\,\bar{مج}_۲ + \underline{مج} = مج + ۲\,مج_۱ +$
$+ ۲\,ک_۱ \left(\frac{۳ط}{۸}\right)^۲ + ۲\,مج_۲ + ۲\,ک_۲ \left(\frac{ط}{۸}\right)^۲ + \underline{مج}$ ............................. (۶)

جہاں $\underline{مج}$ = فرض کرو ن کے جمود کا معیار اثر تار کے محور کے گرد

اور اس صورت میں وقت دوران $و_۱ = ۲\pi \sqrt{\frac{\bar{مج}}{\text{ثہ}}}$ ........... (۷)

جہاں ثہ = پیچیدگی کا جفت فی اکائی زاویہ

اب شکل ۱۴(ب) پر غور کرو

اس صورت میں بھی متوازی محوروں کے اصول سے $ا_۱$ یا $ا_۲$ کے جمود کا معیار اثر تار کے محور کے گرد = فرض کرو $\underline{مج}_۱$

$= مج_۱ + ک_۱ \left(\frac{ط}{۸}\right)^۲$

∴ دونوں اسطوانوں کے جمود کا معیار اثر تار کے محور کے گرد = $۲\,\underline{\text{مج}}_{۱}$

$$= ۲\,\text{مج}_{۱} + ۲\,\text{ک}_{۱}\left(\frac{\text{ط}}{۸}\right)^{۲}$$

اسی طرح، متوازی محوروں کے اصول سے اسی شکل میں $\text{ب}_{۱}$ یا $\text{ب}_{۲}$ کے جمود کا معیار اثر تار کے محور کے گرد = فرض کرو $\underline{\text{مج}}_{۲}$

$$= \text{مج}_{۲} + \text{ک}_{۲}\left(\frac{\text{ط}}{۴} + \frac{\text{ط}}{۸}\right)^{۲} = \text{مج}_{۲} + \text{ک}_{۲}\left(\frac{۳\text{ط}}{۸}\right)^{۲}$$

∴ دونوں اسطوانوں $\text{ب}_{۱}$، $\text{ب}_{۲}$ کے جمود کا معیار اثر تار کے محور کے گرد

$$= ۲\,\underline{\text{مج}}_{۲} = ۲\,\text{مج}_{۲} + ۲\,\text{ک}_{۲}\left(\frac{۳\text{ط}}{۸}\right)^{۲}$$

∴ شکل ۱۴ع (ب) کی وضع کیلئے اگر مجموعہ کے جمود کا معیار اثر تار کے محور کے گرد = $\text{مج}''$

$$\text{تو}\quad \text{مج}'' = \text{مج} + ۲\,\underline{\text{مج}}_{۱} + ۲\,\underline{\text{مج}}_{۲} + \underline{\text{مج}}$$

$$= \text{مج} + ۲\,\text{مج}_{۱} + ۲\,\text{ک}_{۱}\left(\frac{\text{ط}}{۸}\right)^{۲} + ۲\,\text{مج}_{۲} + ۲\,\text{ک}_{۲}\left(\frac{۳\text{ط}}{۸}\right)^{۲} + \underline{\text{مج}} \quad ......(۸)$$

اور اس صورت میں وقت دوران $\text{و}_{۲} = ۲\pi\sqrt{\frac{\text{مج}''}{\text{ط}}}$ ......(۹)

اوپر کی مساوات (۸) کو مساوات (۶) میں سے تفریق کرنے سے:-

$$\text{مج}' - \text{مج}'' = ۲\text{ک}_{۱}\left(\frac{۳\text{ط}}{۸}\right)^{۲} - ۲\text{ک}_{۱}\left(\frac{\text{ط}}{۸}\right)^{۲} + ۲\text{ک}_{۲}\left(\frac{\text{ط}}{۸}\right)^{۲} - ۲\text{ک}_{۲}\left(\frac{۳\text{ط}}{۸}\right)^{۲} =$$

$$= ۲\text{ک}_{۱}\left\{\left(\frac{۳\text{ط}}{۸}\right)^{۲} - \left(\frac{\text{ط}}{۸}\right)^{۲}\right\} + ۲\text{ک}_{۲}\left\{\left(\frac{\text{ط}}{۸}\right)^{۲} - \left(\frac{۳\text{ط}}{۸}\right)^{۲}\right\}$$

$$= ۲\text{ک}_{۱}\frac{\text{ط}^{۲}}{۸} - ۲\text{ک}_{۲}\frac{\text{ط}^{۲}}{۸} = \frac{\text{ط}^{۲}}{۴}\left(\text{ک}_{۱} - \text{ک}_{۲}\right) \quad ......(۱۰)$$

اب چونکہ ہمکو $ک_1$، $ک_2$ اور ط معلوم ہیں اسلئے مج′ ـ مج″ معلوم ہوسکتا ہے۔

مساوات (۷) اور (۹) کو مربع کرنیکے بعد تفریق کرنے سے :-

$$و_1^2 - و_2^2 = \frac{4\pi^2}{ط}(مج' - مج'') \quad ............ (11)$$

مساوات (۱۱) سے چونکہ اب مج′ ـ مج″ کی قیمت معلوم ہے اس لئے ثہ معلوم کیا جاسکتا ہے۔

یعنی $ثہ = \frac{4\pi^2}{و_1^2 - و_2^2}\left\{\frac{ط^2}{4}(ک_1 - ک_2)\right\}$

اور چونکہ جفت جو عمل کر رہا ہے وہ = $\frac{د عہ}{ل} \times \frac{\pi ص^4}{2} = ثہ عہ$

$$\therefore د = \frac{2 ل ثہ}{\pi ص^4} = \frac{2 ل}{\pi ص^4} \times \frac{4\pi^2}{و_1^2 - و_2^2}\left\{\frac{ط^2}{4}(ک_1 - ک_2)\right\}$$

$$= \frac{2 ل \pi}{ص^4(و_1^2 - و_2^2)}\left\{ط^2(ک_1 - ک_2)\right\} \quad ............ (12)$$

**مثال** :- ایک اسطوانہ نما لمبی سلاخ جسکا طول ط ہے وسطی نقطہ سے ایک تار کے ذریعے لٹکائی گئی ہے اور یہ $ا_1$، $ا_2$، $ب_1$، $ب_2$ چار ٹھوس کروں کے مرکزوں سے مس کرتی ہوئی گزرتی ہے۔ $ا_1$ اور $ا_2$ بالکل مساوی جسامت کے ہیں اور ہر ایک کا نصف قطر $ص_1$ اور کمیت $ک_1$ ہے، اور اسی طرح $ب_1$ اور $ب_2$ مساوی ہیں اور ان میں سے ہر ایک کا نصف قطر $ص_2$ اور کمیت $ک_2$ ہے۔ مروڑ کے تحت سلاخ کا وقت دوران $و_1$ ہوتا ہے جبکہ $ا_1$ اور $ا_2$ میں سے سلاخ کو گزار کر اس کے وسطی حصہ میں (مس کرتے ہوئے) اور $ب_1$ اور $ب_2$ کے مرکزوں کو

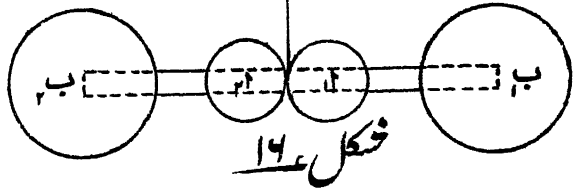
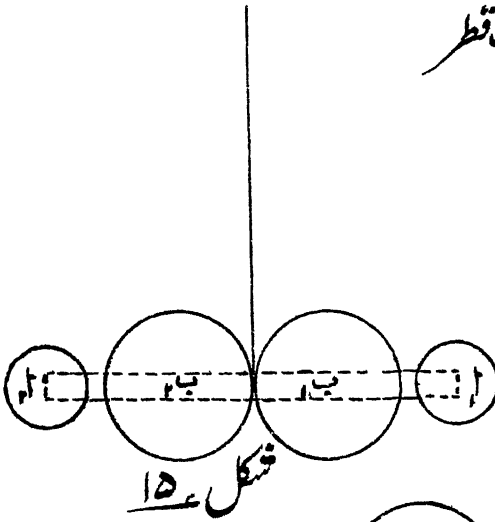
سلاخ کے سروں پر رکھا جاتا ہے۔ اگر وسطی کروں کے محل سروں کے کروں سے باہم بدل دئے جائیں تو سلاخ کا وقت دوران $\text{و}_2$ ہوجاتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس تار کے مادہ کا استواری کا معیار =

$$= \frac{16\,\text{ل}\,\pi \left\{ \text{ک}_1 \left(\text{ص}_1^2 - \frac{\text{ط}^2}{4}\right) + \text{ک}_2 \left(\frac{\text{ط}^2}{4} - \text{ص}_2^2\right) \right\}}{\text{ص}^4 \left(\text{و}_1^2 - \text{و}_2^2\right)}$$

جہاں ص = تار کا نصف قطر

ل = تار کا طول

شکل ۱۵

شکل ۱۶

حل :- فرض کرو کہ سلاخ کے جمود کا معیار اثر ایک ایسے محور کے گرد جو خود تار کا محور ہے = مج

اور $\text{ا}_1$ یا $\text{ا}_2$ کرہ کا اسکے ایسے محور کے گرد جمود کا معیار اثر جو کرہ کے مرکز ثقل میں سے گزرتا ہو اور تار کے محور کے متوازی ہو فرض کرو = مج

نیز یہ بھی فرض کرو کہ $\text{ب}_1$ یا $\text{ب}_2$ کے جمود کا معیار اثر اس کے ایسے محور کے گرد جو اس کے مرکز ثقل میں سے گزرتا ہو اور تار کے محور

کے متوازی ہو = $مجَ_۲$

شکل ۱۵ میں جبکہ وقت دوران $ف_۱$ ہو تو $ا_۱$ یا $ا_۲$ کے جمود کا معیار اثر تار کے محور کے گرد متوازی محوروں کے اصول سے = فرض کرو

$$\overline{مجَ} = مجَ_۱ + ک_۱ صا_۱^۲$$

اور اسی طرح $ا_۱$ اور $ا_۲$ دونوں کروں کے جمود کا معیار اثر تار کے محور کے گرد = $۲ مجَ_۱ + ۲ ک_۱ صا_۱^۲$

اور اسی شکل میں متوازی محورون کے اصول سے $ب_۱$ یا $ب_۲$ کے جمود کا معیار اثر تار کے محور کے گرد = (فرض کرو) $\overline{مجَ_۲} = مجَ_۲ + ک_۲ \left(\frac{ط}{۲}\right)^۲$

$\therefore$ $ب_۱$ اور $ب_۲$ دونوں کے جمود کا معیار اثر = $۲ \overline{مجَ_۲} =$

$$= ۲ ک_۲ \left(\frac{ط}{۲}\right)^۲ + ۲ مجَ_۲$$

شکل ۱۵ میں اگر مجموعے کے جمود کا معیار اثر تار کے محور کے گرد = مجَ

تو $مجَ = مجَ + ۲ \overline{مجَ_۱} + ۲ \overline{مجَ_۲} + \underline{مجَ}$ [جہاں $\underline{مجَ}$ = پیچوں وغیرہ کے جمود کا معیار اثر تار کے محور کے گرد]

$$= مجَ + ۲ مجَ_۱ + ۲ ک_۱ صا_۱^۲ + ۲ مجَ_۲ + ۲ ک_۲ \left(\frac{ط}{۲}\right)^۲$$
$$+ \underline{مجَ} \quad \text{.................................} \quad (۱۳)$$

اور اس صورت میں

$$\text{وقت دوران } و_۱ = ۲ \pi \sqrt{\frac{مجَ}{ظ}} \quad \text{.................................} \quad (۱۴)$$

اب شکل ۱۶ پر غور کرو :-

اس صورت میں بھی متوازی محوروں کے اصول سے $ا_۱$ یا $ا_۲$ کے جمود کا معیار اثر تار کے محور کے گرد = فرض کرو $\underline{مجَ_۱} = مجَ_۱ + ک_۱ \left(\frac{ط}{۲}\right)^۲$

∴ دونوں کروں کے جمود کا معیار اثر تار کے محور کے گرد = ۲ مجِ$_۱$

= ۲ مج$_۱$ + ۲ ک$_۱$ $(\frac{ط}{۲})^۲$

اسی طرح متوازی محوروں کے اصول سے ب$_۱$ یا ب$_۲$ کے جمود کا معیار اثر تار کے محور کے گرد = فرض کرو مجِ$_۲$ = مج$_۲$ + ک$_۲$ (ص$_۲$)$^۲$

∴ دونوں ب$_۱$ اور ب$_۲$ کے جمود کا معیار اثر = ۲ مجِ$_۲$

= ۲ مج$_۲$ + ۲ ک$_۲$ . ص$_۲^۲$

شکل ع۱۶ کے لئے اگر مجموعہ کے جمود کا معیار اثر تار کے محور کے گرد = مجً

تو مجً = مج + ۲ مجِ$_۱$ + ۲ مجِ$_۲$ + مجِ

لہذا مجً = مج + ۲ مج$_۱$ + ۲ ک$_۱$ $(\frac{ط}{۲})^۲$ + ۲ مج$_۲$ + ۲ ک$_۲$ ص$_۲^۲$

+ مجِ ............................ (۱۵)

اور اس صورت میں وقت دوران و$_۲$ = ۲ π $\sqrt{\frac{مجً}{ط}}$ ........ (۱۶)

اوپر کی مساوات (۱۵) کو (۱۳) میں سے تفریق کرنے سے :-

مجَ - مجً = ۲ ک$_۱$ ص$_۱^۲$ + ۲ ک$_۲$ $(\frac{ط}{۲})^۲$ - ۲ ک$_۱$ $(\frac{ط}{۲})^۲$ - ۲ ک$_۲$ ص$_۲^۲$

= ۲ ک$_۱$ (ص$_۱^۲$ - $\frac{ط^۲}{۴}$) + ۲ ک$_۲$ ($\frac{ط^۲}{۴}$ - ص$_۲^۲$) ......... (۱۷)

اب چونکہ ص$_۱$، ص$_۲$، ک$_۱$، ک$_۲$ اور ط کی قیمتیں معلوم ہیں لہذا مجَ - مجً کی قیمت معلوم ہو سکتی ہے۔ اوپر کی مساواتوں (۱۴) اور (۱۶) کو مربع کرنے کے بعد اگر تفریق کریں تو:-

و$_۱^۲$ - و$_۲^۲$ = $\frac{۴ π^۲}{ط}$ (مجَ - مجً) .................. (۱۸)

مساوات (۱۸) میں چونکہ (مجَ - مجً) کی قیمت معلوم ہے اور و$_۱$

اور $\text{و}_۲$ بھی معلوم ہیں اس لئے ثہ معلوم ہو جاتا ہے۔

اب تار پر جو جفت عمل کر رہا ہے وہ

$$= \frac{\text{د عہ}}{\text{ل}} \times \frac{\pi\, \text{ص}^۴}{۲} = \text{ثہ عہ}$$ جہاں عہ = زاویہ انصراف

$$\therefore \text{د} = \frac{۲\,\text{ل ثہ}}{\pi\, \text{ص}^۴} =$$

$$= \frac{۲\,\text{ل}}{\pi\, \text{ص}^۴} \left\{ \frac{۴\pi^۲}{\text{و}_۱^۲ - \text{و}_۲^۲} (\text{مج} - \text{مجَ}) \right\}$$

$$= \frac{۸\,\text{ل}\,\pi}{\text{ص}^۴ (\text{و}_۱^۲ - \text{و}_۲^۲)} \left\{ ۲\text{ک}_۱ \left(\text{ص}_۱^۲ - \frac{\text{ط}^۲}{۴}\right) + ۲\text{ک}_۲ \left(\frac{\text{ط}^۲}{۴} - \text{ص}_۲^۲\right) \right\}$$

$$= \frac{۱۶\,\text{ل}\,\pi}{\text{ص}^۴ (\text{و}_۱^۲ - \text{و}_۲^۲)} \left\{ \text{ک}_۱ \left(\text{ص}_۱^۲ - \frac{\text{ط}^۲}{۴}\right) + \text{ک}_۲ \left(\frac{\text{ط}^۲}{۴} - \text{ص}_۲^۲\right) \right\}$$

**ہندی ربر کے لئے پواساں کی نسبت دریافت کرنیکا طریقہ:۔**

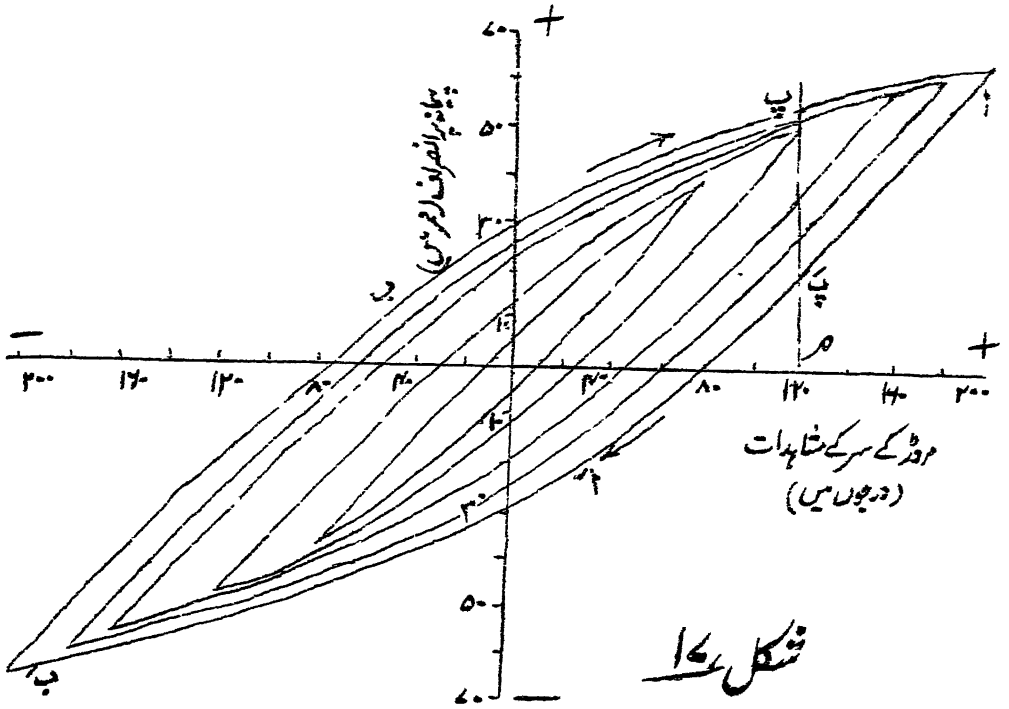
ایک گول تراش والے لمبے ٹھوس ہندی ربر کے ٹکڑے کو جس کا قطر تقریباً نصف انچ ہوتا ہے ایک سرے سے باندھ کر لٹکایا جاتا ہے اور اس کے دوسرے سرے پر ایک پلڑے میں بوجھ رکھا جاتا ہے۔ ربر کی طولی سمت میں تقریباً دس مقامات پر نشانات بنائے جاتے ہیں اور ان مقامات پر خردہ پیما پیچ سے ربر کا قطر ہر بوجھ کے لئے جو پلڑے میں رکھا جاتا ہے ناپ لیا جاتا ہے۔ متحرک خوردبین کی مدد سے ربر کا طول بھی ہر بوجھ کے لئے معلوم کر لیا جاتا ہے۔ اس طرح ہر وزن کے لئے عرضی سکڑاؤ اور طولی اضافہ کی قیمتیں علی الترتیب معلوم کر لی جاتی ہیں۔ عرضی سکڑاؤ کی صورت میں ہر وزن یا بوجھ کے متناظر تقریباً دس پیمائشوں کی اوسط قیمت لی جاتی ہے۔

$$\text{پوآسان کی نسبت مہ} = \frac{\dfrac{\text{عرضی سکڑاؤ}}{\text{ابتدائی قطر}}}{\dfrac{\text{طولی اضافہ}}{\text{ابتدائی طول}}}$$

اس طرح ہر بوجھ کے لیے مہ کی قیمت معلوم کی جا سکتی ہے ۔ تمام مشاہدات کو بوجھ کے ترتیب دینے کے پانچ یا دس منٹ بعد پڑھنا مناسب ہوتا ہے ۔ مہ کی قیمت ربر کی نوعیت پر منحصر ہوتی ہے اور نیز کسی ایک بوجھ کے اضافہ کرنے کی صورت میں جو قیمتیں حاصل ہوتی ہیں وہ اسی بوجھ کے کمی کرنے کی قیمتوں سے کسی قدر مختلف ہوتی ہیں ۔

مروڑی اختناق :۔ اگر کوئی تانبے کا تار اس طرح مروڑا جائے کہ مروڑ کا جفت بتدریج بڑھنے لگے تو یہ ثابت ہوا ہے کہ جفت کی قیمت پہلے تو مروڑ کے متناسب، اور ہوک کے کلیہ کے تابع رہتی ہے لیکن جوں جوں زاویہ مروڑ کی قیمت بڑھتی جاتی ہے، مروڑ کا جفت، مروڑ کی بہ نسبت کم ہونے لگتا ہے، اب اگر کسی وقت میں، مروڑ کے جفت کی سمت کو الٹا دیا جائے تو کسی دئے ہوئے زاویہ کے لئے، الٹی سمت میں مروڑ کا جفت، ابتدائی سمت کے مروڑ کے جفت سے ہمیشہ کم ہوتا ہے (شکل ۷۱ میں پ ر، پ ہ سے چھوٹا ہے) لہذا تار کو کسی دئے ہوئے زاویہ میں مروڑے جانے کے لئے جو کام کرنا پڑتا ہے وہ زیادہ ہے بہ نسبت اُس کام کے جو کہ تار اُلٹا مروڑے جاتے ہوئے کر سکتا ہے ۔ اس خاصیت کو "مروڑ کے اختناق" سے تعبیر کیا جاتا ہے کسی بے مروڑے ہوئے تار کو لو اور فرض کرو کہ اولاً وہ ایک زاویہ + طہ درجے کسی سمت میں مروڑا جاتا ہے ۔ پھر اس کو اُلٹا اتنا مروڑو

کہ وہ ایک زاویہ - طہ درجے بنائے اور اس کے بعد پھر پہلی سمت

شکل ١٧

میں مروڑ کر زاویہ + طہ تک لے آؤ - تجربہ سے یہ ثابت ہوا ہے کہ مروڑ
کا جفت، جبکہ دوسری مرتبہ تار + طہ زاویہ بناتا ہے، پہلی دفعہ
کے + طہ زاویے کے مروڑ کی جفت سے مختلف ہوتا ہے۔ لیکن اگر تار
کو + طہ اور - طہ کی حد تک مروڑا جائے تو یہ ایک دور ہوگا اور متعدد
دور اس طرح مکمل کئے جائیں کہ ہر دور ٹھیک یکساں طریقہ اور بالکل ایک
ہی وقت کے وقفوں میں مکمل ہو جائے تو یہ دریافت کیا گیا ہے کہ تار
ایک مستقل دَوری حرکت کرنے لگتا ہے جس میں + طہ اور - طہ کے
متناظر جفتوں کی خاص خاص قیمتیں ہوتی ہیں اور کسی درمیانی زاویہ طہ کے
لئے جفت کی دو قیمتیں ہوتی ہیں، ایک قیمت تار کے - طہ سے + طہ

تک مروڑے جانے کے اور دوسری + طہ سے ۔ طہ تک مروڑے جانے کے متناظر ہوتی ہے ۔ اس دَوری حالت کو شکل ۱۷ میں واضح طور پر دکھلایا گیا ہے ۔

تار کو ایک مکمل دَور تک مروڑنے میں جو کام کیا جاتا ہے اسکی تخمیں :—

فرض کرو کہ طہ نیم قطریوں کے مروڑ کے متناظر جو جفت عمل کرتا ہے اسکی قیمت ق ڈائیں سمر ہے ۔

تب اگر مروڑ کی قیمت میں فرطہ کا اضافہ ہوتا ہو تو جفت جو کام کرتا ہے وہ ق فرطہ کے مساوی ہوگا ۔

شکل ۱۸

لہٰذا تار پر ایک مکمل دور میں جو کام ہوا

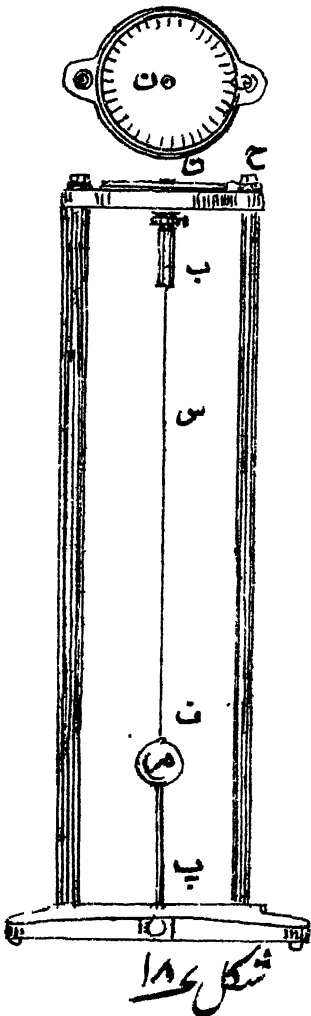
وہ = ۲ق . ط۲

= کسی بند حلقہ کے رقبہ کے، جس کی تعبیر ا ب بَ اَ سے ہوگی ۔

ہم اگر اس حلقہ کو عَہ نیم قطریان فی سمر کے پیمانہ سے مروڑ کے لئے، اور یَہ ڈائین سمر فی سمر کے پیمانہ سے جفت کیلئے مرتسم کریں تو تار پر جو کام کیا جاتا ہے وہ

= عَہ . یَہ . ا ارگ کے، جہاں

ا بند حلقے کے رقبہ کے مساوی ہے ۔

**عملی تفصیلات :—** شکل ۱۸ میں جو آلہ دکھلایا گیا ہے وہ دو تاروں پر مشتمل ہے جس میں سے س تانبے کی ہے اور یہی زیر تجربہ ہے اور دوسری پ پیتل کی ہے جس کے تراش عمودی

کا رقبہ س سے زیادہ اور طول س سے کم ہے اور اسکے لچک کے خواص پہلے سے ہی ایک تجربہ کی مدد سے دریافت کر لئے گئے ہیں۔ دونوں تاروں کو ایک دھاتی کندہ ف میں مضبوطی سے ملا کر جما دیا جاتا ہے۔ تانبے کے تار کا دوسرا سرا مضبوطی کے ساتھ ایک درجہ دار مروڑ کے راس کے ساتھ باندھ دیا جاتا ہے جس پر مروڑ کا زاویہ پڑھا جا سکتا ہے۔ پیتل کی تار کا سرا آلہ کے قاعدے سے باندھ دیا جاتا ہے۔ یہ ظاہر ہے کہ کوئی جفت اگر تانبے کے تار پر لچک کی حد سے بڑھ کر عمل کرنا چاہے، تو پیتل کے تار کی مزاحمت کی باعث، ایسا نہیں کر سکتا۔ لہذا، ف جو زاویہ گھومتا ہے اس کو اگر معلوم کر لیا جائے تو مروڑ کا جفت جو پیتل کے تار پر عمل کرتا ہے دریافت کیا جا سکتا ہے اور اس سے تانبے کے تار پر عمل کرنے والا جفت معلوم ہو سکتا ہے۔ کندہ ف کے ساتھ ایک آئینہ م لگا دیا جاتا ہے۔ اس سے اور ایک لیمپ اور پیمانہ کی مدد سے، ف جو زاویہ گھومتا ہے اسکو پڑھا جا سکتا ہے۔ فرض کرو کہ یہ زاویہ = عہ نیم قطری جبکہ پیمانہ پر انصراف لا سمر ہوتا ہے۔ تب چونکہ

مس ۲ عہ = $\frac{لا}{ث}$، عہ = $\frac{لا}{۲ ث}$ نیم قطریوں کے، جہاں ث آئینہ سے پیمانہ کا فاصلہ ہے۔

لہذا پیتل کی تار پر جفت = ق = $\frac{د\, عہ}{ل} \cdot \frac{\pi\, ص^۴}{۲}$

$= \frac{\pi\, د\, ص^۴\, لا}{۴\, ث\, ل}$ ............................ (۱۹)

جہاں د = پیتل کی تار کے مروڑ کا معیار

ص = " " " کا نصف قطر

ل = " " " کا طول

لہذا تانبے کی تار پر عمل کرنے والا جفت معلوم ہو سکتا ہے۔

د کی دریافت:۔ تقریباً پچاس سمر طول کا ایک علیحدہ تار لے کر اجوب

کے نمونہ ہی کا ہونا چاہیئے) اسکے ایک سرے کو مضبوطی سے اس طرح باندھو کہ وہ انتصاباً لٹکنے لگے۔ تار کے دوسرے سرے سے ایک جمودی سلاخ کو باندھ کر تار کی مروڑ کے تحت اس سلاخ کو اہتزاز کرنے دو

اگر و = وقت دوران

مج = سلاخ کے جمود کا معیار اثر تار کے محور کے گرد

ل = اس علیحدہ تار کا طول

$$\text{تو}\quad \text{و} = ۲\pi \sqrt{\frac{۲\,\text{ل}\,\text{مج}}{\pi\,\text{د}\,\text{ص}^{۴}}}$$

مساوات (۱۹) میں د کی قیمت لکھنے سے

$$\text{ق} = \frac{۲\pi^{۲}\,\text{ل}\,\text{مج}\,\text{لا}}{\text{ل}\,\text{ث}\,\text{و}^{۲}} \qquad (۲۰)$$

اس ضابطہ سے تانبہ کی تار پر عمل کرنے والے جفت اور پیمانہ پر نقطہ نور کے انصراف کے درمیان تعلق معلوم ہو جاتا ہے۔

اور اس طرح ق کی قیمت معلوم ہو سکتی ہے۔

اس تجربہ میں دو مشاہد ملکر کام کرتے ہیں۔ اس کی وجہ یہ ہے کہ ایک ہی وقت میں، مروڑ کے راس کے اور نور کے نقطہ کے مشاہدات لینے ہوتے ہیں۔ آلہ کو اس طرح ترتیب دیا جاتا ہے کہ تاروں میں ابتدا میں بگاڑ نہیں ہوتا اور مروڑ کا راس صفر پر ہوتا ہے۔ فرض کرو کہ انتہائی مروڑ کے دور مثلاً ۲۰۰°، ۱۸۰°، ۱۶۰°، ۱۲۰° وغیرہ زیر امتحان ہیں۔ مروڑ کے راس کو پہلے +۲۰۰° گھمایا جاتا ہے اور پھر ۴۰° کی وقفوں سے کم کرتے ہوئے ۲۰۰°- تک لایا جاتا ہے۔ اب اس کی حرکت کی سمت الٹی کر دی جاتی ہے اور ۴۰° کے وقفوں سے مشاہدات دہرائے جاتے ہیں حتیٰ کہ +۲۰۰° تک پھر وہ پہنچ جاتا ہے۔

اس طرح بغیر درمیان میں رُکے ہوئے، متعدد دَور کے مشاہدات لئے جاتے ہیں، حتیٰ کہ دَوری حالت کا حصول پیمانہ پر کے مشاہدات کے مستقل ہونے سے ظاہر ہونے لگتا ہے۔ لیکن بہتر ترکیب یہ ہے کہ مشاہدات شروع کرنے سے قبل تار کو "مروڑ کے متعدد دَوروں میں سے گزرنے دیا جائے۔

اختناق کے حلقے جو طہ = ۲۰۰°، ۱۸۰°، ۱۶۰°، ۱۲۰° وغیرہ قیمتوں کے متناظر ہوں مرتسم کئے جانے چاہئیں اور ان کے رقبہ جات کسی طریقہ سے دریافت کر لئے جائیں۔ ایک منحنی ایسا کھینچا جا سکتا ہے جس میں ہر دَور کی حاصل توانائی اور مروڑ کے انتہائی زاویہ طہ میں تعلق بتایا جا سکتا ہے۔

اس منحنی کو شکل ع ۱۹ میں دکھلایا گیا ہے۔

توانائی فی دور

مروڑ کا انتہائی زاویہ

شکل ع ۱۹

مشاہدات کو قلمبند کرنے کا طریقہ اس مثال سے بخوبی واضح ہو جائے گا:—

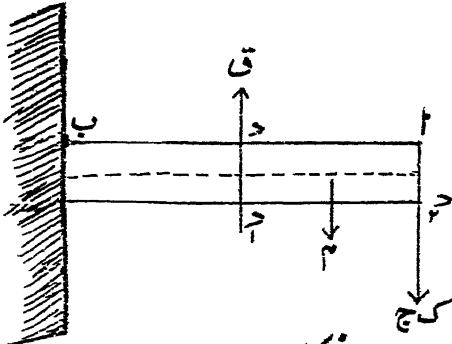
| مروڑ کے راس کے مشاہدات درجوں میں | پیمانہ کے مشاہدات سمر میں | پیمانہ کے مشاہدات سمر میں | پیمانہ کے مشاہدات سمر میں |
|---|---|---|---|
| + ۱۵۰ | ۶۹٫۵ ← ۷۸٫۵ | ۷۸٫۵ ← ۷۹ | ۷۹ ← ۷۹٫۵ |
| + ۱۲۵ | ۵۵٫۵ ۷۵ | ۶۳٫۳ ۷۵ | ۶۴ ۷۵ |
| + ۱۰۰ | ۴۲ ۷۰ | ۴۹٫۵ ۷۰ | ۵۰ ۷۰ |

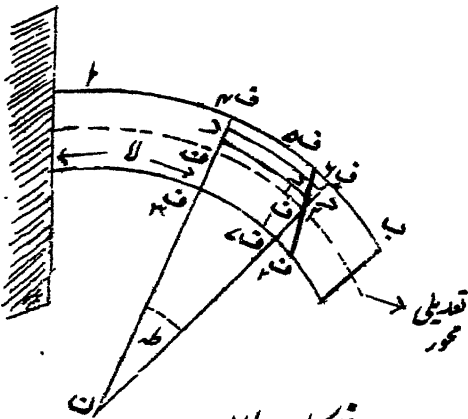
| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ۷۵ + | ۳۰ | ۶۳٫۵ | ۳۶٫۵ | ۶۴ | ۳۷ | ۶۴٫۵ |
| ۲۵ + | ۹٫۵ | ۵۰٫۵ | ۱۳٫۵ | ۵۰٫۵ | ۱۳٫۵ | ۵۰٫۵ |
| صفر | ٫۵ | ۴۲ | ۳٫۵ | ۴۲ | ۴٫۰ | ۴۲ |
| ۲۵ − | −۸ | ۳۲٫۵ | −۵ | ۳۲٫۵ | −۴٫۵ | ۳۲٫۵ |
| ۵۰ − | −۱۴ | ۲۱ | −۱۲ | ۲۱ | −۱۱٫۵ | ۲۱ |
| ۷۵ − | −۲۰ | ۸٫۵ | −۱۸٫۵ | ۸٫۵ | −۱۸ | ۸٫۵ |
| ۱۰۰ − | −۲۵ | −۴٫۵ | −۲۴ | −۵ | −۲۳٫۵ | −۵ |
| ۱۲۵ − | −۲۹٫۵ | −۱۸٫۵ | −۲۹ | −۱۸٫۵ | −۲۸٫۵ | −۱۸٫۵ |
| ۱۵۰ − | −۳۳ | −۳۲ | −۳۳٫۵ | −۳۲٫۵ | ۳۳٫۵ | ۳۲٫۵ |
| | ← | | ← | | ← | |

**سلاخوں کا خماؤ:-** اگر ایک سیدھی سلاخ کو شکل عـ۲۰ کے مطابق خمایا جائے تو اس کے ریشے اوپر کے حصہ میں کھنچیں گے (یعنی اوپر کے حصہ کے ریشوں کے طول میں اضافہ ہوگا) اور نیچے کے حصہ کے طول گھٹنے لگیں گے۔ اس سلاخ کے ایک حصہ میں ایسی ہی کچھ سطح ہوگی جہاں ریشوں کے طول میں نہ تو اضافہ ہوگا اور نہ کمی، سلاخ کی ایسی سطح، تعدیلی سطح کہلاتی ہے اور ایک ایسا خط جو اُن تمام چھوٹے چھوٹے ریشوں میں سے جو نہ تو کھنچتے ہیں اور نہ گھٹتے ہیں گزرتا ہے، تعدیلی محور کہلاتا ہے۔ تعدیلی محور کے طول میں سلاخ کے خماؤ کی وجہ سے نہ اضافہ ہوتا ہے اور نہ کمی۔

شکل عـ۲۰

فرض کرو کہ ایک سلاخ ایسی ہے جسکا ایک سرا دیوار میں قائم کر دیا گیا ہے اور دوسرے سرے سے ایک وزن ک ج لٹکایا گیا ہے دیکھو شکل عـ۲۰ (الف)۔

د $د$ کے پاس ایک چھوٹا سا رقبہ تصور کرو۔ چونکہ ایک قوت ک ج نیچے کی جانب عمل کر رہی ہے اور سلاخ کے ٹکڑے ا $د_۲$ $د_۱$ د کا وزن م بھی اسی جانب عمل کر رہا ہے۔ لہذا سلاخ کو تعادل کی حالت میں رکھنے کے لئے ایک جزّی قوت ق کو اوپر کی جانب اسطرح عمل کرنا چاہیئے کہ ق = م + ک ج

شکل ۲۰ (الف)

اس طرح تمام جزّی قوتیں ایک جفت پیدا کرتی ہیں جس کی وجہ سے تمام ریشے سلاخ کے اوپر کے حصہ میں تناؤ کی حالت میں ہیں اور نچلے حصہ میں دباؤ کی حالت میں۔ اس لئے اوپر کے حصہ میں د $د_۱$ کے بائیں جانب ایسی قوتیں عمل کر رہی ہیں جنکا تقاضا سیدھے جانب کے ریشوں کو کھینچنے کا ہے اور سلاخ کے نچلے حصہ میں د $د_۱$ کی بائیں جانب ایسی قوتیں عمل کرتی ہیں جو دہنے جانب کے ریشوں کو دبانے کا تقاضا رکھتی ہیں۔ ان تمام قوتوں کا معیار اثر ایک جفت ہے اور یہ اس جفت کو توازن میں رکھتا ہے جو ک ج اور ق کی وجہ سے پیدا ہوتا ہے۔ اس جفت کو "خمیدگی کے معیار اثر" سے

شکل ۲۱

تعبیر کیا جاتا ہے۔

شکل ۲۱ میں ایک خمی ہوئی سلاخ دکھلائی گئی ہے۔ ابتدا میں ف ف۳ ایک فاصلہ تعدیلی محور کے اوپر اس طرح لیا گیا ہے کہ ف ف۲ کے (جو تعدیلی محور کے نیچے کی جانب ہے) مساوی ہو۔ چونکہ سلاخ خمائی گئی ہے اس لئے اوپر کھنچاؤ کی وجہ سے ف۵، ف۳ پر چلا جائے گا۔

یعنی اوپر کی جانب اضافۂ طول = ف۵ ف۳

اور نیچے دباؤ کی وجہ سے ف۲، ف۱ پر چلا جائے گا یعنی کمی طول = ف ف۱ لیکن تعدیلی محور ف۱ ف (جو مساوی ہے ف۵ ف۴ = ف ف۲) اپنی اصلی حالت پر رہتا ہے یعنی اس میں نہ اضافہ طول ہوتا ہے اور نہ کمی۔

اب ایک چھوٹا سا ٹکڑا د د۱ طول اور ۱ تراش عمودی کے رقبہ کا تعدیلی محور کے اوپر تصور کرو جبکہ سلاخ خمائی نہیں گئی ہو (اس ٹکڑے کا طول بھی = ف۱ ف = ف۴ ف۵ = ف۴ ف۳)

سلاخ اگر خمائی جائے تو اس ٹکڑے میں اضافۂ طول = د۱ د۲

لہٰذا اضافۂ طول فی اکائی طول = $\frac{د_1 د_2}{د د_1}$

ف۳، ف۴ کو اور ف۲، ف۱ کو ملاؤ اور ان کو اتنا خارج کرو کہ نقطہ ن پر ایک دوسرے کو یہ قطع کریں۔ ٹکڑے ف۱ ف کا مرکز انحنا "ن" ہوگا۔

اگر ی = اس سلاخ کے مادہ کا ینگ کا معیار لچک

$$\text{تو ی} = \frac{\text{زور}}{\text{بگاڑ}} = \frac{\frac{\text{قوت}}{۱}}{\frac{د_1 د_2}{د د_1}} = \frac{\text{قوت} \times د د_1}{۱ \times د_1 د_2} = \frac{\text{قوت} \times ف ف_1}{۱ \times د_1 د_2}$$

$$= \frac{\text{قوت} \times ص}{۱ \times ما}$$ [کیونکہ دونوں مثلث د۲ د۱ ف اور ف۱ ف ن متشابہ ہیں] جہاں ص = نصف قطر انحنا

اور  ما = اس ٹکڑے کا فاصلہ تعدیلی محور سے

لہذا قوت = $\frac{\text{ی ا ما}}{\text{ص}}$

∴ اس قوت کا معیار اثر = $\frac{\text{ی ا ما}^2}{\text{ص}}$

ایسی تمام قوتوں کا معیار اثر = $\frac{\text{ی}}{\text{ص}} \sum \text{ا ما}^2$

= جفت جوکہ اُن قوتوں کو توازن میں رکھتا ہے

= خمیدگی کا معیار اثر = مہ فرض کرو

$$\therefore \text{مہ} = \frac{\text{ی مج}}{\text{ص}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (21)$$

جہاں مج، جمود کا معیار اثر ایسے محور کے گرد ہوگا جو کہ ضہ میں سے گزرتا ہے اور کاغذ کے مستوی کے علی القوائم ہے۔

سلاخ جب کبھی خمائی جاتی ہے تو اس کے تراش عمودی کی شکل میں تبدیلی واقع ہوتی ہے۔

اوپر کے ریشوں کے طول کے اضافہ کے ساتھ ساتھ عرضی گھٹاؤ سمتِ اضافہ کے علی القوائم واقع ہوتا ہے۔

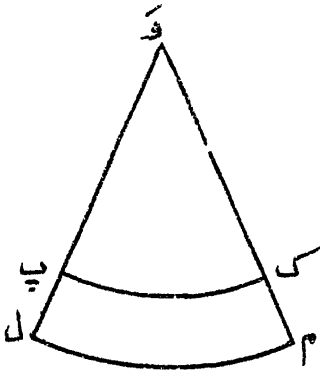
مگر ہم کو معلوم ہے کہ $\frac{\text{گھٹاؤ فی اکائی طول}}{\text{بڑھاؤ فی اکائی طول}}$ = مہ

جہاں مہ = پواساں کی نسبت

∴ عرضی تخفیف فی اکائی طول = مہ × بڑھاؤ فی اکائی طول

اسی طرح نچلے ریشوں کے گھٹاؤ کے ساتھ ساتھ عرضی بڑھاؤ بھی واقع ہوتا ہے۔

تراش عمودی کی شکل اگر پہلے مستطیل تھی تو خمائے جانے کے بعد شکل ۲۲ کے مطابق پ ک م ل ہو جائے گی۔

فرض کرو کہ ل م وہ خط ہے جہاں تعدیلی سطح تراش عمودی کو قطع

شکل ۲۲

کرتی ہے۔

تب پ ک کا عرضی گھٹاؤ فی اکائی

$$\text{طول} = \frac{\text{ل م} - \text{پ ک}}{\text{ل م}} = \text{بڑھاؤ فی اکائی طول} \times \text{مہ}$$

ہم جانتے ہیں کہ اضافہ طول فی اکائی

$$\text{طول} = \frac{\text{ک م}}{\text{ص}} = \frac{\text{مہ}}{\text{ص}}$$

$$\therefore \frac{\text{ل م} - \text{پ ک}}{\text{ل م}} = \frac{\text{ک م}}{\text{ص}} \times \text{مہ}$$

اگر ل پ اور م ک نقطہ وَ پر ملتے ہوں تو پہلے کی طرح

$$\frac{\text{ل م} - \text{پ ک}}{\text{ل م}} = \frac{\text{ک م}}{\text{م وَ}} = \frac{\text{ک م}}{\text{ص}} \times \text{مہ}$$

$$\therefore \text{مہ} = \frac{\text{ص}}{\text{م وَ}} = \frac{\text{ص}}{\text{صَ}} \quad \text{..............} \quad (۲۲)$$

جہاں صَ = تعدیلی سطح کا نصف قطر انحنا اُس مستوی میں جو سلاخ کے طول کے علی القوائم ہو۔

لہذا دونوں نصف قطر انحناؤں میں نسبت، پواساں کی نسبت کے مساوی ہے۔

سلاخ میں توانائی :- سلاخ جن ریشوں پر منقسم ہے اُن میں سے ایک ریشہ پر غور کرو۔

اگر سلاخ کا طول = ل = ریشہ کا طول

اور س = ریشہ کا تراش عمودی کا رقبہ۔

اب جبکہ ریشہ میں بڑھاؤ یا فساد واقع ہو رہا ہو تو

ہم کو معلوم ہے کہ ریشہ کے فی اکائی حجم میں توانائی

$= \frac{1}{2}$ (زور × بگاڑ)

$= \frac{1}{2} \frac{\text{زور}}{\text{بگاڑ}} \times (\text{بگاڑ})^2$

$= \frac{1}{2}$ ی (بگاڑ)$^2$

لہذا پورے ریشہ کی توانائی $= \frac{1}{2}$ ی (بگاڑ)$^2$ . س ال

مگر بگاڑ $= \frac{\text{ف}}{\text{ص}}$ جہاں ف = تعدیلی محور سے ریشہ کا فاصلہ اور ص = تعدیلی محور کا نصف قطر انحنا۔ ظاہر ہے کہ توانائی پوری سلاخ میں = ریشوں کے توانائیوں کی حاصل جمع کے

$= \sum \frac{1}{2}$ ی س ال $\frac{\text{ف}^2}{\text{ص}^2}$

$= \frac{1}{2}$ ی $\frac{\text{ل}}{\text{ص}^2} \sum$ س ف$^2$

$= \frac{1}{2}$ ی $\frac{\text{ل}}{\text{ص}^2}$ . مج

جہاں مج = رقبی جمود کا معیار اثر، تعدیلی محور کے گرد

لیکن $\frac{\text{مج ی}}{\text{ص}} =$ م

∴ سلاخ کے اندر توانائی $= \frac{1}{2} \cdot \frac{\text{ل م}}{\text{ص}}$ ...............(۲۳)

کسی سلاخ کے ایک سرے پر وزن رکھا ہوا ہو تو سلاخ میں جھکاؤ یا اُتار۔ شکل ۲۱ پر غور کرو۔ اگر سلاخ کے قائم کردہ نقطہ سے فا تک فاصلہ = لا، اور اگر سلاخ کا وزن نظرانداز کر دیا جائے تو م = ک ج (ل - لا) جہاں ل سلاخ کے طول کے مساوی ہے اور ک وہ کمیت ہے جو سلاخ کے آزاد سرے پر رکھی ہوئی ہے۔

چونکہ $\frac{1}{\text{ص}} = \frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2}$ (اگر خاد کم ہو)

$$\therefore \text{ک ج}(\text{ل} - \text{لا}) = \frac{\text{ی}}{\text{ص}} \cdot \text{مج} = \text{ی مج} \times \frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فر لا}^{۲}}$$

[جہاں ما = لا فاصلہ پر اُتار]

اس مساوات کو تکملانے سے :-

$$\text{ک ج}\left(\text{ل لا} - \frac{\text{لا}^{۲}}{۲}\right) = \text{ی مج} \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{گ}$$ جہاں گ کوئی مستقل ہے۔

لیکن جبکہ $\text{لا} = \text{صفر}$ تو $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{صفر}$ $\quad \therefore \text{گ} = \text{صفر}$

پھر دوبارہ تکملانے سے :- $\text{ک ج}\left(\text{ل} \frac{\text{لا}^{۲}}{۲} - \frac{\text{لا}^{۳}}{۶}\right)$

$= \text{ی مج ما} + \text{گ}_{۱}$ جہاں $\text{گ}_{۱}$ = کوئی مستقل

لیکن جبکہ $\text{لا} = \text{صفر}$ تو $\text{ما} = \text{صفر}$ $\quad \therefore \text{گ}_{۱} = \text{صفر}$

دوسرے سرے پر اُتار یا جھکاؤ معلوم کرنے کے لئے لا = ل رکھنا چاہیئے۔

اب فرض کرو کہ لا = ل پر جھکاؤ = ماَ

$$\text{تو ماَ مج ی} = \text{ک ج}\left(\frac{\text{ل}^{۳}}{۲} - \frac{\text{ل}^{۳}}{۶}\right) = \frac{\text{ک ج ل}^{۳}}{۳}$$

$$\therefore \text{اُتار ماَ} = \frac{\text{ک ج ل}^{۳}}{۳ \text{ مج ی}} \quad \text{......(۲۴)}$$

اس امر کو یاد رکھنا چاہیئے کہ سلاخ کا وزن یہاں نظر انداز کر دیا گیا ہے۔ سلاخ کے مرکزِ ثقل پر اُتار $\text{لا} = \frac{\text{ل}}{۲}$ رکھنے سے حاصل ہوتا ہے،

پس اگر ما = سلاخ کے مرکزِ ثقل کا اُتار

$$\text{تو ما} = \frac{۵}{۴۸} \cdot \frac{\text{ک ج ل}^{۳}}{\text{مج ی}} \quad \text{......(۲۵)}$$

یہاں بھی سلاخ کی کمیت نظر انداز کر دی گئی ہے۔
فرض کرو کہ سلاخ کی کمیت م بھی اب زیرِ بحث ہے

چونکہ سلاخ کی کمیت کی وجہ سے ایک قوت نیچے کی جانب عمل کر رہی ہے۔ اسلئے خمیدگی کا معیار اثر نقطہ فنا پر صرف اس کی وجہ سے

$$= \frac{۴ (ل - لا)^{۲}\ ج}{ل^{۲}}$$

لہذا خمیدگی کا مجموعی معیار اثر $= ھ = ک\ ج\ (ل - لا) + \frac{۴ ج (ل - لا)^{۲}}{ل^{۲}}$

$$= ی\ مج\ \frac{فر^{۲}\ ما}{فر\ لا^{۲}}$$

اس کو تکملانے سے :- $ی\ مج\ \frac{فر\ ما}{فر\ لا} = ک\ ج \left(ل\ لا - \frac{لا^{۲}}{۲}\right)$

$$+ \frac{۴ ج}{ل^{۲}} \left(ل^{۲}\ لا - ل\ لا^{۲} + \frac{لا^{۳}}{۳}\right) + گ \quad \text{.........} \quad (۲۶)$$

(جہاں گ کوئی مستقل ہے)

لیکن جبکہ $لا = صفر$ تو $\frac{فر\ ما}{فر\ لا} = صفر$

اس لئے $گ = صفر$

پھر دوبارہ تکملانے سے :-

$$ی\ مج\ ما = ک\ ج \left(\frac{ل\ لا^{۲}}{۲} - \frac{لا^{۳}}{۶}\right) +$$

$$+ \frac{۴ ج}{ل^{۲}} \left(\frac{ل^{۲}\ لا^{۲}}{۲} - \frac{ل\ لا^{۳}}{۳} + \frac{لا^{۴}}{۱۲}\right) + گ' \quad \text{.........} \quad (۲۷)$$

لیکن جبکہ $لا = صفر$ تو $ما = صفر$ اسلئے مستقل $گ' = صفر$

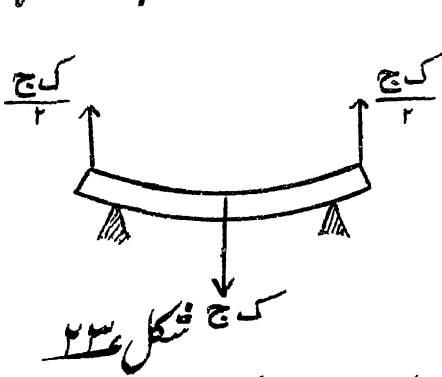
سرے پر اتار یا جھکاؤ دریافت کرنیکے لئے $لا = ل$ رکھنا چاہیئے۔

$$\therefore ما = \frac{ک\ ج\ ل^{۳}}{۳\ ی\ مج} + \frac{۴\ ج\ ل^{۳}}{۸\ ی\ مج} \quad \text{.........} \quad (۲۸)$$

چنانچہ مرکز ثقل پر اتار $لا = \frac{ل}{۲}$ رکھنے سے :-

$$ما = \frac{۵}{۴۸} \cdot \frac{ک\ ج\ ل^{۳}}{ی\ مج} + \frac{۱۷}{۳۸۴} \cdot \frac{۴\ ج\ ل^{۳}}{ی\ مج} \quad \text{.........} \quad (۲۹)$$

سلاخ جو دونوں سروں پر سہاری ہوئی ہو اور درمیان میں اسپر وزن رکھا گیا ہو۔

فرض کرو کہ شکل ۲۳ میں جو سلاخ دکھائی گئی ہے اس کے وسط میں ایک وزن ک ج لٹکایا جاتا ہے۔ سلاخ دو دھاریدار کناروں پر رکھی ہوئی ہے۔

ایسی صورت میں سلاخ کے ایک سرے پر اوپر کی جانب $\frac{\text{ک ج}}{۲}$ کی قوت عمل کرے گی اور دوسرے سرے پر بھی $\frac{\text{ک ج}}{۲}$ کی قوت عمل کرے گی تاکہ تعادل قائم رہے۔

$\frac{\text{ک ج}}{۲}$   $\frac{\text{ک ج}}{۲}$

ک ج

شکل ۲۳

وسطی حصہ کا اُتار دریافت کرنے کے لیے اوپر کے ضابطہ (۲۴) میں ک ج کے بجائے $\frac{\text{ک ج}}{۲}$ اور ل کے بجائے $\frac{\text{ل}}{۲}$ رکھنا چاہیئے یعنی وسطی حصہ میں اُتار اگر $\text{ما}_۲$ فرض کیا جائے تو

$$\text{ما}_۲ = \frac{\frac{\text{ک ج}}{۲}\left(\frac{\text{ل}}{۲}\right)^۳}{۳\ \text{مج ی}} = \frac{\text{ک ج ل}^۳}{۴۸\ \text{مج ی}} \quad \text{......(۳۰)}$$

یہ یاد رکھنا ضروری ہے کہ یہاں بھی سلاخ کا وزن نظر انداز کر دیا گیا ہے۔ سلاخ کے وزن کو نظر انداز نہ کرنے کی صورت میں اور یہ یاد رکھتے ہوئے کہ اس کی کمیت م ہے، پہلے کی طرح سلاخ کے ایک سرے سے لا فاصلہ پر کوئی نقطہ ف تصور کرو۔

لہذا نقطہ ف پر خمیدگی کا مجموعی معیار اثر = ی مج $\frac{\text{فر}^۲\ \text{ما}}{\text{فر لا}^۲}$

$$= \frac{\text{ک ج} + \text{م ج}}{۲}\left(\frac{\text{ل}}{۲} - \text{لا}\right) - \frac{\text{م ج}\left(\frac{\text{ل}}{۲} - \text{لا}\right)^۲}{۲\text{ل}}$$

اس کو تکملانے سے :- $\text{ی مج}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{ک ج} + ۴\text{ج}}{۲}\left(\frac{\text{ل لا}}{۲} - \frac{\text{لا}^{۲}}{۲}\right) -$

$- \frac{۴\,\text{ج}}{\text{ل}^{۲}}\left(\frac{\text{ل}^{۲}\,\text{لا}}{۴} - \frac{\text{ل لا}^{۲}}{۲} + \frac{\text{لا}^{۳}}{۳}\right) + \text{گ}$ [جہاں گ مستقل ہے]

لیکن جبکہ لا = صفر تو $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ = صفر اسلئے گ = صفر

اسکو دوبارہ تکملانے سے :-

$\text{ی مج ما} = \frac{\text{ک ج} + ۴\text{ج}}{۲}\left(\frac{\text{ل لا}^{۲}}{۴} - \frac{\text{لا}^{۳}}{۶}\right) -$

$\frac{۴\,\text{ج}}{\text{ل}^{۲}}\left(\frac{\text{ل}^{۲}\,\text{لا}^{۲}}{۸} - \frac{\text{ل لا}^{۳}}{۶} + \frac{\text{لا}^{۴}}{۱۲}\right) + \text{گَ}$ [جہاں گَ مستقل]

لیکن جبکہ لا = صفر تو ما = صفر ∴ گَ = صفر

وسطی حصہ پر اُتار دریافت کرنے کیلئے لا = $\frac{\text{ل}}{۲}$ رکھنا ہوگا۔

$\text{لہذا ماَ} = \frac{\text{ک ج ل}^{۳}}{۴۸\ \text{ی مج}} + \frac{۵\ ۴\ \text{ج ل}^{۳}}{۳۸۴\ \text{ی مج}}$ ............... (۳۱)

اگر سلاخ کے دونوں سرے آزاد ہوں اور اسکا وسطی حصہ کسی سہارے پر لٹکا ہوا ہو۔ دیکھو شکل ۲۴ تو چونکہ وسطی حصہ پر تمام وزن مجتمع ہوگیا ہے لہذا ک ج = -۴ ج رکھ کر اوپر کی طرح عمل کریں تو

سروں پر خود سلاخ کے وزن ۴ ج کی وجہ سے اُتار = $\frac{۱}{۱۲۸} \cdot \frac{۴\,\text{ج ل}^{۳}}{\text{ی مج}}$

یعنے سلاخ کے وزن کی وجہ سے قوت

شکل ۲۴

چونکہ مخالف سمت میں عمل کر رہی ہے اس لئے مساوات (۳۱) کو ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں:-

$\text{ماَ} = \frac{\text{ک ج ل}^{۳}}{۴۸\ \text{مج ی}} - \frac{۵}{۳۸۴} \cdot \frac{۴\,\text{ج ل}^{۳}}{\text{مج ی}}$

یہاں اگر ک ج = ۴ ج رکھا جائے تو وہی نتیجہ حاصل ہوگا۔

اگر سلاخ کے دونوں سروں کو سہاروں[10] پر ٹکا کر، سلاخ کے درمیانی حصہ پر اوپر کی جانب ایک قوت د کو عمل کرنے دیا جائے تو مساوات (۳۱) حسب ذیل ہو جائے گی:—

$$\text{ماَ} = \frac{5}{384}\cdot\frac{\text{م ج ل}^{3}}{\text{مج ی}} - \frac{\text{د ل}^{3}}{48\ \text{مج ی}}$$

$\frac{5}{8}$ م ج

شکل ۲۵

اگر ماَ = صفر تو $\text{د} = \frac{5}{8}$ م ج

یعنی سلاخ کے درمیانی حصہ کو اوپر کی طرف $\frac{5}{8}$ م ج قوت سے ڈھکیلنا ہوگا تاکہ خماؤ یا جھکاؤ صفر ہو۔

اگر سلاخ کے دونوں سرے سہاروں پر ٹکا دئے جائیں اور ہر ایک سرے پر ک ج وزن لٹکایا جائے (دیکھو شکل ۲۶) تو ایسی صورت میں سلاخ کا اپنے معمولی مقام سے چڑھاؤ "ما" حسب ذیل طریقہ سے معلوم ہوگا:—

ف ل ف

ک ج ک ج

شکل ۲۶

فرض کرو کہ ل = سلاخ کا طول دھاریدار کناروں کے درمیان اور ف = سلاخ کے کسی ایک سرے سے دھاریدار کنارہ تک فاصلہ ظاہر ہے کہ جفت = ک ج ف = $\frac{\text{ی مج}}{\text{ص}}$ ..... (۳۲)

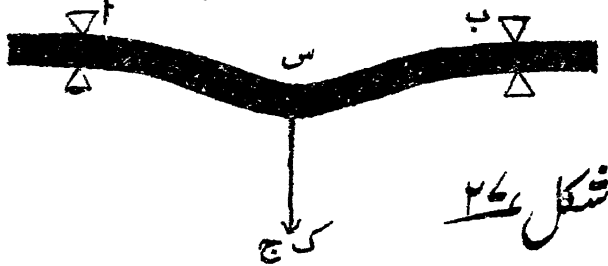
لیکن یہ ہم کو معلوم ہے کہ ما (۲ ص − ما) = $\left(\frac{\text{ل}}{2}\right)^{2}$

اگر ما کے مقابلہ میں ص بہت بڑا ہو تو $\text{ص} = \frac{\text{ل}^{2}}{8\ \text{ما}}$

$$\therefore\ \text{ک ج ف} = \frac{8\ \text{ما ی مج}}{\text{ل}^{2}}$$

$$\text{یعنی ما} = \frac{\text{ک ج ف ل}^{2}}{8\ \text{ی مج}} \quad \ldots\ldots\ldots (۳۳)$$

ایسی سلاخ جو دونوں سروں پر جکڑ دی گئی ہے لیکن درمیان میں اس پر وزن رکھا گیا ہے۔

فرض کرو کہ ا ب ایک سلاخ ہے جو سروں ا اور ب پر جکڑ دی گئی ہے اور س پر وزن رکھا گیا ہے دیکھو شکل ۲۷۔

شکل ۲۷

ا اور ب پر سہاروں کا عمل سلاخ پر ایک انتصابی قوت اور ایک جفت کے مماثل ہو گا۔ یہاں بھی ہم سلاخ کے وزن کو لٹکائے ہوئے وزن کے مقابلہ میں نظر انداز کئے دیتے ہیں۔ فرض کرو

ا ب = ل

سہاروں پر انتصابی قوت = $\frac{\text{ک ج}}{۲}$

جفت م = $\frac{\text{ا س}}{۲} \times \frac{\text{ک ج}}{۲} = \frac{\text{ا س} \times \text{ک ج}}{۴} = \frac{\text{ک ج ل}}{۸}$

اگر سلاخ ا اور ب پر نہ جکڑی جاتی تو جفت $\left(\frac{\text{ک ج}}{۲} \cdot \text{ا س}\right)$ کے مساوی ہوتا

لیکن چونکہ سلاخ جکڑی ہوئی ہے اسلئے جفت اسکا نصف ہو گا۔
سلاخ کے وزن کو نظر انداز کرتے ہوئے، صرف انتصابی قوت کی وجہ سے س پر اُتار = ہا = $\frac{\text{ک ج ل}^۳}{۴۸ \text{ ی مج}}$

فرض کرو کہ جفت کی وجہ سے نقطہ س، اپنے افقی مقام سے کوئی فاصلہ ما اوپر ہٹتا ہے اور سلاخ ایک ایسے دائرہ کی شکل میں خم یا جاتا ہے جس کا نصف قطر ص کے مساوی ہے۔

سادہ علم ہندسہ سے $\text{اس}^2 = \text{ما} \, (2\,\text{ص} - \text{ما})$

چونکہ ۲ص کے مقابلہ میں ما بہت چھوٹا ہے

$$\therefore \text{ما} = \frac{\text{اس}^2}{2\,\text{ص}} \quad \text{یعنی} \quad \text{ما} = \frac{\text{ل}^2}{8\,\text{ص}}$$

$$\text{لیکن}\ \text{مر} = \frac{\text{مج ی}}{\text{ص}} = \frac{\text{مج ی} \times 8\,\text{ما}}{\text{ل}^2}$$

$$\therefore \text{ما} = \frac{\text{مر ل}^2}{8\,\text{ی مج}} = \frac{\text{ک ج ل}^3}{64\,\text{ی مج}}$$

لہذا اس پر اُتار جبکہ قوت اور جفت دونوں عمل کرتے ہیں (11) = حاصل اُتار کے

$$= \text{ماَ} - \text{ما} = \frac{\text{ک ج ل}^3}{48\,\text{ی مج}} - \frac{\text{ک ج ل}^3}{64\,\text{ی مج}}$$

$$= \frac{\text{ک ج ل}^3}{192\,\text{ی مج}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۳۴)$$

دھاریدار پتی کا خماؤ:— جس طرح سلاخوں کی صورت میں عمل کیا گیا تھا پتیوں کی صورت میں بھی تقریباً وہی عمل ہوسکتا ہے لیکن کسی قدر تصحیح کی اس میں ضرورت ہوتی ہے۔

شکل (۲۱) سے واضح ہوگا کہ طولی بگاڑن $_1 = \frac{\text{د}_1\text{د}_2}{\text{دد}_1} = \frac{\text{د}_1\text{د}_2}{\text{ف ف}_1} = \frac{\text{ما}}{\text{ص}}$ ..... (۳۵)

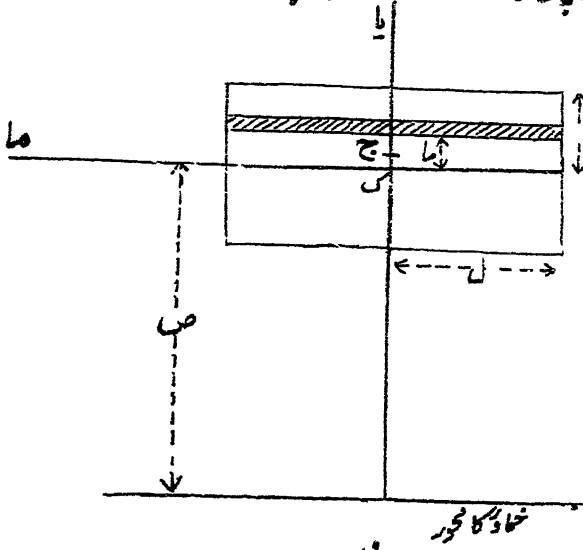
اور یہ بھی ظاہر ہے کہ عرضی گھٹاؤ $\text{ن}_2 = \text{ن}_1 \times \text{مر} = \frac{\text{مر ما}}{\text{ص}}$ ...... (۳۶)

فرض کرو کہ اس ٹکڑے پر طولی زور $= \text{ت} = \frac{\text{قوت}}{\text{رقبہ}}$

∴ اس ٹکڑے پر قوت = ت ا

∴ پوری سلاخ یا پٹی کے عرضی مستوی پر حاصل قوت = ∑ ت ا

∴ جفت یا خمیدگی کا معیار اثر = ∑ ت ا ما ......... (۳۷)

شکل ۲۸ میں پٹی کی تراش بتائی گئی ہے۔ فرض کرو اسکا مرکز ک اور ج مرکز ثقل ہے اور نیز یہ بھی فرض کرو کہ ک ج = لا اور تراش کا عرض = ۲ ب اور تراش کا طول = ۲ ل

شکل ۲۸

یہاں بھی پہلے کی طرح ایک دھجی تصور کرو جسکا عرض فرما ہے اور جو تعدیلی محور سے ما فاصلہ پر ہے اور اس کے تراش عمودی کا رقبہ = (فرض کرو) ا

فرض کرو کہ اس ٹکڑے پر عرضی وضع میں یعنی ما کی سمت میں زور = تَ

پہلے کی طرح ن۱ = عہ ت۱ − بہ (ق۲ + ق۳) =

= عہ ت − بہ مَت

$$= \frac{ت}{ی} - \frac{تَ\ مہ}{ی}$$

کیونکہ $\frac{1}{عہ}$ = ی اور $\frac{بہ}{عہ}$ = بہ ی = مہ

$$\therefore \frac{\text{ما}}{\text{ص}} = \frac{1}{\text{ی}}(\text{ت} - \text{تَ مہ}) \quad \ldots\ldots (۳۸)$$

اسی طرح $\text{ن}_2 = \text{عہ تَ} - \text{بہ ت}$

$$= \frac{1}{\text{ی}}(\text{تَ} - \text{ت مہ}) \quad \ldots\ldots (۳۹)$$

صحیح

∴ ان دونوں مساواتوں (۳۸) اور (۳۹) سے:-

$$\text{ت}(1 - \text{مہ}^2) = \text{ی}\left(\frac{\text{ما}}{\text{ص}} + \text{مہ ن}_2\right) \quad \ldots\ldots (۴۰)$$

$$\text{اور تَ}(1 - \text{مہ}^2) = \text{ی}\left(\frac{\text{مہ ما}}{\text{ص}} + \text{ن}_2\right) \quad \ldots\ldots (۴۱)$$

اس ٹکڑے پر قوت = ت ۲ل . فرما

$$\therefore \text{مجموعی قوت (جو تراش عمودی کے علی القوائم ہو)} = \int_{\text{لا}-\text{ب}}^{\text{لا}+\text{ب}} \text{ت ۲ل فرما}$$

$$= \int_{\text{لا}-\text{ب}}^{\text{لا}+\text{ب}} \frac{\text{ی}\left(\frac{\text{ما}}{\text{ص}} + \text{مہ ن}_2\right)}{1-\text{مہ}^2}\text{ ۲ل فرما}$$

$$= \left\{ \frac{\text{ی ۲ل}}{(1-\text{مہ}^2)}\left(\frac{\text{۲ب لا}}{\text{ص}} + \text{۲ب مہ ن}_2\right) \right\}$$

اب چونکہ مجموعی قوت (جو تراش عمودی کے علی القوائم ہے) اس قدر خفیف ہے کہ وہ تقریباً صفر کے مساوی ہے۔

$$\text{لہذا } \frac{\text{۲ب لا}}{\text{ص}} + \text{۲ ب مہ ن}_2 = \text{صفر}$$

$$\text{یعنی ن}_2 = -\frac{\text{لا}}{\text{ص مہ}} \quad \ldots\ldots (۴۲)$$

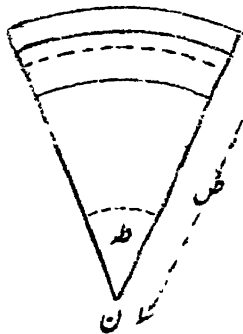
$$\therefore \text{ت}(1 - \text{مہ}^2) = \text{ی}\left(\frac{\text{ما}}{\text{ص}} - \frac{\text{لا}}{\text{ص}}\right) \quad \ldots\ldots (۴۳)$$

اب دوسری قوت جو اس ٹکڑے کے عرضی وضع میں عمل کر رہی ہے

$$= \text{تَ}(\text{ص} + \text{ما})\text{ طہ فرما}$$

چونکہ ٹکڑے کا طول = (ص + ما) طہ دیکھو شکل (۲۹)

∴ مجموعی قوت جو کہ ٹکڑے کے
عرضی وضع میں عمل کر رہی ہے $= \int_{\text{لا}-\text{ب}}^{\text{لا}+\text{ب}} \text{ت} (\text{ص} + \text{ما})\, \text{ط}\ \text{فرما}$

$$= \int_{\text{لا}-\text{ب}}^{\text{لا}+\text{ب}} \frac{\text{ی}\left(\frac{\text{مہ}\ \text{ما}}{\text{ص}} + \text{ن}_2\right)(\text{ص} + \text{ما})}{(۱ - \text{مہ}^2)}\, \text{ط}\ \text{فرما}$$

= صفر (کیونکہ ناقابل لحاظ ہے)

شکل ۲۹

∴ اس صورت میں $\text{ن}_2$

$$= -\ \text{مہ} \left\{ \frac{\text{لا}\ \text{ص} + \text{لا}^2 + \frac{\text{ب}^2}{۳}}{\text{ص}(\text{ص} + \text{لا})} \right\}$$

$$= -\frac{\text{لا}}{\text{ص}\ \text{مہ}}$$

چونکہ یہ لا میں دوم درجہ کی مساوات ہے

$$\therefore \text{لا} = \frac{\text{ص}}{۲} \left\{ -۱ \pm \sqrt{۱ + \frac{۴\,\text{مہ}^2\,\text{ب}^2}{۳(۱ - \text{مہ}^2)\,\text{ص}^2}} \right\}$$

اس کی صرف مثبت قیمت لینے سے :-

$\text{لا} = \frac{\text{مہ}^2\,\text{ب}^2}{۳(۱ - \text{مہ}^2)\,\text{ص}}$ کیونکہ ص کے مقابلہ میں ب بہت چھوٹا ہے۔

چونکہ ب²، ص کے مقابلہ میں بہت چھوٹا ہے اس لئے لا بہت چھوٹا ہوگا
یعنی $\text{ن}_2$ بہت ہی چھوٹا ہے۔
اسلئے مساوات (۴۰) سے :-

$$\text{ت}(۱ - \text{مہ}^2) = \text{ی}\left(\frac{\text{ما}}{\text{ص}} + \text{مہ}\ \text{ن}_2\right) \approx \frac{\text{ی}\ \text{ما}}{\text{ص}}$$

جفت یا خمیدگی کا معیار اثر = $\int$ ت ۱ ما

$$= \int \frac{ی\,ما}{ص(۱-م^۲)}\,۲ \cdot ما$$

$$= \int \frac{ی}{ص(۱-م^۲)}\,۱\,ما^۲$$

$$= \frac{ی\,مج}{ص(۱-م^۲)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۴۴)$$

پتیوں کی صورت میں یہ صحیح مساوات ہے۔

لچکدار منحنی (۱۲) :- فرض کرو کہ ایک سلاخ ۱ ب ایک کمان کی شکل میں خمائی گئی ہے یعنی ۱ اور ب نقطوں پر ایک ڈوری باندھ دی گئی ہے۔

حصہ س ب کے تعادل پر س پر کے زور اور ڈوری کے تناؤ ت کے تحت غور کرو۔

شکل ۳۰

اگر ص، س پر نصف قطر انحنا ہو تو:-

$$جفت = ت \times ما = \frac{ی\,مج}{ص} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۴۵)$$

جہاں ما = س ن اور ی = سلاخ کے مادے کا ینگ کا معیار لچک اور مج = سلاخ کا سطحی جمود کا معیار اثر ایسے ایک محور کے گرد، جو خماؤ کے مستوی کے علی القوائم ہو اور سلاخ کے مرکز میں سے گزرتا ہے۔

ظاہر ہے کہ $\frac{۱}{ص} \propto ما$

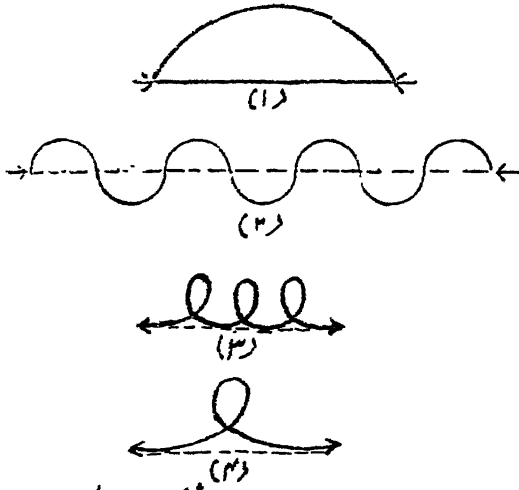
لہٰذا وہ منحنی جس میں سلاخ کا مرکزی محور خمایا جاتا ہے ایسا ہوتا ہے کہ کسی نقطہ پر انحنا کے نصف قطر کا مقلوب، سیدھی سلاخ کے مقام سے نقطہ کے فاصلہ کے متناسب ہوتا ہے ایسی خواص کی منحنیاں لچکدار منحنیوں کے نام سے تعبیر کی جاتی ہیں۔ اس خاصیت کی منحنیاں مختلف شکلوں میں

ایک گھڑی کی کمانی لیکر اس کے سروں کو ایک ساتھ ڈھکیلنے یا کھینچنے سے بنائی جا سکتی ہیں۔ چند اس قسم کی منحنیوں کی شکلیں ذیل میں دکھائی گئی ہیں (شکل ۱۳۱)

(۱)

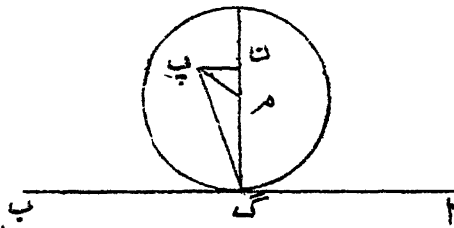
(۲)

(۳)

(۴)

شکل ۱۳۱

پیکان کے نشانوں کی سمت سے لگائی ہوئی قوت کی سمت ظاہر ہوتی ہے۔

ہم اب یہ ثابت کریں گے کہ منحنی (۱) ایک نقطہ کا راستہ ہے اور یہ نقطہ ایک ایسے دائرے کے مرکز کے قریب واقع ہے جو پھسلنے کے بغیر ایک خط مستقیم میں لڑھکتا چلا جاتا ہے۔

فرض کرو کہ (شکل ۱۳۲) میں ایک دائرہ جس کا مرکز م ہے پھسلنے کے بغیر یکساں زاویٔ رفتار ω سے ایک خط مستقیم ا ب پر لڑھک رہا ہے۔ اور یہ بھی فرض کرو کہ پ ایک نقطہ ہے جو م سے قریب ہے۔ اور خط ا ب سے دائرہ کے تماس کا نقطہ گ ہے۔

ت پ م ب گ ا

شکل ۱۳۲

پ ل ایک خط ایسا کھینچو جو م گ کے علی القوائم ہو۔ اگر نقطہ پ کی رفتار س اور اس کے راستہ کا نصف قطر انحناص سے تعبیر کئے جائیں تو پ کا اسراع راستہ کے عمود کی سمت میں $= \frac{س^2}{ص}$

گ کی رفتار صفر ہے - اور چونکہ یہ پورا انتظام گ کے گرد گھوم رہا ہے اسلئے پ کی رفتار پ گ کی سمت کے علی القوائم ہے -

$$\therefore \text{ر} = \omega \times \text{ف}_1 \quad \text{جہاں پ گ} = \text{ف}_1$$

پ کا اسراع = م کا اسراع + پ کا اضافی اسراع م کا لحاظ کرتے ہوئے۔

لیکن م یکساں رفتار سے ایک خط مستقیم پر حرکت کرتا ہے جبکہ دائرہ لڑھکتا رہتا ہے لہذا م کا اسراع صفر ہے۔

اور چونکہ م کے گرد پ ایک دائرہ بناتا ہے اس لئے پ کا اضافی اسراع پ م کی سمت میں م کا لحاظ کرتے $= \text{ف}_2 \times \omega^2$ جہاں $\text{ف}_2$ = م پ

لہذا پ کا اسراع اسکے راستہ کے عماد کی سمت میں =

$$= \omega^2 \text{ف}_2 \,\text{جم}\, \angle\text{م پ گ}$$

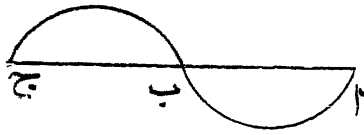
$$= \frac{\text{ر}^2}{\text{ص}} = \frac{\omega^2 \text{ف}_1^2}{\text{ص}}$$

$$\therefore \frac{1}{\text{ص}} = \frac{\text{ف}_2 \,\text{جم}\, \angle\text{م پ گ}}{\text{ف}_1^2}$$

چونکہ پ، م کے بالکل قریب ہے اسلئے $\angle$م پ گ بہت چھوٹا ہے اور تقریباً $\angle$پ م ن کے مساوی ہے اور نیز پ گ تقریباً دائرہ کے نصف قطر ن کے مساوی ہے۔

$$\therefore \frac{1}{\text{ص}} = \frac{\text{ف}_2 \frac{\text{ن م}}{\text{پ م}}}{\text{ف}_1^2} = \frac{\text{م ا}}{\text{ف}_1^2} = \frac{\text{م ا}}{\text{ن}^2} \quad \ldots\ldots\ldots (۴۶)$$

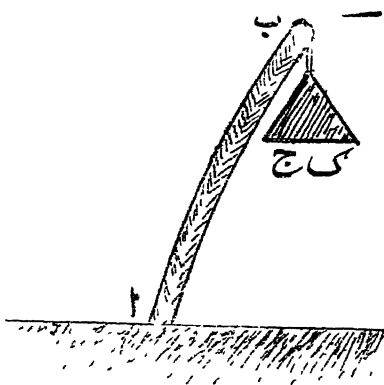
اس سے ظاہر ہے کہ $\frac{1}{\text{ص}} \propto \text{م ا}$

نقطہ پ کی حرکت سے جو منحنی بنتا ہے وہ شکل (۴۳) سے ظاہر ہے۔

اس سے واضح ہے کہ کوئی دو
نقطوں ا اور ج کے درمیان
فاصلہ = ۲ π ن
مساوات (۴۵) سے :-

$$ت\ ما = \frac{ی\ مج}{ص} = \frac{ی\ مج\ ما}{ن^2}$$

$$\therefore ن^2 = \frac{ی\ مج}{ت} \quad \text{......(۴۷)}$$

ایک ایسی سلاخ جو انتصاباً زمین میں ثابت کی گئی ہو اور اسکے اوپر کے سرے پر وزن رکھا گیا ہو :-

شکل ۳۳

شکل ۳۴

شکل ۳۴ میں ایک سلاخ ا ب دکھلائی گئی ہے جو زمین میں ا پر انتصاباً قائم کی گئی ہے۔
فرض کرو کہ اسکے اوپر کے سرے ب سے ایک وزن ک ج لٹکایا جاتا ہے۔ اگر وزن بہت زیادہ ہو تو سلاخ خم جائے گی جیسا کہ شکل میں دکھلایا گیا ہے۔ اس سلاخ کی شکل کا (شکل ۳۳) کے منحنی سے مقابلہ کرنے سے ظاہر ہوتا ہے کہ سلاخ کے قاعدہ کے خط اور نقطہ ب کے درمیان فاصلہ = شکل ۳۳ میں ا ج کا $\frac{1}{4}$ فاصلہ
اگر سلاخ کا طول = ل تو تعادل کے لئے

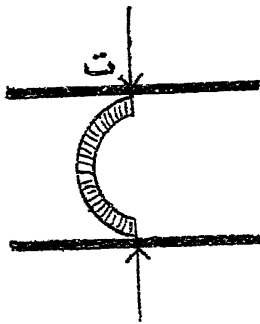
$$ل = \frac{\pi\ ن}{۲} = \frac{\pi}{۲} \sqrt{\frac{ی\ مج}{ک\ ج}}$$

$$\therefore \quad \text{ک ج} = \frac{\pi^2 \, \text{ی مج}}{4 \, \text{ل}^2}$$

یعنی ک ج کو $\frac{\pi^2 \, \text{ی مج}}{4 \, \text{ل}^2}$ سے کم ہوجانا چاہیئے تاکہ سلاخ خم نہ سکے یا بالفاظ دیگر اگر اس سے ک ج بڑھ جائے تو سلاخ خم جائیگی۔

اگر سلاخ استوانہ نما ہو تو مج = $\frac{\pi \, \text{ب}^4}{4}$ جہاں ب = سلاخ کا نصف قطر۔

چونکہ کوئی سلاخ کسی محدود وزن کو' بغیر خمے ہوئے سہار نہیں سکتی اور ل کے بڑھنے سے یہ وزن کم ہوتا جاتا ہے اسلئے ایک دی ہوئی تراش عمودی کی سلاخ' اگر کافی بلند ہو تو صرف اپنے وزن سے خمنے لگے گی' بشرطیکہ یہ فرض کیا جائے کہ سلاخ کا وزن اس کے مرکز پر مجتمع ہوگیا ہے۔ لہذا اگر سلاخ کا وزن خود ک ج کے مساوی ہو جو اس کے درمیانی نقطہ پر عمل کرتا ہوا فرض کیا جاتا ہے' تو ایسی صورت میں تعادل کے لئے' سلاخ کی بلندی کی بھی ایک خاص حد ہوگی۔

لیکن سلاخ' بجائے ایک سرے پر ثابت کئے جانے کے' اگر دونوں سروں سے مساوی طور پر اس طرح دبائی جائے کہ اسکے سرے آزادانہ حرکت کرسکیں' تو سلاخ کی شکل ایسی ہو جائے گی جو (شکل ۳۵) میں دکھلائی گئی ہے۔ اس صورت میں اس کی شکل کو شکل (۳۳) کے منحنی سے مقابلہ کرنے سے ہمکو یہ مساوات حاصل ہوگی:-

$$\text{ل} = \pi \text{ن} = \pi \sqrt{\frac{\text{ی مج}}{\text{ت}}}$$

یعنے قوت ت کو $\frac{\pi^2 \, \text{ی مج}}{\text{ل}^2}$ سے کم ہونا چاہیئے تاکہ پیشتر کی طرح سلاخ سیدھی رہے۔



شکل ۳۵

اگر سلاخ کے سرے قائم کردئے جائیں
اور پھر ان کو ایک قوت ت سے دبایا جائے
تو سلاخ شکل (نمبر ۳۶) اختیار کریگی۔
یہاں ایسی مساوات حاصل ہوگی:۔

ل = ۲π ن = ۲π √(ی جھ / ت)

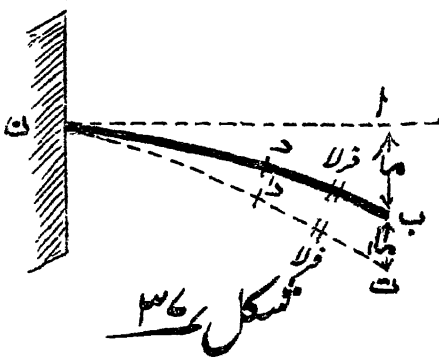
یعنی اس صورت میں سلاخ کے
تعادل کے لئے ت کو (π² ی جھ / ل²)
سے کم ہونا چاہیئے۔

ت

شکل ۳۶

سلاخوں کا ارتعاش:۔ فرض کرو
کہ ایک سلاخ ا ن' کا ایک سرا دیوار میں جوڑ دیا گیا ہے اور وہ اُفقی
وضع میں کسی وزن رکھنے کے
قبل قائم رہتی ہے۔ اگر اسکے
سرے پر وزن ک ج رکھا
جائے تو

ن ا د فرلا ما ب د ما فرلا ت

شکل ۳۷

فرض کرو کہ اُتار =
= ما جو کہ شکل ۳۷ سے
ظاہر ہے۔
تو ما = (ک ج ل³ / ۳ جھ ی) + (کچھ اور بشرطیکہ ہم اس سلاخ کی کمیت
کو بھی لیں)
فرض کرو کہ اب ایک نیا وزن کَ ج آویزاں کرنے کے بعد سلاخ
کا سرا ت پر آجاتا ہے۔
یعنی کَ ج کی وجہ سے اُتار = مَا + ما، (فرض کرو)

تب $ما + ما_۱ = \frac{كَ ج ل^۲}{۳ مج ی}$ + (کچھ اور' اگر ہم اس سلاخ

کی کمیت کو بھی لیں)

اوپر کی دونوں مساواتوں کو تفریق کرنے سے:

$$مَا + ما_۱ - مَا = ما_۱ = \frac{(كَ - ک) ج ل^۲}{۳ مج ی} \quad ...... (۴۸)$$

یعنی $كَ ج - ک ج = \frac{ما_۱ ۳ مج ی}{ل^۲}$ = وہ قوت جو سلاخ کو تعادل

میں لانے کی کوشش کرتی ہے = کمیت × اسراع =

$= \frac{ج کٗ}{ج} \cdot \frac{فر^۲ ما_۱}{فر و^۲}$ یہاں ج کٗ سے مراد وہ وزن ڈائینوں

میں ہے جو اہتزاز کے وقت رکھا گیا تھا' یعنی کمیت 'کٗ گرام ہے۔

$\therefore \frac{فر^۲ ما_۱}{فر و^۲} = \frac{۳ مج ما_۱ ی}{کٗ ل^۲}$ 'یہ ایک سادہ موسیقی حرکت ہے' لہذا

$$\text{وقت دوران } و = ۲ \pi \sqrt{\frac{کٗ ل^۲}{۳ ی مج}} \quad ............ (۴۹)$$

اب ہم سلاخ کی کمیت کو لیکر بحث کرینگے :-

اگر سلاخ یکساں ہو تو اسکا مرکز ثقل د' درمیانی نقطہ سے تعبیر ہوگا

جب ۱' ب پر آئیگا تو فرض کرو کہ مرکز ثقل د کا اُتار = فہ

اب جبکہ ب' ت پر آئے گا فرض کرو کہ د' دَ پر آگیا یعنے ددَ

= فہ فرض کرو

اب سلاخ کو نیچے اُتارنے کے لئے جو کام کیا گیا $= \int_{صفر}^{ما} (كَ - ک) ج \, فر ما_۱$

$$= \int_{\text{صفر}}^{\text{ما}} \frac{۳\, \text{مج}\, \text{ی}\, \text{ما}_۱\, \text{فرما}_۱}{\text{ل}^۳} = \frac{۳\, \text{مج}\, \text{ی}\, \text{ما}_۱^۲}{۲\, \text{ل}^۳}$$

∴ پوری توانائی بالقوہ اس سلاخ کی ن ت وضع میں

$$= \frac{۳\, \text{مج}\, \text{ی}\, \text{ما}_۱^۲}{۲\, \text{ل}^۳} - \text{کَ}\, \text{ج}\, \text{ما}_۱ - \text{م}\, \text{ج}\, \text{فہ} \quad \text{جہاں م} =$$

= سلاخ کی کمیت

لیکن مساوات (۲۹) سے ہم جانتے ہیں کہ

$$\text{فہَ} = \frac{۵\, \text{ک}\, \text{ج}\, \text{ل}^۳}{۴۸\, \text{ی}\, \text{مج}} + \frac{۱۷}{۳۸۴} \cdot \frac{\text{م}\, \text{ج}\, \text{ل}^۳}{\text{ی}\, \text{مج}}$$

$$\text{اور فہ} + \text{فہَ} = \frac{۵}{۴۸} \cdot \frac{\text{کَ}\, \text{ج}\, \text{ل}^۳}{\text{ی}\, \text{مج}} + \frac{۱۷}{۳۸۴} \cdot \frac{\text{م}\, \text{ج}\, \text{ل}^۳}{\text{ی}\, \text{مج}}$$

$$\therefore \text{فہ} = \frac{۵}{۴۸} \cdot \frac{(\text{کَ} - \text{ک})\, \text{ج}\, \text{ل}^۳}{\text{ی}\, \text{مج}} = \frac{۵}{۱۶}\, \text{ما}_۱ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۵۰)$$

$$\therefore \text{پوری توانائی بالقوہ} = \frac{۳\, \text{مج}\, \text{ی}\, \text{ما}_۱^۲}{۲\, \text{ل}^۳} - \text{کَ}\, \text{ج}\, \text{ما}_۱ - \frac{۵}{۱۶}\, \text{م}\, \text{ج}\, \text{ما}_۱ \quad \ldots (۵۱)$$

اب ہم اس سلاخ کی توانائی بالفعل ن ت کی وضع میں دریافت کریں گے۔

اس سلاخ میں ایک چھوٹا سا ٹکڑا فرلا طول کان سے لا فاصلہ پر تصور کرو۔

اس ٹکڑے کی کمیت = $\frac{\text{م}}{\text{ل}}$ فرلا لہذا اس کی توانائی بالفعل

$$= \frac{۱}{۲} \cdot \frac{\text{م}\, \text{فرلا}}{\text{ل}} \left( \frac{\text{فرس}}{\text{فرو}} \right)^۲ \quad \ldots\ldots\ldots (۵۲)$$

جہاں س سے مراد وہ فاصلہ ہے جو ٹکڑا نیچے اُترا جبکہ ب، مقام ت پر آیا۔ فرض کرو کہ سَ سے مراد وہ فاصلہ ہے جو وہ ٹکڑا نیچے اُترا جبکہ ا مقام ب پر آیا۔ مساوات (۲۷) سے ظاہر ہے کہ

$$\text{سَ} = \frac{\text{کَ ج}}{\text{ی مج}}\left(\frac{\text{ل لا}^{۲}}{۲} - \frac{\text{لا}^{۳}}{۶}\right) + \frac{\text{م ج}}{۲\,\text{ل ی مج}}\left(\frac{\text{ل}^{۲}\,\text{لا}^{۲}}{۲} - \frac{\text{ل لا}^{۳}}{۳} + \frac{\text{لا}^{۴}}{۱۲}\right)$$

اور

$$\text{س} + \text{سَ} = \frac{\text{کَ ج}}{\text{ی مج}}\left(\frac{\text{ل لا}^{۲}}{۲} - \frac{\text{لا}^{۳}}{۶}\right) +$$

$$+ \frac{\text{م ج}}{۲\,\text{ل ی مج}}\left(\frac{\text{ل}^{۲}\,\text{لا}^{۲}}{۲} - \frac{\text{ل لا}^{۳}}{۳} + \frac{\text{لا}^{۴}}{۱۲}\right)$$

$$\therefore \text{س} = \frac{(\text{کَ} - \text{کَ})\,\text{ج}}{\text{ی مج}}\left\{\frac{\text{ل لا}^{۲}}{۲} - \frac{\text{لا}^{۳}}{۶}\right\} = \frac{۳\,\text{ما}}{\text{ل}^{۳}}\left\{\frac{\text{ل لا}^{۲}}{۲} - \frac{\text{لا}^{۳}}{۶}\right\}$$

∴ اس ٹکڑے کی توانائی بالفعل =

$$= \frac{۱}{۲}\cdot\frac{\text{م فرلا}}{\text{ل}}\left\{\frac{۳}{\text{ل}^{۳}}\left(\frac{\text{ل لا}^{۲}}{۲} - \frac{\text{لا}^{۳}}{۶}\right)\right\}^{۲}\cdot\left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرو}}\right)^{۲}$$

∴ پورے سلاخ کی توانائی بالفعل =

$$= \int_{\text{صفر}}^{\text{ل}} \frac{۱}{۲}\cdot\frac{\text{م فرلا}}{\text{ل}}\cdot\frac{۹}{\text{ل}^{۶}}\left(\frac{\text{ل لا}^{۲}}{۲} - \frac{\text{لا}^{۳}}{۶}\right)^{۲}\left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرو}}\right)^{۲}$$

$$= \frac{۳۳}{۱۴۰}\,\text{م}\left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرو}}\right)^{۲}$$

اب چونکہ کمیت کَ، ارتعاش کر رہی ہے لہذا اسکی توانائی بالفعل نِ ت وضع میں

$$= \frac{۱}{۲}\,\text{کَ}\left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرو}}\right)^{۲}$$

$\therefore$ مجموعی توانائی بالفعل $= \frac{1}{2}$ ک $\left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر و}}\right)^2 + \frac{33}{280}$ م $\left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر و}}\right)^2$ ....(۵۳)

لیکن بقائے توانائی سے توانائی بالفعل + توانائی بالقوہ = مستقل

$\therefore \frac{1}{2}\left(\text{ک} + \frac{33}{140}\text{م}\right)\left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر و}}\right)^2 +$

$+ \frac{3\,\text{مج ی ما}^2}{2\,\text{ل}^3} - \text{ک ج ما} - \frac{5}{16}\text{م ج ما} =$ مستقل

اس مساوات کو تفرقا لینے سے :-

$\frac{1}{2}\left(\text{ک} + \frac{33}{140}\text{م}\right)2\left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر و}}\right)\left(\frac{\text{فر}^2\,\text{ما}}{\text{فر و}^2}\right) +$

$+ \frac{3\,\text{مج ی}}{2\,\text{ل}^3} \cdot 2\,\text{ما} \cdot \frac{\text{فر ما}}{\text{فر و}} - \text{ک ج}\frac{\text{فر ما}}{\text{فر و}} - \frac{5}{16}\text{م ج}\frac{\text{فر ما}}{\text{فر و}} =$ صفر

یعنی $\left(\text{ک} + \frac{33}{140}\text{م}\right)\frac{\text{فر}^2\,\text{ما}}{\text{فر و}^2} + \frac{3\,\text{مج ی ما}}{\text{ل}^3} - \left(\text{ک ج} + \frac{5}{16}\text{م ج}\right) =$ صفر

فرض کرو کہ $\frac{3\,\text{مج ی ما}}{\text{ل}^3} - \left(\text{ک ج} + \frac{5}{16}\text{م ج}\right) = \text{عہ}$

تب $\frac{\text{فر}^2\,\text{عہ}}{\text{فر و}^2} = \frac{3\,\text{مج ی}}{\text{ل}^3} \cdot \frac{\text{فر}^2\,\text{ما}}{\text{فر و}^2}$ یعنی $\frac{\text{فر}^2\,\text{ما}}{\text{فر و}^2} = \frac{\text{ل}^3}{3\,\text{مج ی}} \cdot \frac{\text{فر}^2\,\text{عہ}}{\text{فر و}^2}$

$\therefore \left(\text{ک} + \frac{33}{140}\text{م}\right)\frac{\text{ل}^3}{3\,\text{مج ی}} \cdot \frac{\text{فر}^2\,\text{عہ}}{\text{فر و}^2} + \text{عہ} =$ صفر

یہ ایک سادہ موسیقی حرکت کی مساوات ہے۔

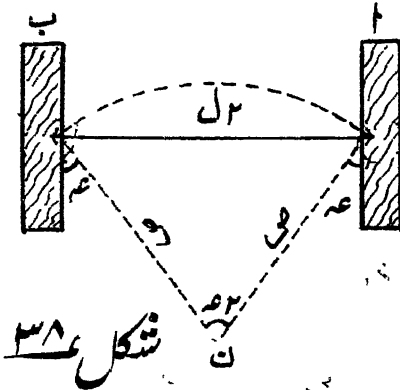
$\therefore$ وقت دوران $\text{د} = 2\pi\sqrt{\frac{\left(\text{ک} + \frac{33}{140}\text{م}\right)\text{ل}^3}{3\,\text{مج ی}}}$ ........ (۵۴)

اس مساوات کے ذریعہ ہم کسی سلاخ کے مادے کا ینگ کا معیار لچک آسانی سے معلوم کر سکتے ہیں۔ اگر سلاخ مستطیلی شکل کی ہو تو $\text{مج} = \frac{\text{ب د}^3}{12}$

جہاں ب = سلاخ کا عرض اور د = سلاخ کی گہرائی

(۱۴)

## ی اور د کی قیمتیں دریافت کرنیکے لئے سرل کا طریقہ:۔

فرض کرو کہ شکل ۳۸ میں ا اور ب دو بالکل ایک ہی شکل اور ایک ہی وزن کی دو سلاخیں ہیں اور ان کے درمیان ایک موٹے تار کے دونوں سرے قائم کئے گئے ہیں اور دونوں سلاخیں تپلی ڈوریوں کے ذریعے افقی وضع میں (سلاخوں کے) درمیانی نقطوں سے اسطرح لٹکائی گئی ہیں کہ انکے طولوں کی سمتیں ایک دوسرے کی متوازی ہیں۔ اب اگر سلاخوں کو افقی مستوی میں دائری وضع میں اسطرح اہتزاز کرنے دیں کہ انکے سرے پہلے ایک دوسرے کے قریب ہونے لگیں اور بعد میں آزادانہ حرکت کرنے لگیں تو تار میں خماؤ پیدا ہوگا۔ اگر تار کا طول = ۲ ل اور ہر ایک سلاخ کسی آن میں اپنی پہلی وضع سے زاویہ عہ گھومے تو تار میں جو اسکے خمانے کے لئے جفت پیدا ہوگا $= \dfrac{\text{مجھ ی}}{\text{ص}_1}$

ب ا ۲ل عہ عہ ی ی ۲عہ ن

شکل ۳۸

جہاں $\text{ص}_1$ = نصف قطر انحنا جو تار کے خماؤ کی وجہ واقع ہوا۔

$$\therefore \frac{\text{مجھ ی}}{\text{ص}_1} = \text{ک ف}_1^2 \, \frac{\text{فر}^2\text{عہ}}{\text{فرو}^2}$$

جہاں $\text{ک ف}_1^2$ = اس سلاخ کے جمود کا معیار اثر ایسے انتصابی محور کے گرد جو اسکے مرکز جاذبیت سے گزرتا ہو۔

$$\therefore \text{ک ف}_1^2 \, \frac{\text{فر}^2\text{عہ}}{\text{فرو}^2} = \frac{\text{مجھ ی} \times ۲\text{عہ}}{۲\text{ل}}$$

$$\text{یعنی} \quad \frac{\text{فر}^2\text{عہ}}{\text{فرو}^2} = \frac{\text{مجھ ی عہ}}{\text{ل ک ف}_1^2}$$

یہ ایک سادہ موسیقی حرکت ہے۔

$$\therefore \text{وقت دوران } \text{و} = 2\pi\sqrt{\frac{\text{ل ک ف}^2}{\text{مج ی}}} =$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{4\,\text{ل ک ف}^2}{\text{ی}\,\pi\,\text{ص}^4}} \quad \text{......(۵۵)}$$

جہاں ص = تار کا نصف قطر

لہذا اسکے ذریعہ تار کے مادے کا ینگ کا معیار لچک معلوم کیا جا سکتا ہے۔

فرض کرو کہ اسکے بعد ایک سلاخ کو اوپر قائم کیا جاتا ہے اور دوسری سلاخ کو اسی ہی تار کے ذریعہ شکل ۳۹ کی طرح لٹکا کر دائری وضع میں اہتزاز کرنے دیا جاتا ہے۔ ایسی صورت میں تار میں مروڑ پیدا ہوگا۔

مساوات (۵) سے

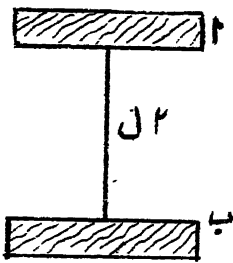
$$\text{وقت دوران } \text{و}_1 = 2\pi\sqrt{\frac{2\,\text{ک ف}^2\,\text{ل}}{\text{د}\,\pi\,\text{ص}^4}}$$

لیکن اس ضابطہ میں ل = تار کا طول

$$\text{اگر ۲ ل کو تار کا طول لیا جائے تو } \text{و}_1 = \sqrt{\frac{4\,\text{ک ف}^2\,\text{ل}}{\text{د}\,\pi\,\text{ص}^4}} \quad \text{......(۵۶)}$$

ا

۲ ل

ب

شکل ۳۹

اگر $\text{و}_1$ کی قیمت معلوم ہو جائے تو د معلوم ہو جاتا ہے اور پوا سان کی نسبت = مہ = $\frac{\text{ی}}{2\,\text{د}} - 1$ آسانی سے دریافت کیجا سکتی ہے۔

مہ صرف $\text{و}_1$ اور و معلوم ہونے سے بھی دریافت کیا جا سکتا ہے۔

$$\text{مساوات (۵۵) سے } \text{و}^2 = \frac{4\pi^2\,4\,\text{ل ک ف}^2}{\text{ی}\,\pi\,\text{ص}^4}$$

$$\therefore \text{ی} = \frac{16\,\pi^2\,\text{ل ک ف}^2}{\text{و}^2\,\pi\,\text{ص}^4}$$

اور مساوات (۵۶) سے

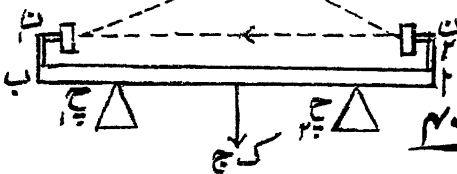
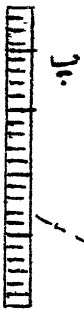
$$د = \frac{۱۶ \, \pi^{۲} \, ک \, ف^{۲} \, ل}{و_{۱}^{۲} \, \pi ٦ \, ص^{۴}}$$

$$\therefore \; \mu = \frac{ی}{۲ د} - ۱ = \frac{و_{۱}^{۲}}{۲ و_{۲}^{۲}} - ۱ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (۵۷)$$

**ی کی دریافت سلاخ کے خماؤ سے :۔** کسی سلاخ کے مادہ کا ینگ کا معیار لچک عموماً ایک آسان طریقہ سے دریافت کیا جاتا ہے جس میں سلاخ دونوں سروں پر سہاری جاتی ہے اور وزن اس کے درمیان میں رکھا جاتا ہے۔ مساوات (۲۱) کی مدد سے ی کی قیمت دریافت کیجاتی ہے۔

ایک سوئی کے سرے کو سلاخ کے مرکز پر جما کر اور متحرک خوردبین سے سلاخ کے اُتار کو جبکہ اس کے مرکز پر مختلف اوزان لگائے جائیں، دیکھ کر اُتار کی قیمت دریافت کی جاتی ہے۔

**ی کی دریافت کونِگ کے طریقہ سے :۔**

شکل نمبر ۴ میں ا ب ایک سلاخ ہے جو دو دھاریدار کناروں چ۱ اور چ۲ پر ٹکی ہوئی ہے ن۱ اور ن۲ دو سادہ مستوی آئینے ہیں جو سلاخ کے ساتھ اس کے سروں پر جوڑ دئے جاتے

شکل نمبر ۴

ہیں۔ س ایک دوربین ہے اور پ ایک لکڑی کا انتصابی پیمانہ ہے۔
وزن ک ج سلاخ کے درمیانی نقطہ پر لگایا جاتا ہے۔
سلاخ پر وزن لگانے کے پہلے، دوربین کے اندر کے صلیبی یا چلیپائی
تاروں سے پ کا جو خاص نشان منطبق ہوتا ہے اسکو دیکھ لیا جاتا ہے۔
ظاہر ہے کہ سلاخ پر وزن لگانے کے بعد پیمانہ پ کا کوئی دوسرا نشان
صلیبی تاروں سے منطبق ہوگا۔ اور آئینہ ن۱ داہنی جانب اور ن۲ بائیں
جانب اپنے ابتدائی مقاموں سے مساوی زاوئے بناتے ہوئے خم جائیں
گے۔ فرض کرو کہ آئینے جو زاویئے بناتے ہوئے خم جاتے ہیں وہ طہ کے
مساوی ہے۔ یہ اُس زاویہ کے مساوی ہوگا جو سلاخ کے آزاد سرے
خم کر بناتے ہیں۔ تھوڑی دیر کے لئے اب یہ تصور کرو کہ نور کی شعاعوں
کی سمت اُلٹ دی جاتی ہے۔ جب آئینہ ن۱ زاویہ طہ گھومتا ہے تو
شعاع منعکس اپنے ابتدائی مقام سے زاویہ ۲ طہ گھوم جائیگی لہذا وہ نقطہ جہاں شعاع منعکس
آئینہ ن۲ سے ٹکراتی ہے بقدر فاصلہ ۲ طہ ف۱ اپنے ابتدائی مقام سے ہٹ
جائیگا، جہاں ف۱ = دونوں آئینوں کے درمیان فاصلہ۔
چونکہ آئینہ ن۲ بھی زاویہ طہ گھوم جاتا ہے اس لئے ن۲ سے منعکس
شعاع زاویہ ۴ طہ گھوم جائے گی۔ لہذا پیمانہ کی درجہ خوانی اس کی وجہ سے
۴ طہ ف۲ بدل جائے گی۔
جہاں ف۲ = پ اور ن۲ کے درمیانی فاصلہ کے
∴ پیمانہ کے شاہدات کا مجموعی ہٹاؤ جو دوربین میں نظر آئے گا =

= س (فرض کرو)

= ۲ طہ ف۱ + ۴ طہ ف۲

= ۲ طہ (ف۱ + ۲ ف۲)

$$∴ \text{طہ} = \frac{\text{س}}{۲(\text{ف}_۱ + ۲\,\text{ف}_۲)} \quad \text{.............}(۵۸)$$

اگر سلاخ کا ایک سرا قائم کردیا جائے اور دوسرے پر وزن لٹکایا جائے تو مساوات (۲۶) سے ظاہر ہے کہ

$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{ک ج}}{\text{ی مج}}\left(\text{ل لا} - \frac{\text{لا}^{۲}}{۲}\right)$ بشرطیکہ سلاخ کا وزن نظرانداز کردیا جائے

اگر لا = ل رکھا جائے تو $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{ک ج ل}^{۲}}{\text{۲ ی مج}}$

مگر $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ = اس زاویہ کے مماس کے جو سلاخ خم جاتی ہے = مس ط

$$\therefore \text{مس ط} = \frac{\text{ک ج ل}^{۲}}{\text{۲ مج ی}}$$

لیکن اس صورت میں ک ج = $\frac{\text{ک ج}}{۲}$ اور ل = $\frac{\text{ل}}{۲}$ کے لینا چاہیے

$$\therefore \text{مس ط} = \frac{\text{ک ج ل}^{۲}}{\text{۱۶ مج ی}}$$

اگر اُتار بہت ہی کم ہو تو ط بہت ہی چھوٹا ہوگا۔

اسلئے مس ط $\simeq$ ط

$$\therefore \text{مساوات (۵۸) سے ط} = \frac{\text{ک ج ل}^{۲}}{\text{۱۶ مج ی}} = \frac{\text{س}}{۲(\text{ف}_{۱} + ۲\text{ف}_{۲})}$$

$$\therefore \text{ی} = \frac{\text{ک ج ل}^{۲}(\text{ف}_{۱} + ۲\text{ف}_{۲})}{\text{۸ س مج}} \quad \text{.............. (۵۹)}$$

اگر سلاخ مستطیلی وضع کی ہو تو مج = $\frac{\text{ب د}^{۳}}{۱۲}$

جہاں ب = اس سلاخ کا عرض اور د = گہرائی

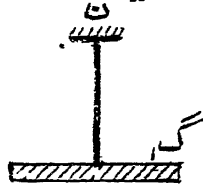
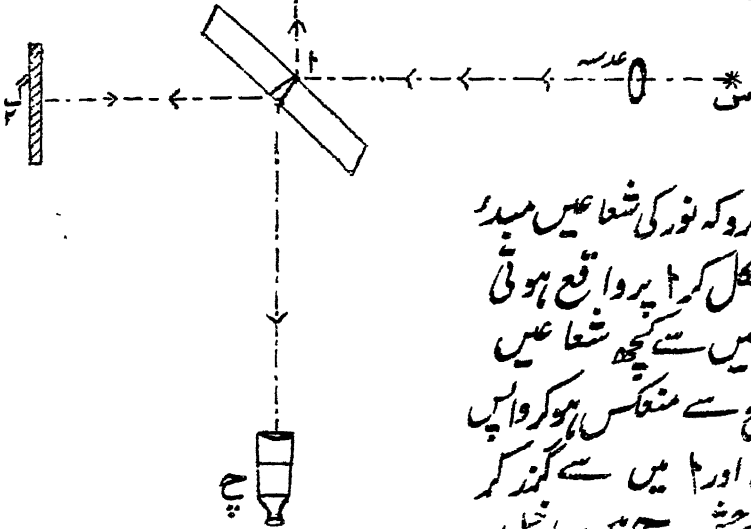
اگر سلاخ اسطوانہ نما ہو تو مج = $\frac{\pi\, \text{ص}^{۴}}{۴}$

جہاں ص = اسکا نصف قطر

# ینگ کے معیار لچک کی دریافت (مناظری طریقہ سے)

پہلا طریقہ :- اس طریقہ کی توضیح شکل ۱۴۱ سے ہوتی ہے۔ اسمیں میکلسن کے طریقہ کے مطابق نیم شفاف تختیوں کی مدد سے تداخلی دھاریاں حاصل کی جاتی ہیں۔



شکل ۱۴۱

ا اور ب مساوی دبازت کی شیشہ کی دو تختیاں ہیں جنکو مناظری لحاظ سے مستوی فرض کیا جاتا ہے۔ ا کی ایک سطح نصف شفاف ہونے کی وجہ سے نور کا کچھ حصہ منعکس ہوجاتا ہے اور بقیہ حصہ اس تختی سے گزر جاتا ہے۔

فرض کرو کہ نور کی شعاعیں مبدء س سے نکل کر ا پر واقع ہوتی ہیں۔ ان میں سے کچھ شعاعیں اوپر کی سطح سے منعکس ہوکر واپس ہوتی ہیں اور ا میں سے گزر کر دوربین کے چشمہ چ میں داخل ہوتی ہیں۔
شعاعوں کا بقیہ حصہ ا سے

منعطف ہوکر ایک دوسرے مستوی آئینہ گ۲ تک جاتا ہے اور پھر اس آئینہ سے منعکس ہوکر ا تک آتا ہے۔ بالآخر یہ شعاعیں بھی چشمہ میں داخل ہوتی ہیں۔ ظاہر ہے کہ ا پر واقع ہونے والی شعاعوں کے پہلے حصہ اور اس دوسرے حصہ میں تداخل ہوگا اور دوربین کے چشمہ میں تداخلی دھاریاں نظر آئیں گی۔ اگر کسی ایک آئینہ اور شیشہ کی تختی ا کا درمیانی فاصلہ بدل دیا جائے تو چشمہ میں دھاریاں ہٹتی ہوئی نظر آئیں گی۔

فرض کرو کہ گ۱ کے وسطی حصہ میں ایک چھوٹے تار کا ایک سرا اور اسکا دوسرا سرا ن پر جما دیا جاتا ہے۔ تار کو ہم اگر کسی طریقہ سے کھینچیں تو گ۱ نیچے جائے گا اور گ۱ اور ا کا درمیانی فاصلہ بدل جائے گا، اسلئے تداخلی دھاریاں بھی ہٹ جائیں گی۔ ان کا نقل مقام ایک ایسے چشمہ کی مدد سے جس کے اندر خرد پیما ہو، آسانی سے ناپا جا سکتا ہے۔ اس طرح آئینہ گ۱ کی حرکت ۱/دس لاکھ سمر تک ناپی جا سکتی ہے۔ یہ طریقہ بے حد حساس ہے اور کیمبرج میں شکسپیر نے اسکو ینگ کے معیار لچک کی دریافت میں استعمال کیا تھا۔

فرض کرو کہ ایک لونی نور جسکا طول موج لہ ہے استعمال کیا جا رہا ہے۔

منور دھاریوں کے لئے راستوں میں تفاوت = ع لہ = لا (فرض کرو) جہاں ع کوئی صحیح عدد ہے۔

فرض کرو کہ آئینہ گ۱ نیچے کی طرف ایک خاص فاصلہ ما تک حرکت کرتا ہے اور اسکی وجہ سے عَ تعداد کی منور دھاریاں نقل مقام کرتی ہیں۔

اس صورت میں راستوں کا تفاوت = (ع + عَ) لہ = لاَ (فرض کرو) =

چونکہ ۲ اور گ۲ کے درمیان فاصلہ حسب سابق رہا

∴ لاَ - لا = ۲ ما = ع لہ

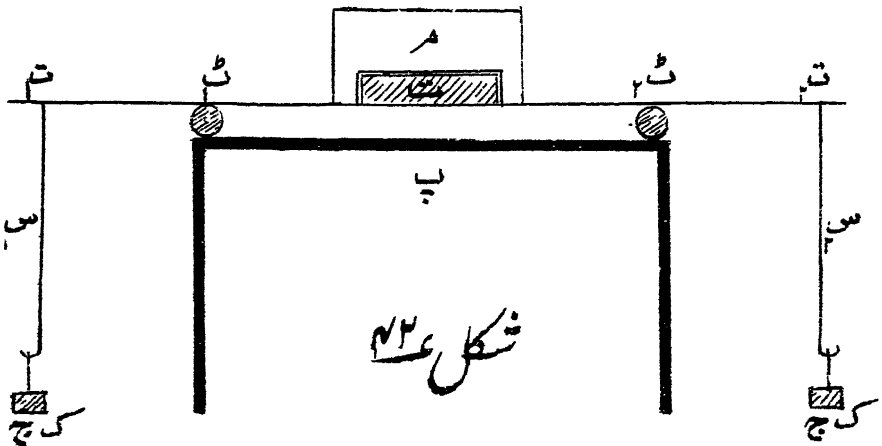
∴ ما = ع لہ / ۲ .................. (۶۰)

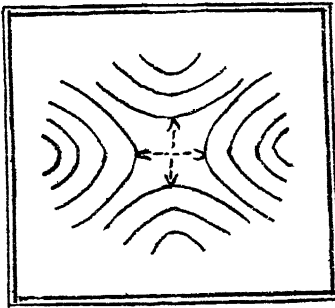
اسکے ذریعہ ما یعنی تار کا اضافۂ طول معلوم کیا جا سکتا ہے۔

اگر کسی سلاخ کے سرے سہاروں پر ٹکا دئے جائیں اور سلاخ کے درمیانی حصہ میں وزن لٹکایا جائے تو اس طریقہ سے اسکا اُتار بھی صحت کے ساتھ دریافت کیا جا سکتا ہے۔

**دوسرا طریقہ** :- اس طریقہ سے سیشہ کے لئے ینگ کا معیار لچک اور استواری کی شرح دریافت کی جاتی ہے۔

شکل ۴۲ میں ایک لمبی مستطیلی شیشہ کی تختی، دو شیشہ کی نلیوں ٹ۱ اور ٹ۲ پر (جو سخت موم کے ذریعہ لکڑی کے تختہ سے جوڑ دی جاتی ہیں) متشاکل طریقہ سے رکھی جاتی ہے، ت۱ اور ت۲ دو چھوٹی شیشہ

شکل ۴۲

کی نلیاں ہیں جس کو لاک سے شیشہ کی تختی کی اوپر والی سطح کے ساتھ جما دیا جاتا ہے اور ان دونوں چھوٹی شیشہ کی نلیوں میں سے تانبے کے تار کے لمبے رکاب نما ٹکڑے گزرتے ہیں جن کو شکل ۴۲ میں س۱ اور س۲ سے تعبیر کیا گیا ہے۔

ت ایک مناظری طور پر مستوی شیشہ کی موٹی تختی ہے جو پہلی تختی کے مرکز پر رکھ دی جاتی ہے۔ شیشہ کا ایک ٹکڑا ھ افق کے ساتھ ۴۵° بناتے ہوئے، شیشہ کی موٹی تختی ت پر رکھا جاتا ہے۔ ایک چھوٹا آئینہ جو شکل میں نہیں بتایا گیا ایک لوہے کے استادہ کو لگا کر ان سب کے اوپر کسی مناسب زاویہ پر اس طرح رکھا جاتا ہے کہ ھ سے نیچے منعکس ہونے والی (سوڈیم کے مبدء نور س کی) شعاعوں سے کوئی تداخلی دھاریاں بنیں تو اچھی طرح نظر آسکیں۔ ت اور شیشہ کی تختی کے درمیان ہوا کی پتلی جھلی بن جاتی ہے اور اس کی وجہ سے تداخلی دھاریاں جو شکل ۴۳ میں دکھلائی گئی ہیں پیدا ہوتی ہیں۔ ان کو ایک متحرک خوردبین سے، جو دوربین کی طرح (سامنے ایک عدسہ رکھ کر) استعمال کی جا سکتی ہے، دیکھا جاتا ہے۔ ایک وزن ک ج دونوں رکابوں س۱ اور س۲ پر لگایا جاتا ہے۔ آئینہ اور شیشہ کی موٹی تختی ت کو ایک موزوں مقام پر اسطرح ترتیب دیتے ہیں کہ متحرک دوربین کے ذریعہ دیکھنے سے ہزلولی

شکل ۴۳

شکل کی دھاریاں شیشہ کی تختی اور ت کے درمیان نظر آنے لگیں۔ شیشہ کی تختی کے طولی خماد کی وجہ سے دھاریاں سیدھے اور بائیں جانب اور

عرضی خماؤ کی وجہ سے اوپر اور نیچے کی جانب مقعر ہونے لگتی ہیں۔
مختلف دھاریوں کے قطر، متحرک دوربینیا سے احتیاط کے ساتھ ناپے جاتے ہیں۔

مساوات (۳۲) سے خمیدگی کا معیار اثر = ک ج × ل = ی مج / ص

جہاں ۲ل = (ٹ۱ اور ٹ۲ کا درمیانی فاصلہ) ـ (ٹ۱ اور ٹ۲ کا درمیانی فاصلہ)

ص = طولی خماؤ کا نصف قطر انحنا

مج = ب ا^۳ / ۱۲ جہاں ب = شیشہ کی تختی کا عرض
ا = " " کی گہرائی

اگر ن ویں تداخلی دھاری کا قطر ف ہو تو

ف^۲ / ۴ = ص ن لہ جہاں لہ = سوڈیم کے نور کا اوسط طول موج
= ۵۸۹۳ × ۱۰^-۸ سم

$$\therefore ی = \frac{ک ج ل ص}{مج} = \frac{۳ ک ج ل ف^۲}{ن لہ ب ا^۳} \quad ...........(۶۱)$$

تجربہ میں ف^۲ کو ن کے مقابل مرتسم کرو۔ ایک خطی رشتہ حاصل ہوگا اور اس خط مستقیم کی ڈھال سے کسی خاص وزن کے لئے اسکی اوسط قیمت حاصل ہوگی۔

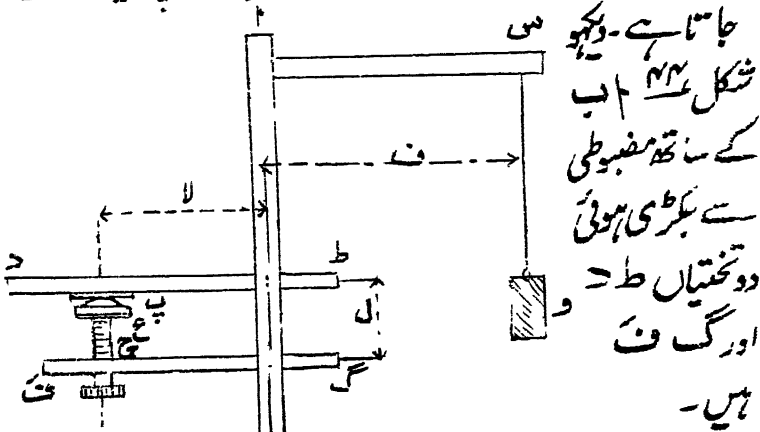
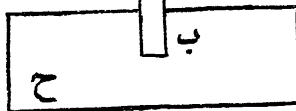
اس کے بعد ک ج کو ن / ف^۲ کی متناظر قیمتوں کے مقابل مرتسم کرو۔ پھر بھی ایک خط مستقیم حاصل ہوگا۔ اس کے ڈھال سے ک ج ف^۲ / ن کی اوسط قیمت حاصل ہوجائے گی۔ لہذا مساوات (۶۱) میں یہ قیمت لکھنے سے (چونکہ دوسری تمام چیزیں معلوم ہیں) ینگ کے معیار لچک کی قیمت دریافت کی جاسکتی ہے۔

اگر اسی طرح صَ = عرضی خماؤ کا نصف قطر انحنا
تو صَ نَ لہ = فَ^۲ / ۴ جہاں فَ = نَ ویں تداخلی دھاری کا قطر

∴ پواسان کی نسبت مہ $= \frac{ص}{صَ} = \frac{ف^{۲}}{ن} \times \frac{نَ}{۲\,فَ}$ ....(۶۲)

اس سے پواسان کی نسبت معلوم ہو جاتی ہے۔

اب چونکہ ی اور مہ معلوم ہیں اسلئے استواری کی شرح معلوم ہو سکتی ہے۔

تیسرا طریقہ :- ایک فولادی سلاخ ا ب جسکے تراش عمودی کی وضع دائری ہے اور جسکے مادّے کے ینگ کا معیار لچک دریافت طلب ہے، ایک بھاری قاعدہ ح میں اس طرح استادہ کی جاتی ہے کہ اس کا محور انتصابی رہتا ہے۔ ایک افقی بازو ا س سلاخ کے اوپر کے سرے کے ساتھ جوڑ دیا جاتا ہے اور اس بازو کے سرے س پر ایک وزن لٹکایا جاتا ہے۔ دیکھو شکل ۴۴ ا ب کے ساتھ مضبوطی سے پکڑی ہوئی دو تختیاں ط د اور گ ف ہیں۔

اوپر والی تختی میں ایک مستوی شیشہ کا ٹکڑا پ پیچوں پر سہارا جاتا ہے (یہ پیچ شکل میں نہیں

شکل ۴۴

دکھلائے گئے ہیں) اور نچلی تختی میں سے ایک پیچ پ گزرتا ہے جس کے اوپر کے سرے پر ایک مستوی محدب عدسہ ع رکھا ہوا ہوتا ہے۔

اس پیچ کی مدد سے عدسہ ع کو اتنا اوپر ہٹایا جاتا ہے کہ یہ مستوی شیشہ پ کو چھونے لگے۔ اگر تختی اور عدسہ کے نظام کو ایک لو لی نور (ط د کے اوپر اس سے ۴۵° مائل ایک شیشہ کی تختی رکھ کر سوڈیم کے شعلہ کے نور کو منعکس کیا جائے) سے منور کیا جائے تو نیوٹن کے حلقے نظر آئیں گے۔ ان حلقوں کا ایک خوردبین کی مدد سے (جسکا محور پ کے اوپر انتصابی ہو) امتحان کیا جا سکتا ہے۔ تختی پ کو پیچوں کے ذریعہ اتنا ہٹانا چاہیئے کہ یہ عدسہ ع کے بلند ترین نقطہ پر مس کرنے لگے اور پ اور ع کی درمیانی فضا کو بغیر مس کئے حتی الامکان گھٹانا چاہیئے۔ اس پر ہاتھ کا ہلکا سا دباؤ ان حلقوں کو اندر کی جانب بند ہونے پر مجبور کرے گا۔ لیکن یہ عمل اگر واقع نہ ہو تو اس کا مطلب یہ سمجھنا چاہیئے کہ پ اور ع ایک دوسرے کو مس کر رہے ہیں۔ ایسی صورت میں پیچ کو اتنا گھمانا چاہیئے کہ ایک بالکل چھوٹی سی جگہ پ اور ع کے درمیان چھوٹ جائے۔ س پر وزن کو بتدریج بڑھانے کے لئے انتظام ہوتا ہے۔ اس سے حلقے خوردبین کے میدان نظر میں اتنا آہستہ حرکت کرتے ہیں کہ انکو گن لیا جا سکتا ہے۔ پھر ایک دئے ہوئے وزن کو بتدریج لگانے سے حلقوں کی وہ تعداد جو مرکز کے پاس غائب ہوتے ہیں گن لی جا سکتی ہے۔ متبادل طور پر مرکز پر بننے والے نئے حلقوں کی تعداد جبکہ وزن بتدریج کم کیا جاتا ہے شمار کی جا سکتی ہے۔ اس عمل کو مختلف وزن لگا کر دہرانا چاہیئے۔

فرض کرو کہ وزن جو لگایا جاتا ہے وہ ک ج کے مساوی ہے
اور ا س = ف اور ط گ = ل اور لا = سلاخ کے محور

اور عدسہ اور تختی کے نقطہ تماس کے درمیان فاصلہ

چونکہ سلاخ کے سرے پر ایک جفت ک ج ف اور قوت ک ج عمل کر رہی ہے۔

لہذا جفت جو سلاخ کو خمائے گا اس کی تعبیر $= \frac{\text{ی جے}}{\text{ص}}$ $=$ ک ج ف سے ہوگی۔ جہاں ص = نصف قطر انحنا

ی = سلاخ کے ینگ کا معیار لچک

جے = سلاخ کے تراش عمودی کے جمود کا معیار اثر قطر کے گرد

$$= \frac{\pi\ \text{ص}_1^{4}}{4}$$

$$\text{لہذا}\quad \frac{1}{\text{ص}} = \frac{4\ \text{ک ج ف}}{\pi\ \text{ی ص}_1^{4}}$$

ط د اور گ ف تختیوں کے درمیانی زاویہ میں سلاخ کے خماؤ کی وجہ سے اضافہ $\frac{\text{ل}}{\text{ص}}$ ہوگا

یعنی خماؤ کی وجہ سے عدسہ اور تختی کے درمیانی فاصلہ میں اضافہ =

$$= \text{لا} \times \frac{\text{ل}}{\text{ص}} = \frac{4\ \text{ک ج ف لا ل}}{\pi\ \text{ی ص}_1^{4}}$$

اور وزن ک ج کی وجہ سے سلاخ کے طول میں فی سم کمی

$$= \frac{\text{ک ج}}{\text{ی}\ \pi\ \text{ص}_1^{2}}$$

یعنی وزن کی وجہ سے عدسہ اور تختی کے درمیانی فاصلہ میں کمی $= \frac{\text{ک ج ل}}{\text{ی}\ \pi\ \text{ص}_1^{2}}$

لہذا عدسہ اور تختی کے درمیانی فاصلہ میں مجموعی اضافہ =

$$= \frac{4\ \text{ک ج ف لا ل}}{\pi\ \text{ی ص}_1^{4}} - \frac{\text{ک ج ل}}{\text{ی}\ \pi\ \text{ص}_1^{2}}$$

$$= \frac{\text{ک ج ل}}{\text{ی} \pi \text{ص}_1^4} (\text{۴ ف لا} - \text{ص}_1^2)$$

$$= \frac{1}{2} \text{ ن لہ}$$

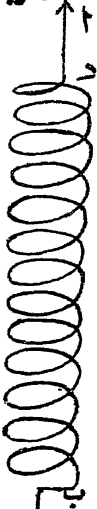
جہاں ن = ان حلقوں کی تعداد جو غائب ہو جاتے ہیں

لہ = سوڈیم D خطوط کا اوسط طول موج

$$= \text{۵٫۸۹۲} \times \text{۱۰}^{-5} \text{سم}$$

$$\text{لہذا ی} = \frac{\text{۲ک ج ل (۴ف لا} - \text{ص}_1^2)}{\text{ن لہ} \pi \text{ ص}_1^4} \quad \text{.............(۶۳)}$$

اگر ن کو ک کے مقابلہ میں مرتسم کیا جائے تو ایک خط مستقیم حاصل ہوگا جس کے ڈھلاؤ سے ی کی قیمت دریافت کی جا سکتی ہے۔

مرغولہ دار کمانیاں :- ایک ایسی چپٹی مرغولہ دار کمانی پر غور کرو جس کے پیچ قریب قریب لپیٹے گئے ہوں اور جس کے تار کا نصف قطر خود کمانی کے نصف قطر کے مقابلہ میں چھوٹا ہو۔ اس قسم کی کمانی ایک موٹے تار کو مناسب قطر کے اسطوانہ پر اسطرح لپیٹنے سے بنائی جا سکتی ہے کہ تار کا مستوی ہر جگہ اسطوانہ کے محور کے علی القوائم رہے۔ فرض کرو کہ ایسی کمانی کے سرے دو دفعہ علی القوائم خم کئے جاتے ہیں جیسا کہ شکل ۴۵ء میں ب خ اور ۲ د سے تعبیر کیا گیا ہے۔ فرض کرو کہ کمانی انتصابی وضع میں ۲ پر جکڑ دی جاتی ہے اور اسکے نقطہ خ پر وزن ک ج لگایا جاتا ہے۔ اور نیز یہ بھی فرض کرو کہ ۲ ص$_1$ = اس اسطوانہ کا قطر جس پر مرغولہ بنایا جاتا ہے۔

اور ۲ ص$_2$ = خود تار کا قطر۔



شکل ۴۵ء

اور کمانی کا طول (یہ تصور کرتے ہوئے کہ اسکو کھولکر اگر سیدھا کر دیا جائے) = ل
اور جب وزن کوئی فاصلہ لا نیچے اُترتا ہے تو مروڑ بقدر زاویہ طہ واقع ہوتی ہے

$$\text{تب جفت} = \frac{\text{د طہ}}{\text{ل}} \cdot \frac{\pi\,\text{ص}^4}{2}$$

جہاں د = تار کے مادے کی استواری کی شرح
لیکن اس کے تراش پر جفت = ک ج ص۱

$$\therefore\ \text{ک ج ص}_1 = \frac{\text{د طہ}}{\text{ل}} \cdot \frac{\pi\,\text{ص}^4}{2}$$

$$\text{اور وزن کا اُتار} = \text{لا} = \text{ص}_1\,\text{طہ} = \frac{2\,\text{ک ج ل ص}_1^2}{\text{د}\,\pi\,\text{ص}^4} \quad\text{.......}\quad (۶۴)$$

اب ہم اس کمانی کی توانائی بالقوہ دریافت کرینگے :-
کمانی کو ایک چھوٹا فاصلہ فرلا کھینچنے میں جو کام کرنا ہوتا ہے =
= ک ج فرلا

$$\therefore\ \text{مجموعی کام جو کمانی کو فاصلہ لا تک کھینچنے میں کرنا ہوگا} = \int_{\text{صفر}}^{\text{لا}} \text{ک ج فرلا}$$

$$\text{یعنے کمانی کی توانائی بالقوہ} = \int_{\text{صفر}}^{\text{لا}} \frac{\text{د}\,\pi\,\text{ص}^4}{2\,\text{ص}_1^2\,\text{ل}} \cdot \text{لا فرلا} =$$

$$= \frac{\text{د}\,\pi\,\text{ص}^4\,\text{لا}^2}{4\,\text{ص}_1^2\,\text{ل}} \quad\text{..................}\quad (۶۵)$$

اب ہم اسکی توانائی بالفعل دریافت کرینگے :-
اگر کمانی ایک بہت ہی چھوٹا فاصلہ فرلا ایک بالکل چھوٹے وقت کے وقفہ فرو میں طے کرے تو مرتعش کمیت کی توانائی بالفعل =

$$= \frac{1}{2}\,\text{ک} \left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرو}}\right)^2 \quad\text{..................}\quad (۶۶)$$

اس کمانی کے اوپر والے سرے سے س فاصلہ پر ایک چھوٹا سا ٹکڑا فرس تصور کرو۔

اگر اس کمانی کی پوری کمیت م ہو تو اس چھوٹے ٹکڑے کی کمیت $\text{م}\frac{\text{فرس}}{\text{ل}}$ ہوگی اور اس کی رفتار $\frac{\text{س}}{\text{ل}} \cdot \frac{\text{فرلا}}{\text{فرو}}$ ہوگی۔

∴ اس ٹکڑے کی توانائی بالفعل $= \frac{۱}{۲}\,\text{م}\,\frac{\text{فرس}}{\text{ل}} \cdot \frac{\text{س}^۲}{\text{ل}^۲}\left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرو}}\right)^۲$

اسی طرح اور ٹکڑے لینے سے اس کمانی کی توانائی بالفعل

$$= \int_{\text{صفر}}^{\text{ل}} \frac{۱}{۲}\left(\text{م}\,\frac{\text{فرس}}{\text{ل}}\right)\frac{\text{س}^۲}{\text{ل}^۲}\left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرو}}\right)^۲$$

$$= \frac{۱}{۶}\,\text{م}\left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرو}}\right)^۲ \quad \text{.........} \quad (۶۷)$$

∴ پوری توانائی بالفعل $= \frac{۱}{۲}\left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرو}}\right)^۲\left\{\text{ک} + \frac{۱}{۳}\text{م}\right\}$ ....(۶۸)

لیکن بقائے توانائی کے مسئلہ سے توانائی بالقوہ + توانائی بالفعل = مستقل

یعنی مساوات (۶۵) اور (۶۸) سے:—

$$\frac{\text{د}\,\pi\,\text{ص}_۲^۴\,\text{لا}^۲}{۴\,\text{ص}_۱^۲\,\text{ل}} + \frac{۱}{۲}\left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرو}}\right)^۲\left\{\text{ک} + \frac{۱}{۳}\text{م}\right\} = \text{مستقل}$$

اس مساوات کو وقت کے لحاظ سے تفرقانے سے:—

$$\frac{\text{د}\,\pi\,\text{ص}_۲^۴}{۲\,\text{ص}_۱^۲\,\text{ل}} \cdot \text{لا} \cdot \frac{\text{فرلا}}{\text{فرو}} + \left(\text{ک} + \frac{۱}{۳}\text{م}\right)\frac{\text{فرلا}}{\text{فرو}} \cdot \frac{\text{فر}^۲\,\text{لا}}{\text{فرو}^۲} = \text{صفر}$$

یعنی $\left(\text{ک} + \frac{۱}{۳}\text{م}\right)\frac{\text{فر}^۲\,\text{لا}}{\text{فرو}^۲} + \frac{\text{د}\,\pi\,\text{ص}_۲^۴}{۲\,\text{ص}_۱^۲\,\text{ل}}\,\text{لا} = \text{صفر}$

یہ ایک سادہ موسیقی حرکت کی مساوات ہے

اسلئے وقت دوران و $= ۲\pi \sqrt{\frac{(ک + \frac{۱}{۳} م)۲ ص_۱^۲ ل}{د \pi ص^۴}}$ ....(۶۹)

اس طرح کمانی کو انتصابی وضع میں اہتزاز میں لاکر اُس کے مادّے کی استواری کی شرح دریافت کی جا سکتی ہے۔

فرض کرو کہ شکل ۴۵ب میں بجائے وزن ک ج کو خ پر لٹکانے کے ایک سلاخ کو اس کے درمیانی نقطہ سے افقی وضع میں خ سے لٹکایا جاتا ہے اور سلاخ کمانی کے مستوی میں دائری اہتزاز کرتی ہے۔ اگر سلاخ اپنے ابتدائی مقام سے زاویہ ط گھومے اور کسی چھوٹے وقت کے وقفہ فر و میں زاویہ فر ط بنے تو

کمانی کی توانائی بالقوہ = سلاخ کو زاویہ ط گھمانے میں جو کام کیا گیا =

$$= \int_{صفر}^{ط} (جفت) فرط = \int_{صفر}^{ط} ی \frac{مج}{ص} فرط$$

$$= \int_{صفر}^{ط} ی . \frac{مج . ط}{ل} . فرط$$

$$= \frac{ی . مج ط^۲}{۲ ل} \qquad ......... (۷۰)$$

جہاں ی = تار کے مادے کا ینگ کا معیار لچک

$$مج = \frac{\pi}{۴} . ص^۴$$

اور ص = تعدیلی سطح کا نصف قطر انحنا۔

اب سلاخ کی توانائی بالفعل $= \frac{۱}{۲} مجَ \left(\frac{فرط}{فرو}\right)^۲$ ........(۷۱)

جہاں مجَ = سلاخ کے جمود کا معیار اثر انتصابی محور کے گرد،

اب اسی طرح کمانی کے اوپر کے سرے سے س فاصلہ پر ایک چھوٹا سا

ٹکڑا ڈا فرس تصور کرو۔

اس ٹکڑے کی توانائی بالفعل $= \frac{1}{2} \text{م} \frac{\text{فرس}}{\text{ل}} \cdot \frac{\text{س}^2}{\text{ل}^2} \cdot \left(\text{ص}_1 \frac{\text{فرط}}{\text{فرو}}\right)^2$

کیونکہ خطی رفتار $= \frac{\text{ص}_1}{\text{ل}} \times$ زاویٔی رفتار

$\therefore$ کمانی کی توانائی بالفعل $= \int_{\text{صفر}}^{\text{ل}} \frac{1}{2} \text{م} \frac{\text{فرس}}{\text{ل}} \cdot \frac{\text{س}^2}{\text{ل}^2} \cdot \text{ص}_1^2 \left(\frac{\text{فرط}}{\text{فرو}}\right)^2$

$$= \frac{1}{6} \text{م} \, \text{ص}_1^2 \left(\frac{\text{فرط}}{\text{فرو}}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots (72)$$

$\therefore$ مجموعی توانائی بالفعل $= \frac{1}{2} \left(\frac{\text{فرط}}{\text{فرو}}\right)^2 \left\{ \text{مجَ} + \frac{1}{3} \text{م} \, \text{ص}_1^2 \right\} \ldots (73)$

اب بقائے توانائی کے مسئلہ سے:—

توانائی بالقوہ + توانائی بالفعل = مستقل

$$\therefore \frac{\text{ی مج ط}^2}{2\text{ل}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\text{فرط}}{\text{فرو}}\right)^2 \left\{ \text{مجَ} + \frac{1}{3} \text{م} \, \text{ص}_1^2 \right\} = \text{مستقل}$$

اس مساوات کو وقت کے لحاظ سے تفرقانے سے:—

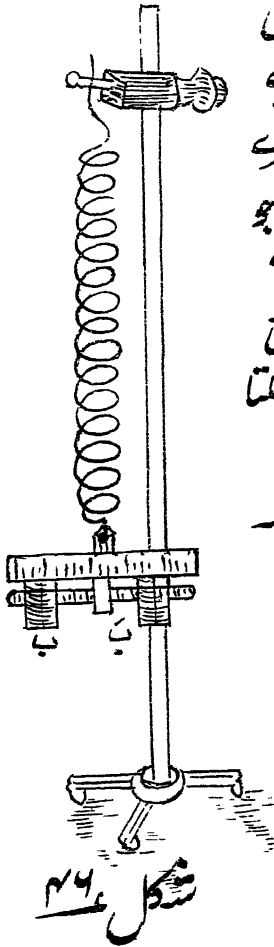
$$\frac{\text{ی مج}}{\text{ل}} \text{ط} \cdot \frac{\text{فرط}}{\text{فرو}} + \text{مجَ} \frac{\text{فرط}}{\text{فرو}} \cdot \frac{\text{فر}^2 \text{ط}}{\text{فرو}^2} + \frac{1}{3} \text{م} \, \text{ص}_1^2 \frac{\text{فرط}}{\text{فرو}} \cdot \frac{\text{فر}^2 \text{ط}}{\text{فرو}^2} = \text{صفر}$$

$$\text{یعنی} \quad \frac{\text{فر}^2 \text{ط}}{\text{فرو}^2} \left( \text{مجَ} + \frac{1}{3} \text{م} \, \text{ص}_1^2 \right) + \frac{\text{ی مج}}{\text{ل}} \text{ط} = \text{صفر}$$

یہ ایک سادہ موسیقی حرکت کی مساوات ہے۔

$$\therefore \text{وقت دوران } \text{وَ} = 2\pi \sqrt{\frac{\left(\text{مجَ} + \frac{1}{3} \text{م} \, \text{ص}_1^2\right) \text{ل}}{\text{ی مج}}} \quad \ldots\ldots\ldots (74)$$

اس طرح کمانی کو دائری وضع میں اہتزاز میں لاکر اس کے مادّے کا ینگ کا معیار لچک معلوم کیا جا سکتا ہے۔

یہ تجربے وٹلبر فورس کے جمودی جسم کی مدد سے کئے جا سکتے ہیں،
ذیل میں ایک نظام کی شکل دکھائی گئی ہے (شکل ۴۶) یہ ایک چپٹی کمانی پر منحصر ہے جسکا ایک سرا جما دیا جاتا ہے اور دوسرے سرے پر وٹلبر فورس کا بنایا ہوا ایک جمودی جسم جو کمانی کے محور کے لحاظ سے متشاکل ہوتا ہے، لگا دیا جاتا ہے - یہ جسم انتصابی اور زاوئی دونوں ہٹاؤ کے لحاظ سے اہتزاز میں لایا جاسکتا ہے -

شکل ۴۶

مساوات (۷۹) اور (۷۴) سے ظاہر ہے کہ :-

$$\bar{و} = ۲\pi \sqrt{\frac{\left(\bar{مج} + \frac{ص^۲_۱}{۳}\right) ل}{\frac{\pi ی ص^۲_۲}{۴}}}$$

$$اور\ و = ۲\pi \sqrt{\frac{ک + \frac{م}{۳}}{\frac{\pi د ص^۴_۲}{۲ ل ص^۲_۱}}}$$

زاوئی اہتزازات :- اوپر کے آلہ میں جمودی جسم کی شکل جمود کے معیار اثر کی دریافت کے لئے موزوں نہیں ہے بلکہ اسطرح اسکو بنایا گیا ہے کہ کمانی کے محور کے گرد اسکے جمود کا معیار اثر، دو مساوی پیتل کے اسطوانوں ب، بَ کو محور سے قریب لانے یا دور لے جانے سے بدل دیا جاسکتا ہے۔

فرض کرو کہ جمود کا معیار اثر مجؔ ہے جبکہ اسطوانوں کی کمیت کے مرکز، محور سے لاؔ سمر کے فاصلہ پر ہوں۔ تب مساوات (۷۴) سے :-

$$وَ^2 = عہ \left( مجَ + \frac{۴ صا^2}{۳} \right) \quad ..................... (۷۵)$$

جہاں عہ اسطوانوں کے تمام مقامات کیلئے مستقل ہے
اسی طرح اگر و۱، و۲، و۳ وغیرہ اوقات دوران ہوں جبکہ محور سے فاصلے لا۱، لا۲، لا۳ وغیرہ اور ان کے متناظر جمود کے اثری معیار مج۱، مج۲، مج۳ وغیرہ ہوں

$$تب\ و_1^2 = عہ \left( مج_1 + \frac{۴ صا_1^2}{۳} \right) \quad ..................... (۷۶)$$

$$اور\ و_2^2 = عہ \left( مج_2 + \frac{۴ صا_2^2}{۳} \right) \quad ..................... (۷۷)$$

$$اور\ و_3^2 = عہ \left( مج_3 + \frac{۴ صا_3^2}{۳} \right) \quad ..................... (۷۸)$$

وغیرہ اگر لاؔ > لا۱ > لا۲ > لا۳ وغیرہ ...........................

مساوات (۷۵) اور (۷۶) سے

$$\frac{وَ^2}{وَ^2 - و_1^2} = \frac{مجَ + \frac{۴ صا^2}{۳}}{مجَ - مج_1}$$

$$یا\ مجَ + \frac{۴ صا^2}{۳} = \frac{وَ^2}{وَ^2 - و_1^2} (مجَ - مج_1)$$

$$= \frac{۲ م_1 وَ^2 (لاَ^2 - لا_1^2)}{وَ^2 - و_1^2}$$

چونکہ مجؔ - مج۱ = اوپر والے نظام کے جمود کے معیار اثر کی تبدیلی اسطوانوں کو لاؔ سے لا۱ کے مقام تک تبدیل کرنے کی وجہ سے =

$$= ۲ م_1 (لاَ^2 - لا_1^2)$$ متوازی محوروں کے اصول سے

جہاں $۲\text{م}_۱$ = اسطوانوں کے کمیتوں کا حاصل جمع

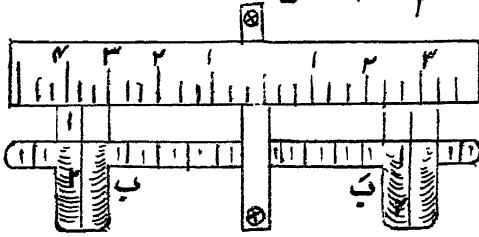
لہذا اگر وقت دوران کے مشاہدات، اسطوانوں کے مقامات سے متعدد مساوی فاصلوں کے لئے حاصل کئے جائیں تو $\left(\text{مج} + \frac{\text{م}\,\text{صا}^2}{۳}\right)$ کی اوسط قیمت ذیل کی مساوات سے حاصل کی جا سکتی ہے :—

$$\text{مج} + \frac{\text{م}\,\text{صا}^2}{۳} = \frac{۲\text{م}_۱\left(\text{لا}_۰^2 - \text{لا}_۱^2\right)\text{و}^2}{\text{و}^2 - \text{و}_۱^2} = \frac{۲\text{م}_۱\left(\text{لا}_۰^2 - \text{لا}_۲^2\right)\text{و}^2}{\text{و}^2 - \text{و}_۲^2}$$

وغیرہ وغیرہ

اور مساوات (۴۷) سے ی کی قیمت دریافت کی جا سکتی ہے۔

ولبر فورس کے جمودی جسم کی وضع مفصل طور پر شکل ۴۷ میں دکھائی گئی ہے۔

تجربہ میں $\left(\text{مج} + \frac{\text{م}\,\text{صا}^2}{۳}\right)$ کی قیمت اسم کے مساوی اضافوں سے اسطوانوں کے مقام کو بدل بدل کر، اس درجہ دار پیمانہ پر جو پیچ کے متوازی، اوپر لگا ہوا ہے، لینے سے بسہولت دریافت کی جا سکتی ہے۔ ایک چلکرنی گھڑی سے ہر ایک مقام کے متناظر، ارتعاش کا وقت دوران معلوم کیا جا سکتا ہے۔

شکل ۴۷

چونکہ ٹھوس اسطوانوں کی کمیتیں بالکل مساوی نہیں ہوتیں ان کی کمیتوں کا مجموعہ $۲\text{م}_۱$ کے مساوی لینا چاہیئے۔ کمانی کی نصف قطر کی قوت ہم ہونے کی وجہ سے اس کی پیمائش میں بڑی احتیاط چاہیئے۔

تار پر ایک ایک سمر کے فاصلوں پر قطر کے مشاہدات خُردہ پیما پیچ سے لینے چاہئیں، تاکہ ص کی اوسط قیمت حاصل ہو سکے۔ اہتزازنہ گنتے وقت دوربین کا استعمال بہتر ہوگا۔

چونکہ انتصابی نقل مقام کی صورت میں وقت دوران کی قیمت اسطوانوں کے ہر متشاکل وضع کے لئے ایک ہی ہوتی ہے اس لئے مساوات (۶۹) کی مدد سے د معلوم ہو جاتا ہے۔

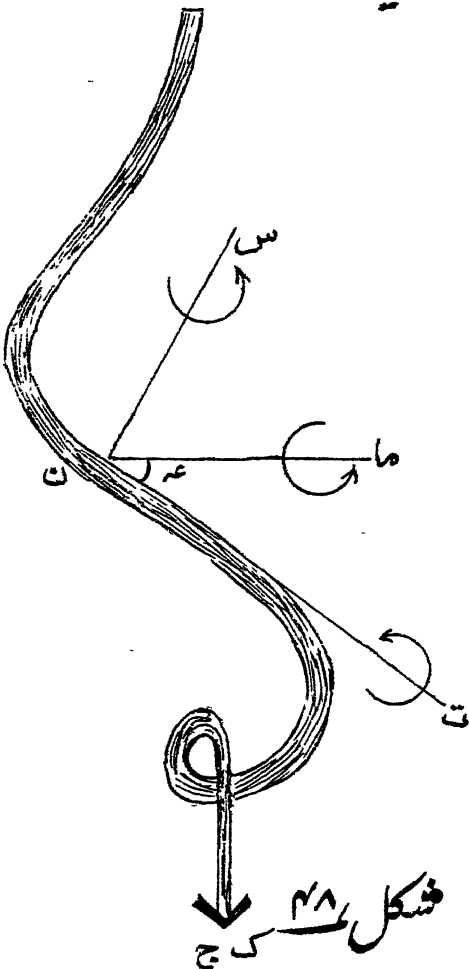
شکل (۱۳) کی طرح کمانی کو بھاپ کی نلی میں رکھ کر ی اور د کی تپشی قدر بھی ہم دریافت کر سکتے ہیں۔

مائل مرغولہ دار کمانی :-

مائل کمانی کا ایک حصہ جو دائری تار سے بنایا گیا ہے شکل ۴۸ میں دکھلایا گیا ہے۔

جب وزن ک ج نیچے کی جانب عمل کرتا ہے تو کمانی میں خماؤ اور مروڑ دونوں واقع ہوتے ہیں۔ اس صورت میں ہم یہ فرض کریں گے کہ وزن ک ج، اس اسطوانہ کے محور کی سمت میں جس پر کہ کمانی لپیٹی جاتی ہے عمل کرتا ہے۔

نقطہ ن کے پاس کمانی کے ایک چھوٹے سے حصہ پر غور کرو۔ یہاں جفت دو سمتوں

شکل ۴۸

ن ت اور ن س میں تحلیل ہو جاتا ہے۔ ن ت، ن کے پاس کمانی کے چھوٹے سے حصہ کے متوازی ہے۔ اور ن س، ن ت پر عمود ہے۔

∴ ن ما اسطوانہ کی تراش عمودی کے مستوی کے متوازی اور ایک افقی خط ہے۔

فرض کرو کہ کمانی کا محور افقی خط ن ما سے زاویہ عہ بناتا ہے۔ اس صورت میں جفت ک ج ص۱ کے اجزائے تحلیلی ن ت کی سمت میں ک ج ص۱ جم عہ اور ن س کی سمت میں ک ج ص۱ جب عہ ہوں گے۔

ک ج ص۱ جم عہ مروڑی جفت ہے لہذا مروڑ فی اکائی طول =

$$= \frac{\text{۲ک ج ص}_{\text{۱}}\ \text{جم عہ}}{\text{د}\ \pi\ \text{ص}_{\text{۲}}^{\text{۴}}} \quad \ldots\ldots (\text{۷۹})$$

اور ک ج ص۱ جب عہ خماؤ کا جفت ہے لہذا خماؤ فی اکائی طول

$$= \frac{\text{۴ک ج ص}_{\text{۱}}\ \text{جب عہ}}{\text{ی}\ \pi\ \text{ص}_{\text{۲}}^{\text{۴}}} \quad \ldots\ldots (\text{۸۰})$$

صرف مروڑ کی حالت پر غور کرو۔ انتصابی سمت میں مروڑ فی اکائی طول

$$= \frac{\text{۲ک ج ص}_{\text{۱}}\ \text{جم عہ جم عہ}}{\text{د}\ \pi\ \text{ص}_{\text{۲}}^{\text{۴}}}$$

∴ انتصابی نقل مقام مروڑ کی وجہ سے $= \frac{\text{۲ک ج ص}_{\text{۱}}\ \text{جم}^{\text{۲}}\text{عہ}.\text{ص}_{\text{۱}}}{\text{د}\ \pi\ \text{ص}_{\text{۲}}^{\text{۴}}}$

$$= \frac{\text{۲ک ج ص}_{\text{۱}}^{\text{۲}}\ \text{جم}^{\text{۲}}\ \text{عہ}}{\text{د}\ \pi\ \text{ص}_{\text{۲}}^{\text{۴}}} \quad \ldots\ldots (\text{۸۱})$$

اب صرف خماؤ کی حالت پر غور کرو۔ انتصابی سمت میں خماؤ فی اکائی طول

$$= \frac{\text{۴ک ج ص}_{1}\ \text{جب}^{2}\ \text{عہ}}{\text{ی}\ \pi\ \text{ص}_{2}^{4}}$$

∴ انتصابی نقل مقام خماؤ کی وجہ سے $= \frac{\text{۴ک ج ص}_{1}\ \text{جب}^{2}\ \text{عہ}}{\text{ی}\ \pi\ \text{ص}_{2}^{4}}$ ..(۸۲)

∴ مجموعی انتصابی نقل مقام فی اکائی طول =

$$= \frac{\text{۴ک ج ص}_{1}}{\pi\ \text{ص}_{2}^{4}} \left\{ \frac{\text{جم}^{2}\ \text{عہ}}{\text{د}} + \frac{\text{جب}^{2}\ \text{عہ}}{\text{ی}} \right\}$$

لہذا مجموعی انتصابی نقل مقام =

$$= \frac{\text{۴ک ج ص}_{1}\ \text{ل}}{\pi\ \text{ص}_{2}^{4}} \left\{ \frac{\text{جم}^{2}\ \text{عہ}}{\text{د}} + \frac{\text{جب}^{2}\ \text{عہ}}{\text{ی}} \right\} \quad \text{.....(۸۳)}$$

انتصابی نقل مقام کے علاوہ زاویئی نقل مقام بھی واقع ہو گا۔
اگر صرف مروڑ کے جفت پر غور کیا جائے تو افقی زاویئی نقل مقام فی اکائی طول کمانی کے لپیٹے جانے کی سمت میں =

$$= \frac{\text{۴ک ج ص}_{1}\ \text{جم عہ جب عہ}}{\text{د}\ \pi\ \text{ص}_{2}^{4}} \quad \text{..........(۸۴)}$$

اگر صرف خماؤ کے جفت پر غور کیا جائے تو افقی زاویئی نقل مقام فی اکائی طول کمانی کے کھلنے کی سمت میں =

$$= \frac{\text{۴ک ج ص}_{1}\ \text{جب عہ جم عہ}}{\text{ی}\ \pi\ \text{ص}_{2}^{4}} \quad \text{..........(۸۵)}$$

∴ حاصل افقی زاویئی نقل مقام فی اکائی طول کمانی کے لپیٹے جانیکی سمت میں [۱۴]

$$= \frac{\text{۴ک ج ص}_{1}\ \text{جم عہ جب عہ}}{\text{ص}_{2}^{4}\ \pi} \left\{ \frac{1}{\text{د}} - \frac{2}{\text{ی}} \right\} \quad \text{...(۸۶)}$$

اگر $\frac{۱}{د} > \frac{۲}{ی}$ سے یعنی ی > ۲ د سے

تو کمانی میں لپیٹے جانے کا تقاضا ہوگا۔

دھاتوں میں ی عموماً ۲ د سے بڑا ہوتا ہے۔

اس لئے دائری تار سے بنی ہوئی کمانی پر جب وزن لٹکایا جاتا ہے تو لپیٹے جانے کا تقاضا ہوتا ہے۔ بعض اشیا کے معیار لچک کی قیمتیں حسب ذیل ہیں:-

| نام شئے | $\frac{ی}{۱۰^{۱۱}}$ | $\frac{د}{۱۰^{۱۱}}$ | $ص = \frac{ی}{۲د} - ۱$ |
|---|---|---|---|
| الومنیم | ۷٫۳ | ۳٫۳۶ — ۲٫۳۸ | ۰٫۳۴ |
| پیتل | ۱۰٫۲ — ۹٫۷ | ۴٫۰۳ — ۳٫۴۴ | ۰٫۴ — ۰٫۳ |
| کانسٹنٹن | ۱۶٫۳ | ۶٫۱ | ۰٫۳۳ |
| تانبہ | ۱۲٫۹ — ۱۰٫۳ | ۴٫۶ — ۳٫۵ | ۰٫۳۵ — ۰٫۲۵ |
| سونا | ۸٫۰ — ۵٫۵ | ۴٫۲ — ۳٫۹ | ۰٫۴۲ |
| چاندی | ۷٫۹ — ۷٫۰ | ۲٫۹ — ۲٫۵ | ۰٫۳۸ |
| لوہا (ڈھلا ہوا) | ۱۶ — ۹٫۸ | ۵٫۳ — ۳٫۵ | ۰٫۳۱ — ۰٫۲۳ |
| لوہا (پٹا ہوا) | ۲۰ — ۱۷ | ۸٫۳ — ۶٫۶ | ۰٫۲۸ |
| فولاد | ۲۲ — ۱۸ | ۸٫۹ — ۷٫۹ | ۰٫۳۳ — ۰٫۲۵ |
| پلاطینم | ۱۷ — ۱۵ | ۷٫۴ — ۶٫۶ | ۰٫۲۲ |
| شیشہ | ۷٫۸ — ۵٫۴ | ۲٫۴ — ۱٫۲ | ۰٫۲۶ — ۰٫۲۰ |

## Chapter IV.

(۱) Properties of Matter "Poynting & Thomson" P66, (1922)
(۲) ,, ,, ,, P70, (1922)
(۳) Text Book of Sound "Barton" P180, (1919)
(۴) Properties of Matter "Wagstaff" P105, (1924)
(۵) Proc. Roy. Soc. 73 P334. Phil. Trans. A 204 I (1904)
(۶) Advanced Practical Physics "Worsnop & Flint" P106, (1927)
(۷) Properties of Matter "Wagstaff" P118 (1924)
(۸) Properties of Matter "Poynting & Thomson" P88, (1922)
(۹) Statics "Lamb" P323 (1924)
(۱۰) ,, ,, P324, (1924)
(۱۱) Properties of Matter "Poynting & Thomson" P94, (1922)
(۱۲) ,, ,, ,, ,, P95, (1922)
(۱۳) Phil Mag 49, 193 (1900)
(۱۴) Properties of Matter "Newman & Searle" P119 (1928)

# پانچواں باب*

## "حر حرکیات اور بگاڑوں میں تبدیلی" "حر نا گز ارلچک"

ہم دیکھ چکے ہیں کہ کسی شے کا معیار لچک اس کی تپش پر منحصر ہوتا ہے۔ اس سے ظاہر ہے کہ کسی جسم کی حالت جب تبدیل ہوتی ہے تو ساتھ ہی ساتھ اس کی تپش میں تغیر کا ہونا لازمی ہے کوئی جسم اگر بلند تر تپش پر کم تر تپش کے مقابلہ میں سخت ہو تو اسکے بگاڑ میں اضافہ کرنے سے اس کی تپش میں بھی اضافہ ہوگا، لیکن جسم اگر ایسا ہو کہ بلند تر تپش کے مقابلہ میں کمتر تپش پر اس میں سختی ہو تو بگاڑ میں اضافہ کرنے سے اسکی تپش میں کمی ہوگی۔ مثلاً ربر کی ڈوری کی پھیلاؤ کی شرح منفی ہے۔ اس ڈوری کو کھینچا جائے تو پہلے کی بہ نسبت یہ گرم ہو جائے گی نکل کے تار کی پھیلاؤ کی شرح مثبت ہوتی ہے اسکو کھینچنے سے یہ پہلے کی نسبت سرد ہو جائے گا۔ اس سردی کے اثر کو آسانی سے دریافت کیا جا سکتا ہے۔ نکل کا ایک موٹا سا تار لیکر لٹکا دیا جائے اور اس کے دونوں سروں کو وھیٹسٹون پل کے ایک بازو سے جوڑ دیا جائے تو مزاحمت کی رقوم میں اس تار پر وزن لٹکا کر تپش کی کمی دریافت کی جا سکتی ہے۔

لارڈ کلون نے حر حرکیات کی مدد سے سردی اور گرمی کے ان اثرات کا حساب لگایا تھا جو کسی جسم کی بگاڑ میں تغیر و تبدل کرنے سے جسم مذکور میں ظہور پذیر ہوتے ہیں۔ جول[1] کے تجربوں سے اس کی تصدیق بھی ہوتی ہے۔

کسی دھات سے بنے ہوئے ایک تار پرجس کی کمیت اکائی اور تراش عمودی کا رقبہ بھی اکائی ہو غور کرو۔ فرض کرو کہ اسکا طول ل ہے اور اس پر ق تناؤ عمل کر رہا ہے۔ تناؤ کی قیمت میں اضافہ "فرق" سے فرض کرو اس کے طول میں فرل اضافہ ہوتا ہے۔ یعنی جب تناؤ ق + + فرق ہو تو طول ل + فرل ہے۔

چونکہ تار کے طول میں اضافہ ہو رہا ہے لہذا اس پر کام کیا جا رہا ہے اور اس کے لئے تار کے جوہروں میں پھیلاؤ پیدا کرنے کے لئے بیرونی حرارت کی ضرورت ہوگی۔ تپش مستقل رکھی جاتی ہے لیکن تار سے مسلسل حرارت خارج ہونے کی وجہ سے تار سرد ہو جاتا ہے۔

حرحرکیات کے پہلے کلیہ سے:۔

فرحہ = فربہ + فرکہ .................................... (۱)

جہاں فرحہ = حرارت کی وہ مقدار جو خارج ہوتی ہے

فربہ = اندرونی توانائی میں تبدیلی

فرکہ = بیرونی کام جو جبلی طریقہ سے کیا گیا = ـ ق فرل

لہذا فرحہ = فربہ ـ ق فرل .................................... (۲)

چونکہ یہ عمل برعکس بھی ہو سکتا ہے۔

اسلئے حرحرکیات کے دوسرے کلیہ سے:۔

فرحہ = ت فرفہ .................................... (۳)

جہاں ت = تپش مطلق اور فرفہ = ناکارگی میں تبدیلی

مساوات (۳) اور (۲) سے فربہ = ت فرفہ + ق فرل

یعنی فر (بہ ـ ت فہ ـ ق ل) =

= ـ فہ فرت ـ ل فرق .................................... (۴)

یہ ایک کامل تفرق ہونے کی وجہ سے:۔

(فرفہ / فرق)ت = (فرل / فرت)ق یعنی (فرفہ)ت = (فرل / فرت)ق فرق

یعنی (فرحہ)ت = ت (فرل / فرت)ق . فرق

= (ت ل فرل / ل فرت) . فرق

لیکن فرل / ل فرت = عہ = طولی پھیلاؤ کی شرح

∴ (فرحہ)ت = ت ل عہ فرق ............ (۵)

چونکہ مساوات کے بائیں جانب کی تمام چیزیں کسی دھات کے لئے مثبت ہیں اسلئے اس دھات کے لئے (فرحہ)ت کی قیمت بھی مثبت ہوگی لیکن ربر کے لئے عہ کی قیمت منفی ہے اسلئے (فرحہ)ت بھی منفی ہے۔

لیکن (فرحہ)ت = فرت × ن × جو × ۱

جہاں ن = حرارت نوعی

جو = حرارت کا معادل جیلی

فرت = دھاتوں میں تناؤ کے اضافہ سے تپش میں کمی

∴ فرت = (ت ل عہ فرق / ن جو) ............ (۶)

ڈاکٹر جول[۱] نے مختلف دھاتوں کو استعمال کرکے اس مساوات کی تصدیق کی۔

مثلاً تانبے کے لئے ت = ۲٫۲۷۳، ل = ۱ / ۸۹٫۵۵

عہ = ۲٫۱۷ × ۱۰^-۶

فرق = ۰۸۰٫۱ × ۱۰^۹ ن = ۰۹۵ ء۰.

لہذا مساوات (۶) سے فرت = ۰۱۵۴ء۱ اور تجربہ سے فرت = ۱۷۴ء۱

فرض کرو کہ طول میں فرل اضافہ ہونے سے تپش میں کمی = فرت

تناؤ میں اضافہ فرق = (فرل / ل) ۔ ی جہاں ی = ینگ کا معیار لچک

$$\therefore \text{فرت} = \frac{\text{ت عہ ی فرل}}{\text{ن جو}} \quad \text{.........} \quad (۷)$$

اگر تار کی تپش میں تغیر = فرت، جبکہ اسکو گرم یا سرد ماحول سے متاثر کیا جاتا ہے، تو طول میں تبدیلی = ل عہ فرت

طول میں یہ جو تبدیلی واقع ہوئی ہے اسکا معاوضہ تناؤ میں ایسی تبدیلی کرنے سے ہوگا جس کی مقدار = فرق = (ل ی عہ فرت / ل) = ی عہ فرت

اسکو مساوات (۷) میں لکھنے سے :-

$$\text{فرت} = \frac{\text{ت} \left(\frac{\text{فرق}}{\text{فرت}}\right)_{\text{ل}} \text{فرل}}{\text{ن جو}} \quad \text{.........} \quad (۸)$$

مساوات (۸) مساوات (۶) کی طرح عملاً زیادہ نہیں استعمال ہوتی۔

اب تار کی مروڑ کی حالت پر غور کرو۔ فرض کرو کہ کسی دھات کا بنا ہوا ایک تار ایسا ہے کہ اسکا طول ل اور کمیت اور تراش عمودی کا رقبہ اکائی ہے اور اسپر مروڑ کا جفت ق عمل کر رہا ہے۔ فرض کرو کہ زاویہ مروڑ طہ بنتا ہے۔ جفت کی قیمت کو ق + فرق تک بڑھایا جائے تو فرض کرو مروڑ کا زاویہ طہ + فرطہ ہوجاتا ہے۔ حرحرکیات کے پہلے کلیہ سے

فرحہ = فربہ ـ ق فرطہ .......... (۹)

اور مساوات (۳) اور (۹) سے فربہ = ت فرفہ + ق فرطہ

یعنی فر(بہ ـ ت فہ ـ ق طہ) = ـ فہ فرت ـ طہ فرق

یہ ایک کامل تفرق ہونے کی وجہ سے:-

$\therefore \left(\frac{\text{فرفہ}}{\text{فرق}}\right)_{\text{ت}} = \left(\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}\right)_{\text{ق}}$ یعنی $(\text{فرفہ})_{\text{ت}} = \left(\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}\right)_{\text{ق}}$ فرق

$\therefore$ مساوات (۳) سے $(\text{فرحہ})_{\text{ت}} = \text{ت} \left(\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}\right)_{\text{ق}}$ فرق ....(۱۰)

مگر چوتھے باب میں یہ ثابت کیا جا چکا ہے کہ ق =

$= \frac{\text{دطہ}}{\text{ل}} \cdot \frac{\pi \text{ص}^{4}}{2}$ جہاں د = استواری کی شرح اور ص = تار کا نصف قطر

$\therefore \left(\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}\right)_{\text{ق}} = \frac{-2\text{ق ل}}{\pi \text{ص}^{4}} \cdot \frac{1}{\text{د}^{2}} \cdot \left(\frac{\text{فرد}}{\text{فرت}}\right)_{\text{ق}} =$

$= -\frac{\text{طہ}}{\text{د}} \left(\frac{\text{فرد}}{\text{فرت}}\right)_{\text{ق}}$ .................................... (۱۱)

$\therefore (\text{فرحہ})_{\text{ت}} = -\text{ت طہ} \frac{\text{فرد}}{\text{د فرت}} \cdot \text{فرق} = -\text{ت طہ گہ فرق}$ .....(۱۲)

جہاں گہ = استواری کی تپشی قدر

اور $\frac{\text{فرد}}{\text{فرت}}$ = دھاتوں کے لئے ایک منفی مقدار، اس لئے $(\text{فرحہ})_{\text{ت}}$ مثبت ہوگا۔

$\therefore \text{فرتا} = \frac{-\text{ت طہ گہ فرق}}{\text{ن جو}}$ ............................ (۱۳)

جہاں فرتا = مروڑ کے جفت میں اضافہ کی وجہ سے تپش میں کمی۔

اسی طرح سے سردی کا اثر جبکہ جسم کا حجم زیر غور ہو حسب ذیل طریقہ سے دریافت کیا جا سکتا ہے:-

اکائی کمیت کے ایک جسم پر غور کرو جسکا ابتدائی حجم دباؤ ق کے تحت ح ہے۔

فرض کرو کہ دباؤ ق + فرق تک بڑھایا جاتا ہے جس کی وجہ سے

حجم ح - فرح ہوجاتا ہے۔

حرحرکیات کے پہلے کلیہ سے :-

زحہ = فربہ - ق فرح ..................(۱۴)

مساوات (۳) اور (۱۴) سے فر(بہ - ت فہ - ق ح) =

= - فہ فرت - ح فرق.................. (۱۵)

یہ ایک کامل تفرق ہونے کی وجہ سے :-

$$\left(\frac{فرفہ}{فرق}\right)_{ت} = \left(\frac{فرح}{فرت}\right)_{ق} \text{ یعنے } \left(فرفہ\right)_{ت} = \left(\frac{فرح}{فرت}\right)_{ق} فرق$$

$$\therefore \left(فرحہ\right)_{ت} = ت\left(\frac{فرح}{فرت}\right)_{ق} فرق = \frac{ت}{ح}\left(\frac{فرح}{فرت}\right)_{ق} ح\ فرق$$

= ت عہ ح فرق.................. (۱۶)

جہاں عہ = حجمی پھیلاؤ کی شرح

$$\therefore فرت = \frac{ت\ ح\ عہ\ فرق}{ن\ حو} \text{..................(۱۷)}$$

**حرناگزار اور ہم تپشی لچک :-** جبکہ بگاڑ میں تبدیلی اسقدر تیز واقع ہو کہ حرارت کو باہر نکل جانے کے لئے وقت ہی نہ ملے تو اس وقت کے معیار لچک کو ہم حرناگزار معیار لچک کہتے ہیں۔

اور جب بگاڑ مستقل ہو جیسا کہ معمولی صورتوں میں ہوا کرتا ہے تو ایسا معیار لچک، ہم تپشی کہلاتا ہے۔

**ینگ کا حرناگزار معیار لچک :-** فرض کرو کہ ہم ایک ایسے تار کی حالت پر غور کررہے ہیں جس کی کمیت اور تراش عمودی کا رقبہ اکائی ہے، اگر تناؤ کی قیمت میں فرق کا اضافہ کیا جائے اور حرارت یا سردی باہر نکلنے نہ پائے تو طول ل میں اضافہ کے دو وجوہات ہوں گے۔

ایک تو طول میں اضافہ تناؤ ق کی وجہ سے ہوگا اور دوسرا تپش ت کی وجہ سے۔ لہذا ظاہر ہے کہ ل کوئی تفاعل ہے تنا اور ق کا

یعنی ل = ف (ق، ت)

$$\therefore \text{فرل} = \left(\frac{\text{فرل}}{\text{فرق}}\right)_{\text{ت}} \cdot \text{فرق} + \left(\frac{\text{فرل}}{\text{فرت}}\right)_{\text{ق}} \text{فرت}$$

فرض کرو کہ $\left(\frac{\text{فرل}}{\text{فرق}}\right)_{\text{فہ}}$ سے طول کے تغیر کی تعبیر بلحاظ اضافہ تناؤ حرناگزار حالات کے تحت ہوتی ہے اور $\left(\frac{\text{فرل}}{\text{فرق}}\right)_{\text{ت}}$ سے طول کے تغیر کی تعبیر بلحاظ اضافہ تناؤ ہم تپشی حالات کے تحت ہوتی ہے اور ی$_{\text{فہ}}$ = ینگ کا حرناگزار معیار لچک اور ی$_{\text{ت}}$ = ینگ کا ہم تپشی معیار لچک۔

ایسی صورت میں
$$\left(\frac{\text{فرل}}{\text{فرق}}\right)_{\text{فہ}} = \left(\frac{\text{فرل}}{\text{فرق}}\right)_{\text{ت}} + \left(\frac{\text{فرل}}{\text{فرت}}\right)_{\text{ق}} \left(\frac{\text{فرت}}{\text{فرق}}\right)_{\text{فہ}} \quad \text{......(۱۸)}$$

مساوات (۲) اور (۳) سے $\quad$ فر بہ = ت فرفہ + ق فرل

یعنی فر (بہ − ق ل) = ت فرفہ − ل فرق

بہ ایک کامل تفرق ہونے کی وجہ سے :-

$$\left(\frac{\text{فرت}}{\text{فرق}}\right)_{\text{فہ}} = -\left(\frac{\text{فرل}}{\text{فرفہ}}\right)_{\text{ق}} \quad \text{.................(۱۹)}$$

لہذا مساوات (۱۸) کو ہم یوں لکھ سکتے ہیں :-

$$\left(\frac{\text{فرل}}{\text{فرق}}\right)_{\text{فہ}} - \left(\frac{\text{فرل}}{\text{فرق}}\right)_{\text{ت}} = -\left(\frac{\text{فرل}}{\text{فرت}}\right)_{\text{ق}} \cdot \left(\frac{\text{فرل}}{\text{فرفہ}}\right)_{\text{ق}}$$

$$\text{یعنی} \ \frac{1}{\text{ل}}\left(\frac{\text{فرل}}{\text{فرق}}\right)_{\text{فہ}} - \frac{1}{\text{ل}}\left(\frac{\text{فرل}}{\text{فرق}}\right)_{\text{ت}} =$$

$$= -\frac{1}{\text{ل}}\left(\frac{\text{فرل}}{\text{فرت}}\right)_{\text{ق}} \cdot \left(\frac{\text{فرل}}{\text{فرت}}\right)_{\text{ق}} \cdot \left(\frac{\text{فرت}}{\text{فرفہ}}\right)_{\text{ق}}$$

$$\text{یعنی} \ \frac{1}{\text{ی}_{\text{فہ}}} - \frac{1}{\text{ی}_{\text{ت}}} =$$

$$= \left(\frac{\text{فرت}}{\text{فرفہ}}\right)_{\text{ق}} \frac{1}{\text{ل}} \cdot \left(\frac{\text{فرل}}{\text{فرت}}\right)_{\text{ق}} \cdot \left(\frac{\text{فرل}}{\text{فرت}}\right)_{\text{ق}} \frac{\text{ل}}{\text{ل}} - =$$

$$= - \text{ل عہ}^2 \left(\frac{\text{فرت}}{\text{فرفہ}}\right)_{\text{ق}} = - \text{ل عہ}^2 \text{ت} \left(\frac{\text{فرت}}{\text{فرحہ}}\right) =$$

$$= - \text{ل عہ}^2 \text{ت} \left(\frac{\text{فرت}}{\text{فرت} \times \text{ن} \times \text{جو} \times 1}\right) = \frac{- \text{ل عہ}^2 \text{ت}}{\text{ن جو}} \quad \ldots\ldots (۲۰)$$

چونکہ کسی دھات کے لئے اس مساوات کے بائیں جانب کی رقموں کی قیمت منفی ہے اس لئے $\text{ی}_{\text{فہ}}$ کی قیمت $\text{ی}_{\text{ت}}$ سے بڑی ہے۔

مثال کی طور پر تانبے کیلئے ل = ۱۱٫۰ سم، ت = ۲۷۳ تپش مطلق،

ت = ۰٫۰۹۵، عہ = ۱۷٫۲ × ۱۰$^{-۶}$

$\text{ی}_{\text{ت}}$ = ۱۲٫۲ × ۱۰$^{۱۱}$ ڈائین فی مربع سم

اور جو = ۴٫۲ × ۱۰$^{۷}$ ارگ

∴ مساوات (۲۰) سے:

$$\frac{\text{ی}_{\text{ت}}}{\text{ی}_{\text{فہ}}} = 1 - \frac{\text{ی}_{\text{ت}} \text{ل عہ}^2 \text{ت}}{\text{ن جو}} = ۰٫۹۹۷$$

لہذا دونوں لچک کے معیاروں میں بہت ہی کم فرق ہے۔

## حرناگزار استواری کی شرح :-

فرض کرو اکائی کمیت اور اکائی تراش عمودی کا ایک تار ایسا لیا جاتا ہے جس کا طول ل ہے۔ اور حرناگزار حالات کے تحت فرض کرو کہ جفت کی قیمت ق سے ق + فرق تک بڑھا دی جاتی ہے اور زاویہ مروڑ طہ سے طہ + فرطہ ہو جاتا ہے۔

ایسی حالت میں طہ، ت اور ق کا کوئی تفاعل ہوگا۔

یعنی طہ = ف (ق، ت)۔

$$\therefore \text{فرطہ} = \left(\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرق}}\right)_{\text{ت}} \cdot \text{فرق} + \left(\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}\right)_{\text{ق}} \cdot \text{فرت}$$

فرض کرو $د_{فہ}$ = حرناگزار استواری کی شرح

اور $د_{ت}$ = ہم تپشی استواری کی شرح

$$\therefore \left(\frac{فرطہ}{فرق}\right)_{فہ} = \left(\frac{فرطہ}{فرق}\right)_{ت} + \left(\frac{فرطہ}{فرت}\right)_{ق} \cdot \left(\frac{فرت}{فرق}\right)_{فہ}$$

یعنے $$\frac{1}{د_{فہ}} - \frac{1}{د_{ت}} = \left(\frac{فرطہ}{فرت}\right)_{ق} \cdot \left(\frac{فرت}{فرق}\right)_{فہ} \quad \text{......... (۲۱)}$$

لیکن مساوات (۳) اور (۹) سے :-

فربہ = ت فرفہ + ق فرطہ

یعنے فر(بہ - ق طہ) = ت فرفہ - طہ فرق

یہ ایک کامل تفرق ہونے کی وجہ سے :-

$$\left(\frac{فرت}{فرق}\right)_{فہ} = - \left(\frac{فرطہ}{فرفہ}\right)_{ق} \quad \text{......... (۲۲)}$$

لیکن مساوات (۲۱) اور (۲۲) سے :-

$$\frac{1}{د_{فہ}} - \frac{1}{د_{ت}} = - \left(\frac{فرطہ}{فرت}\right)_{ق} \cdot \left(\frac{فرطہ}{فرفہ}\right)_{ق} =$$

$$= - \left(\frac{فرطہ}{فرت}\right)_{ق} \cdot \left(\frac{فرطہ}{فرت}\right)_{ق} \cdot \left(\frac{فرت}{فرفہ}\right)_{ق}$$

مساوات (۱۱) سے $\left(\frac{فرطہ}{فرت}\right)_{ق}$ کی قیمت اگر لکھی جائے تو

$$\frac{1}{د_{فہ}} - \frac{1}{د_{ت}} = - \frac{طہ^2}{د^2} \left(\frac{فرد}{فرت}\right)^2_{ق} \cdot \left(\frac{فرت}{فرفہ}\right)_{ق} =$$

$$= - طہ^2 \left(\frac{فرد}{د\,فرت}\right)^2 \cdot \frac{ت\,فرت}{فرحہ} = - \frac{طہ\,گہ^2\,ت}{ن\,جو}$$

$$\therefore \frac{1}{د_{فہ}} - \frac{1}{د_{ت}} = - \frac{طہ^2\,گہ^2\,ت}{ن\,جو} \quad \text{......... (۲۳)}$$

اس کو پروفیسر ہارٹن نے پہلی دفعہ ثابت کیا۔

چونکہ کسی دھات کے لئے بائیں جانب کی رقوم کی قیمت اس مساوات میں

منفی ہے۔

لہٰذا $\text{د}_{\text{فہ}}$ کی قیمت $\text{د}_{\text{ت}}$ سے زیادہ ہوتی ہے۔

**لچک کا حرنا گزار حجمی معیار :-** اوپر کے طریقے کے مطابق لچک کے حرنا گزار حجمی معیار اور ہم تپشی حجمی معیار کے درمیان فرق دریافت کیا جا سکتا ہے۔

فرض کرو کہ ایک جسم ایسا لیا جاتا ہے جس کی کمیت اکائی ہے اور اس کے دباؤ میں ق سے ق + فرق تک اضافہ کیا جاتا ہے جس کی وجہ سے اسکا حجم ح سے ح - فرح ہو جاتا ہے۔

پہلے کی طرح یہاں بھی $\text{ح} = \text{ف}(\text{ق}، \text{ت})$

$$\therefore \text{فرح} = \left(\frac{\text{فرح}}{\text{فرق}}\right)_{\text{ت}} \cdot \text{فرق} + \left(\frac{\text{فرح}}{\text{فرت}}\right)_{\text{ق}} \cdot \text{فرت}$$

فرض کرو کہ $\text{ب}_{\text{فہ}}$ = لچک کا حرنا گزار حجمی معیار

اور $\text{ب}_{\text{ت}}$ = 〃 ہم تپشی 〃

$$\therefore \frac{1}{\text{ح}} \cdot \left(\frac{\text{فرح}}{\text{فرق}}\right)_{\text{فہ}} - \frac{1}{\text{ح}} \cdot \left(\frac{\text{فرح}}{\text{فرق}}\right)_{\text{ت}} =$$

$$= \frac{1}{\text{ح}} \left(\frac{\text{فرح}}{\text{فرت}}\right)_{\text{ق}} \cdot \left(\frac{\text{فرت}}{\text{فرق}}\right)_{\text{فہ}} \quad \ldots\ldots\ldots (۲۴)$$

مساوات (۳) اور (۱۴) سے :-

$$\text{فر}(\text{ہہ} - \text{ق ح}) = \text{ت فرفہ} - \text{ح فرق}$$

یہ ایک مکمل تفرق ہونے کی وجہ سے :-

$$\left(\frac{\text{فرت}}{\text{فرق}}\right)_{\text{فہ}} = -\left(\frac{\text{فرح}}{\text{فرفہ}}\right)_{\text{ق}} \quad \ldots\ldots\ldots (۲۵)$$

مساوات (۲۴) اور (۲۵) سے :-

$$\frac{1}{\text{ب}_{\text{فہ}}} - \frac{1}{\text{ب}_{\text{ت}}} = -\frac{1}{\text{ح}} \left(\frac{\text{فرح}}{\text{فرت}}\right)_{\text{ق}} \cdot \left(\frac{\text{فرح}}{\text{فرفہ}}\right)_{\text{ق}} =$$

$$= - \frac{۱}{ح} \left(\frac{فرح}{فرت}\right)_{ق} \cdot \left(\frac{فرح}{فرت}\right)_{ق} \left(\frac{فرت}{فرفہ}\right)_{ق} =$$

$$= - ح \left(\frac{فرح}{فرت}\right)^{۲}_{ق} \cdot ت \left(\frac{فرت}{فرحہ}\right)_{ق} = - \frac{ح\, عہ^{۲}_{۱}\, ت}{ن\, جو}$$

$$لہذا \quad \frac{۱}{ب_{فہ}} - \frac{۱}{ب_{ت}} = - \frac{ح\, عہ^{۲}_{۱}\, ت}{ن\, جو} \quad ..........\quad (۲۶)$$

حسب سابق یہاں بھی $ب_{فہ}$ کی قیمت $ب_{ت}$ سے زیادہ ہے۔

مثال کی طور پر تانبے کے لئے:۔

$ت = ۲۷۳^{\circ}$ تپش مطلق $\quad ح = ۱۱ر۰$ مکعب سم

$عہ_{۱} = ۵ \times ۱۰^{-۵} \quad ن = ۰ر۰۹۵$

$جو = ۲ر۴ \times ۱۰^{۷}$ ارگ $\quad ب_{ت} = ۷ر۱ \times ۱۰^{۱۲}$ ڈائین فی مربع سم

$$\therefore \frac{ب_{ت}}{ب_{فہ}} = ۱ - \frac{ب_{ت}\, ح\, عہ^{۲}_{۱}\, ت}{ن\, جو} = ۰ر۹۶۸$$

## Chapter V.

(1) Phil. Trans. 149, 91 (1859)

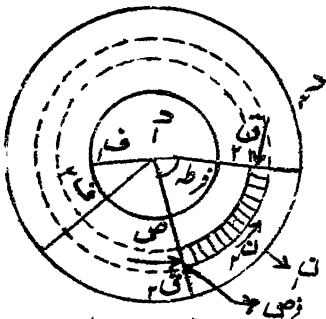
# چھٹا باب *

## مائعات کے پچکاؤ کی شرح اور تحدیدی طاقت

کسی خاص قیمت کے زور سے کسی مائع کے حجم میں، فی اکائی حجم جو کمی واقع ہوتی ہے وہ اس مائع کی پچکاؤ کی شرح کہلاتی ہے۔

سنہ ۱۶۶۰ء میں، پانی کے پچکاؤ کو ثابت کرنے کے لئے شہر فلورنس میں، چاندی کے کروں میں پانی بھر کر کروں کی شکل میں بگاڑ پیدا کیا گیا تھا مگر یہ تجربہ کچھ کامیاب نہیں ہوا۔ لیکن سنہ ۱۷۶۲ء میں کینٹن نامی ایک شخص نے اس امر کو ثابت کرنے میں کامیابی حاصل کی کہ دباؤ سے پانی میں پچکاؤ واقع ہوتا ہے، مگر اس کو بھی پچکاؤ کی شرح کی صحیح قیمت نہیں حاصل ہو سکی۔ بعد میں ماہرین طبعیات نے مختلف مائعیات کے حجموں میں دباؤ سے جو تبدیلی ہوتی ہے اس کی پیمائش کی۔ کینٹن نے شیشہ کا بنا ہوا ایک بڑا جوفہ استعمال کیا جس کے ساتھ شیشہ کی ایک تنگ شعری نلی جوڑ دی گئی تھی، پہلے جوفہ اور نلی کے کچھ حصہ میں پارہ بھرا گیا اور پھر جوفہ کو اتنا گرم کیا گیا کہ پھیل کر پارہ پورے جوفہ میں سما گیا۔ اسکے بعد شعری نلی کو بالکل بند کر دیا گیا، سرد ہونے پر پارہ اس میں نیچے اتر آیا۔ پارہ کی سطح پر اسوقت جو دباؤ عمل کر رہا تھا وہ دوران تجربہ کی تپش پر صرف پارہ کا بخاری دباؤ تھا، شعری نلی کے ایک سرے کو توڑ دینے سے، کرہ ہوائی کو دباؤ پڑا ہوا اندر داخل ہوئی اور پارہ کی سطح اور نیچے اتر آئی۔ پارہ کے حجم میں جو کمی فی اکائی حجم، اضافہ دباؤ کے باعث واقع ہوئی اس میں سے کچھ تو شیشے کے جوفہ کے پھیلاؤ سے واقع ہوئی اور کچھ پارے کے پچکاؤ سے۔ اسی تجربہ کو کینٹن نے پانی استعمال کر کے دوہرایا اور یہ دریافت کیا کہ پانی کے

حجم میں فی اکائی حجم کمی، پارہ کی بہ نسبت زیادہ ہوتی ہے۔ لہذا پانی کے حجم میں فی اکائی حجم کمی کا، پانی کے پچکاؤ کی وجہ سے واقع ہونا ضروری ہے۔ پانی کے پچکاؤ کی شرح دریافت کرنے کے لئے اول ہمیں یہ معلوم کرنا ہوگا کہ جوفہ کے حجم اور نلی میں جو حقیقی تبدیلی (اندر متناظر دباؤ کی وجہ سے) واقع ہوتی ہے وہ کتنی ہے۔
لہذا ہم یہاں کسی قدر تفصیل کے ساتھ اس پر غور کریں گے کہ کسی برتن کے حجم میں جب کہ اس پر اندرونی اور بیرونی دباؤ پڑ رہا ہو حقیقی تبدیلی کیسے واقع ہوتی ہے۔

ایک لمبی اسطوانہ نما نلی کی صورت پر غور کرو جس کے دونوں سرے چپٹے ہوں۔
فرض کرو کہ اس پر بیرونی دباؤ $د_2$ اور اندرونی دباؤ $د_1$ عمل کر رہا ہے۔
ایسے اسطوانہ کی تراش (شکل ۱) میں دکھلائی گئی ہے۔ فرض کرو کہ اسطوانہ کے اندرونی اور بیرونی نصف قطر علی الترتیب $ف_1$ اور $ف_2$ ہیں۔ اس کی ایک بالکل چھوٹی دائری دھجی کو لو جس کے نصف قطر ص اور ص + فرص ہو اور موٹائی نیچے کی جانب اکائی ہو۔ فرض کرو کہ یہ دھجی مرکز پر ایک بالکل چھوٹا زاویہ فرطہ بناتی ہے اسطوانہ کے اندرونی اور بیرونی دباؤ کے فرق کی وجہ سے یہ بھی فرض کرو کہ مرکز سے فاصلہ ص پر کسی ذرے کا قطری نقل مکان فہ کے مساوی ہے۔

شکل ۱

تب ص + فرص پر نقل مکان فہ + $\frac{\text{فرفہ}}{\text{فرص}}$ . فرص کے مساوی ہوگا۔

$$\therefore \text{قطری سمت میں لگاڑ} = ن_1 = \frac{\left(\text{فہ} + \frac{\text{فرفہ}}{\text{فرص}} \cdot \text{فرص}\right) - \text{فہ}}{\text{فرص}} = \frac{\text{فرفہ}}{\text{فرص}} \quad \text{......(۱)}$$

فرض کرو کہ قطری آڑی سمت میں بگاڑ = ن۲ جیسا کہ شکل سے ظاہر ہے۔

$$\text{اور یہ } \text{ن}_۲ = \frac{۲\pi(\text{ص}+\text{فہ}) - ۲\pi\,\text{ص}}{۲\pi\,\text{ص}} = \frac{\text{فہ}}{\text{ص}} \quad \ldots\ldots\ldots (۲)$$

فرض کرو کہ قطری دباؤ مرکز سے ص فاصلہ پر = ق۱ اور ص + فرص فاصلہ پر = $\text{ق}_۱ + \frac{\text{فرق}_۱}{\text{فرص}} \cdot \text{فرص}$، اب چونکہ اس ٹکڑے کے طول ص فرطہ اور (ص + فرص) فرطہ ہوں گے۔

∴ اس چھوٹے ٹکڑے پر حاصل قطری قوت

$$= \left(\text{ق}_۱ + \frac{\text{فرق}_۱}{\text{فرص}} \cdot \text{فرص}\right)(\text{فرص} + \text{ص})\,\text{فرطہ} - \text{ق}_۱\,\text{ص}\,\text{فرطہ}$$

$$\simeq \left(\text{ص}\,\frac{\text{فرق}_۱}{\text{فرص}} \cdot \text{فرص} + \text{ق}_۱\,\text{فرص}\right)\text{فرطہ}$$ کیونکہ فرص بہت چھوٹا ہے اسلئے $(\text{فرص})^۲$ کو نظر انداز کر دیا گیا ہے۔

اب اگر اس ٹکڑے پر قطر کی آڑی سمت میں دباؤ ق۲ ہو جیسا کہ شکل سے ظاہر ہے اور جو اس ٹکڑے کے دونوں سروں پر عمل کر رہا ہے تو

$$\text{قطر کی آڑی سمت میں قوت} = ۲\,\text{ق}_۲ \cdot \text{فرص} \cdot \frac{\text{فرطہ}}{۲} = \text{ق}_۲\,\text{فرص}\,\text{فرطہ}$$

$$\text{اب تعادل کیلئے } \text{ق}_۲\,\text{فرص}\,\text{فرطہ} = \left(\text{ص}\,\frac{\text{فرق}_۱}{\text{فرص}} \cdot \text{فرص} + \text{ق}_۱\,\text{فرص}\right)\text{فرطہ}$$

$$\therefore\ \text{ق}_۲ - \text{ق}_۱ = \text{ص}\,\frac{\text{فرق}_۱}{\text{فرص}} \quad \ldots\ldots\ldots (۳)$$

چوتھے باب کی ساوات (۳) سے یہ ہمیں معلوم ہے کہ

$$\text{ق}_۱ = \text{ک}\,\text{ن}_۱ + \text{گ}\,(\text{ن}_۲ + \text{ن}_۳) \quad \ldots\ldots\ldots (۴)$$

$$\text{ق}_۲ = \text{ک}\,\text{ن}_۲ + \text{گ}\,(\text{ن}_۱ + \text{ن}_۳) \quad \ldots\ldots\ldots (۵)$$

$$\text{ق}_۳ = \text{ک}\,\text{ن}_۳ + \text{گ}\,(\text{ن}_۱ + \text{ن}_۲) \quad \ldots\ldots\ldots (۶)$$

اور ان مساواتوں کی مدد سے ہم نے ان مستقلوں کی قیمت حاصل کی تھی۔

یعنی $ک = ب + \frac{۴}{۳} د$ اور $گ = ب - \frac{۲}{۳} د$ جہاں
$ب$ = حجمی معیار لچک اور $د$ = استواری کی شرح
اس صورت میں مساوات (۱)، (۲) اور (۴) کی مدد سے

$$- ق_۱ = ک \frac{فرفہ}{فرص} + گ \left( \frac{فہ}{ص} + ن_۳ \right) \quad ......... (۷)$$

اور اسی طرح مساوات (۵) اور (۶) کو بھی لکھ سکتے ہیں۔ -

$$- ق_۲ = ک \frac{فہ}{ص} + گ \left( \frac{فرفہ}{فرص} + ن_۳ \right) \quad ......... (۸)$$

$$\text{اور } ن_۲ = ک ن_۳ + گ \left( \frac{فرفہ}{فرص} + \frac{فہ}{ص} \right) \quad ......... (۹)$$

مساوات (۸) کو (۷) میں سے تفریق کرنے سے

$$ق_۲ - ق_۱ = (ک - گ) \frac{فرفہ}{فرص} - (ک - گ) \frac{فہ}{ص} \quad ...... (۱۰)$$

اب مساوات (۷) کو بلحاظ ص تفرقانے اور $-ص$ سے ضرب دینے سے

$$ص \frac{فرق_۱}{فرص} = - ک ص \frac{فر^۲ فہ}{فرص^۲} - گ \frac{فرفہ}{فرص} + گ \frac{فہ}{ص} \quad ...... (۱۱)$$

اور مساوات (۱۰) اور (۱۱) کو مساوات (۳) میں درج کرنے اور ص سے ضرب دینے سے

$$ص^۲ \frac{فر^۲ فہ}{فرص^۲} + \frac{ص \, فرفہ}{فرص} - فہ = صفر$$

یہ ایک دوسرے رتبہ کی تفرقی مساوات ہے اسلئے اسکا حل :-

$فہ = ج ص^م$ جہاں ج اور م مستقل ہیں

فہ کی قیمت اس تفرقی مساوات میں درج کرنے سے

$$ج ص^۲ م(م-۱) ص^{(م-۲)} + ج ص م ص^{(م-۱)} - ج ص^م = صفر$$

یعنی $م^۲ - ۱ = صفر$ یعنی $م = \pm ۱$

$\therefore$ $فہ = ج_1 ص + \frac{ج_2}{ص}$ .......................... (۱۲)

جہاں $ج_1$ اور $ج_2$ مستقل ہیں

اس مساوات کو لیمی کی مساوات کہتے ہیں۔

اب مساوات (۷)، (۸) اور (۹) میں ک، گ اور فہ کی قیمتیں درج کرنیسے

$$-ق_1 = (ب + \frac{4}{3} د)(ج_1 - \frac{ج_2}{ص^2}) + (ب - \frac{2}{3} د)(ج_1 + \frac{ج_2}{ص^2} + ن_3)$$

$$-ق_2 = (ب + \frac{4}{3} د)(ج_1 + \frac{ج_2}{ص^2}) + (ب - \frac{2}{3} د)(ج_1 - \frac{ج_2}{ص^2} + ن_2)$$

اور $ق_3 = (ب + \frac{4}{3} د) ن_3 + (ب - \frac{2}{3} د) 2 ج_1$

جبکہ $ص = ف_1$ تو $ق_1 = د_1$ اور جبکہ $ص = ف_2$ تو $ق_1 = د_2$

$$\therefore -د_1 = (ب + \frac{4}{3} د)(ج_1 - \frac{ج_2}{ف_1^2}) + (ب - \frac{2}{3} د)(ج_1 + \frac{ج_2}{ف_1^2} + ن_3)$$

$$اور\ -د_2 = (ب + \frac{4}{3} د)(ج_1 - \frac{ج_2}{ف_2^2}) + (ب - \frac{2}{3} د)(ج_1 + \frac{ج_2}{ف_2^2} + ن_2)$$

اب ان دونوں مساواتوں کی مدد سے

$$ج_2 = \frac{1}{2د} \times \frac{(د_2 - د_1) ف_1^2 ف_2^2}{(ف_1^2 - ف_2^2)}$$ .......................... (۱۳)

اور $\frac{د_۲ ف_۲^۲ - د_۱ ف_۱^۲}{ف_۱^۲ - ف_۲^۲} = ج_۱ (۲ب + \frac{۲}{۳} د) +$

$+ ن_۳ (ب - \frac{۲}{۳} د)$ ............ (۱۴)

شکل ۲ کے اسطوانہ پر غور کرو جس کا اندرونی نصف قطر $ف_۱$ اور بیرونی نصف قطر $ف_۲$ ہے۔

حاصل طولی قوت $= د_۱ \pi ف_۱^۲ - د_۲ \pi ف_۲^۲$

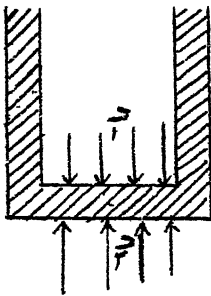
∴ اوسط طولی زور جو کہ محور کے متوازی ہے =

$$= ق_۳ = \frac{د_۱ \pi ف_۱^۲ - د_۲ \pi ف_۲^۲}{\pi ف_۲^۲ - \pi ف_۱^۲}$$

یعنی $ق_۳ = \frac{د_۱ ف_۱^۲ - د_۲ ف_۲^۲}{ف_۲^۲ - ف_۱^۲} =$

$= (ب + \frac{۴}{۳} د) ن_۳ + (ب - \frac{۲}{۳} د) ۲ ج_۱$ ............ (۱۵)

ہمکو معلوم ہے کہ $ن_۳ = \frac{ق_۳}{۳ب}$

$$\therefore ن_۳ = \frac{د_۲ ف_۲^۲ - د_۱ ف_۱^۲}{۳ب (ف_۱^۲ - ف_۲^۲)}$$ ............ (۱۶)

شکل ۲

اب $ن_۳$ کی اس قیمت کو مساوات (۱۴) میں درج کرنے سے

$$\frac{د_۲ ف_۲^۲ - د_۱ ف_۱^۲}{ف_۱^۲ - ف_۲^۲} = ج_۱ (۲ب + \frac{۲}{۳} د) + \left\{ \frac{د_۱ ف_۱^۲ - د_۲ ف_۲^۲}{۳ب (ف_۲^۲ - ف_۱^۲)} \right\} (ب - \frac{۲}{۳} د)$$

یعنی $ج_۱ = \frac{د_۲ ف_۲^۲ - د_۱ ف_۱^۲}{۳ب (ف_۱^۲ - ف_۲^۲)} = ن_۳$ ............ (۱۷)

اگر $د_۱ = د_۲ = ق$ تو $ن_۳ = \frac{-ق}{۳ب} = \frac{فرل}{ل}$ جہاں فرل اضافۂ طول ہے

$$\therefore \text{ب} = \frac{-\text{ق}}{\frac{\text{۳ فرل}}{\text{ل}}} = \text{حجمی معیار لچک}$$

اگر $\text{د}_1 = \text{ق}$ اور $\text{د}_2 = $ صفر تو $\text{ن}_2 = \frac{\text{فرل}}{\text{ل}} = \frac{\text{ق ف}_1^2}{\text{۳ ب}(\text{ف}_2^2 - \text{ف}_1^2)}$

اگر ٹ = اسطوانہ کی موٹائی تو $\text{ن}_2 = \frac{\text{فرل}}{\text{ل}} = \frac{\text{ق ف}_1^2}{\text{۳ ب ٹ}(\text{ف}_2 + \text{ف}_1)}$

اگر ٹ بمقابلہ $\text{ف}_1$ بہت چھوٹا ہو تو $\text{ن}_2 = \frac{\text{فرل}}{\text{ل}} = \frac{\text{ق ف}_1}{\text{۶ ب ٹ}}$

اسی طریقہ کو میلیک (۱) نے مختلف اشیاء کی ب کی قیمت دریافت کرنے کیلئے استعمال کیا تھا۔ اسطوانہ کا اندرونی دباؤ سکون سیالات کے طریقہ سے لگایا گیا تھا اور طول میں تبدیلی فی اکائی طول ناپ کر دریافت کرلی گئی تھی لہذا ب کی قیمت اسطوانہ کا نصف قطر اور موٹائی معلوم کرنے سے دریافت کی گئی تھی۔

اگر $\text{د}_2 = \text{ق}$ اور $\text{د}_1 = $ صفر تو $\text{ن}_2 = \frac{\text{فرل}}{\text{ل}} = \frac{-\text{ق ف}_2^2}{\text{۳ ب}(\text{ف}_2^2 - \text{ف}_1^2)}$

یہاں منفی علامت اس وجہ سے حاصل ہوئی ہے کہ بیرونی دباؤ اسطوانہ کو پچکا دیتا ہے جس کی وجہ سے اسکا طول بڑھ جاتا ہے۔

اب ہم قطری دباؤ $\text{ق}_1$ اور $\text{ق}_2$ کو $\text{د}_1$ اور $\text{د}_2$ وغیرہ کی رقموں میں حاصل کریں گے :۔

یہ ہمیں معلوم ہے کہ $-\text{ق}_1 = (\text{ب} + \frac{4}{3}\text{د})(\text{ج}_1 - \frac{\text{ج}_2}{\text{ص}^2}) + (\text{ب} - \frac{2}{3}\text{د})(\text{ج}_1 + \frac{\text{ج}_2}{\text{ص}^2} + \text{ن}_2)$

اور $-\text{ق}_2 = (\text{ب} + \frac{4}{3}\text{د})(\text{ج}_1 + \frac{\text{ج}_2}{\text{ص}^2}) + (\text{ب} - \frac{2}{3}\text{د})(\text{ج}_1 - \frac{\text{ج}_2}{\text{ص}^2} + \text{ن}_2)$

ان دونوں مساواتوں میں ج۱ اور ج۲ اور ن۲ کی قیمتیں درج کرنے سے

$$-ق_1 = \frac{د_2 ف_2^2 - د_1 ف_1^2}{ف_1^2 - ف_2^2} - \frac{(د_2 - د_1) ف_1^2 ف_2^2}{ص^2 (ف_1^2 - ف_2^2)} \quad \text{......(۱۸)}$$

اور

$$-ق_2 = \frac{د_2 ف_2^2 - د_1 ف_1^2}{ف_1^2 - ف_2^2} + \frac{(د_2 - د_1) ف_1^2 ف_2^2}{ص^2 (ف_1^2 - ف_2^2)} \quad \text{......(۱۹)}$$

اگر $د_2 =$ صفر

تو

$$-ق_1 = \frac{-د_1 ف_1^2}{ف_1^2 - ف_2^2} + \frac{د_1 ف_1^2 ف_2^2}{ص^2 (ف_1^2 - ف_2^2)}$$

یعنی قطری دباؤ

$$ق_1 = \frac{د_1 ف_1^2}{ف_1^2 - ف_2^2} \left\{ 1 - \frac{ف_2^2}{ص^2} \right\} \quad \text{......(۲۰)}$$

اسی طرح لاقطری دباؤ

$$ق_2 = \frac{-د_1 ف_1^2}{ف_2^2 - ف_1^2} \left\{ 1 + \frac{ف_2^2}{ص^2} \right\} \quad \text{......(۲۱)}$$

اب ہم ایک ایسے مائع کی صورت پر غور کریں گے جو ایک اسطوانہ نما برتن میں پچکایا جاتا ہے جب یہ مائع پچکتا ہے تو فرض کرو کہ ص، ص + فہ اور اسطوانہ کا طول ل، ل + فرل ہو جاتا ہے۔

یہمی کی مساوات میں ج۱ اور ج۲ کی قیمتیں درج کرنے سے

$$فہ = \frac{ص}{۳ب} \left( \frac{د_2 ف_2^2 - د_1 ف_1^2}{ف_1^2 - ف_2^2} \right) + \frac{1}{۲د} \left\{ \frac{(د_2 - د_1) ف_1^2 ف_2^2}{ص (ف_1^2 - ف_2^2)} \right\}$$

$ص = ف_1$ پر فرض کرو کہ $فہ = فہ_1$

$$\therefore فہ_1 = \frac{ف_1}{۳ب} \left( \frac{د_2 ف_2^2 - د_1 ف_1^2}{ف_1^2 - ف_2^2} \right) + \frac{1}{۲د} \left\{ \frac{(د_2 - د_1) ف_1 ف_2^2}{(ف_1^2 - ف_2^2)} \right\} \quad \text{......(۲۲)}$$

فرض کرو کہ برتن کا اندرونی حجم ابتداً میں $\text{ح}_1$ تھا اور دباؤ کے بعد $\text{ح}_1 + \text{فرح}_1$ ہوگیا۔

تب $\text{ح}_1 = \pi\, \text{ف}_1^2\, \text{ل}$ اور $\text{ح}_1 + \text{فرح}_1 = \pi (\text{ف}_1 + \text{فہ}_1)^2 (\text{ل} + \text{فرل})$

اب اگر یہ مان لیا جائے کہ فرل اور $\text{فہ}_1$ بہت چھوٹے ہیں تو ان کے اونچی طاقت والے رقوم نظرانداز کئے جا سکتے ہیں۔

$$\therefore \frac{\text{فرح}_1}{\text{ح}_1} = \frac{2\,\text{فہ}_1}{\text{ف}_1} + \frac{\text{فرل}}{\text{ل}} = \frac{2\,\text{فہ}_1}{\text{ف}_1} + \text{لن}_2$$

مساوات (١٧) اور (٢٢) کی مدد سے:۔

$$\frac{\text{فرح}_1}{\text{ح}_1} = \frac{\text{د}_2\text{ف}_2^2 - \text{د}_1\text{ف}_1^2}{\text{ب}(\text{ف}_1^2 - \text{ف}_2^2)} + \frac{(\text{د}_2 - \text{د}_1)\,\text{ف}_2^2}{\text{د}(\text{ف}_1^2 - \text{ف}_2^2)} \quad \text{..........} (٢٣)$$

اسی طرح بیرونی حجم کے لئے:۔

$$\frac{\text{فرح}_2}{\text{ح}_2} = \frac{\text{د}_2\text{ف}_2^2 - \text{د}_1\text{ف}_1^2}{\text{ب}(\text{ف}_1^2 - \text{ف}_2^2)} + \frac{(\text{د}_2 - \text{د}_1)\,\text{ف}_1^2}{\text{د}(\text{ف}_1^2 - \text{ف}_2^2)} \quad \text{..........} (٢٤)$$

**پچکاؤ کی شرح دریافت کرنے کے طریقے:۔** یہاں ریؤ کا وہ طریقہ بیان کیا جائے گا جس کے ذریعہ مائعات کے پچکاؤ کی شرح دریافت کی گئی تھی اگر مساوات (٢٣) میں $\text{د}_2 = \text{د}_1 = \text{ق}$ فرض کریں

تو $\frac{\text{فرح}_1}{\text{ح}_1} = -\frac{\text{ق}}{\text{ب}}$ جہاں ب = برتن کے مادہ کا حجمی معیار لچک

اسی طرح مائع کے لئے جو اس برتن میں رکھا گیا ہے

$\frac{\text{فرح}}{\text{ح}} = -\frac{\text{ق}}{\text{بَ}}$ جہاں بَ = اس مائع کا حجمی معیار لچک

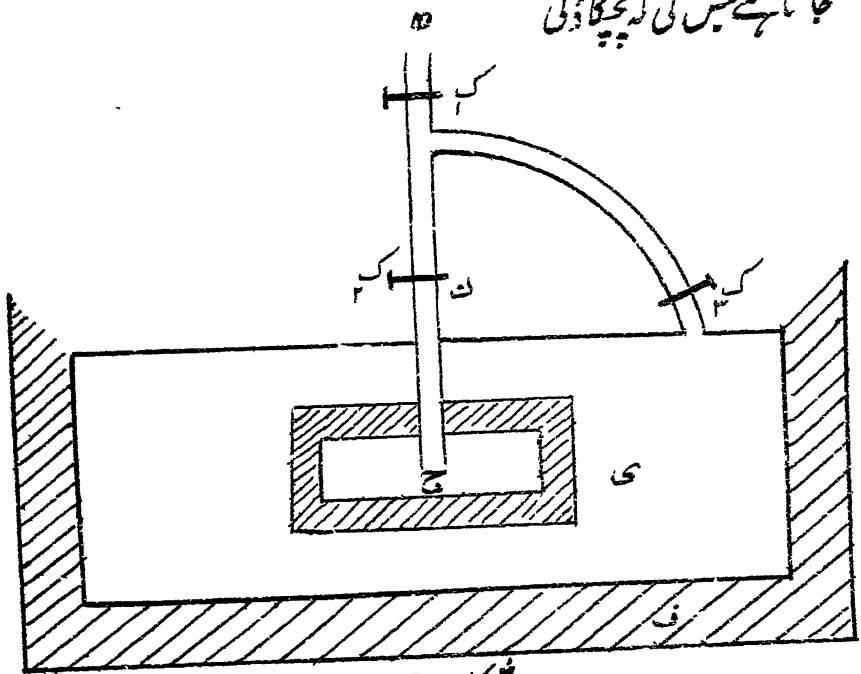
اب چونکہ برتن اور مائع کا حجم ایک ہی ہے۔
اس لئے حاصل کمی جو حجم میں واقع ہوگی $= \frac{\text{فرح}_1}{\text{ح}} - \frac{\text{فرح}}{\text{ح}}$

$$= \frac{\text{فرح}_1 - \text{فرح}}{\text{ح}}$$

$$= \text{ق}\left(\frac{1}{\text{بَ}} - \frac{1}{\text{ب}}\right)$$

رینو نے اس طریقہ سے، اندرونی اور بیرونی دباؤ ایک ہی رکھ کر
بَ کی قیمت دریافت کی اور چنانچہ اسی طرح $\frac{1}{بَ}$ یعنی مائع کے پچکاؤ کی شرح
دریافت کی گئی۔ اس تجربہ میں ب کا معلوم کرنا ضروری ہے۔

جن آلات کا رینو نے استعمال کیا تھا وہ شکل نمبر ۳ میں بتائے گئے ہیں۔

ج ایک اسطوانہ نما برتن
ہے جس میں اس مائع کو رکھا
جاتا ہے جس کی کہ پچکاؤ کی

شکل ۳

شرح دریافت کرنا مطلوب ہوتا ہے۔ اس برتن کو ایک دوسرے برتن ی میں
رکھا جاتا ہے اور اس میں پانی بھر دیا جاتا ہے۔ ان سب کو پھر ایک اور بڑے
برتن ف میں داخل کیا جاتا ہے جس میں یا تو برف رکھی جاتی ہے یا بھاپ گزاری
جاتی ہے۔ اس برتن کو استعمال کرنے کا مقصد صرف یہ ہے کہ تپش مستقل رہے۔
ج میں کا مائع نلی ٹ کے درجہ دار تنے تک پہنچ جاتا ہے، نلی ٹ کا حجم کسی دو

متوازن نشانوں کے درمیان دریافت کیا جاتا ہے۔ اس کی اس وقت ضرورت
نہیں ہوتی جبکہ خود نلی کی درجہ بندی کی گئی ہو۔ $ک_۱$، $ک_۲$ اور $ک_۳$ ٹونٹیاں
ہیں جن کو حسب خواہش کھولا یا بند کیا جا سکتا ہے، ھ سے پکی ہوئی ہوا
کے ذریعہ دباؤ ڈالا جا سکتا ہے اور اس دباؤ کو داب پیما سے ناپا بھی جا سکتا
ہے۔ نلیاں اس طرح ترتیب دی گئی ہیں کہ مناسب ٹونٹیوں کو کھولنے سے
دباؤ یا تو صرف ج کے بیرونی جانب عمل کرتا ہے اور اندرونی جانب بالکل
نہیں عمل کرتا، یا اس کے برعکس عمل کرتا ہے یا بیک وقت نلی کے بیرونی
اور اندرونی دونوں جانب اثر کرتا ہے۔ $د_۱$ کو $د_۲$ کے مساوی رکھنا ہو تو
$ک_۲$ اور $ک_۳$ دونوں ٹونٹیاں کھول دی جائیں اور دباؤ کو عمل کرنے دیا جائے۔
اس صورت میں اگر مائع کی سطح $ا_۱$ کے مساوی نیچے اتر آئے

$$ تو\ ا_۱ س = ف ر ح_۱ - ف ر ح = ح ق \left(\frac{۱}{بَ} - \frac{۱}{ب}\right) \quad ......(۲۵) $$

جہاں س = نلی ن کے تراش عمودی کا رقبہ
لہذا مساوات (۲۵) سے ب کی قیمت دریافت کرنے کے بعد ہم بَ کی
قیمت دریافت کر سکتے ہیں اور اس طرح مائع کے پچکاؤ کی شرح دریافت کی جا
سکتی ہے۔

اس صورت میں مائع کی سطح کا چڑھاؤ اگر $ا_۲$ کے مساوی ہو اور ق = $د_۲$ اور ح
= صفر

$$ تو\ ا_۲ س = \frac{-ح ق ف_۲^۲}{ف_۲^۲ - ف_۱^۲}\left\{\frac{۱}{ب} + \frac{۱}{د}\right\} \quad ......(۲۶) $$

یہاں بَ اس لئے غائب ہو جاتا ہے کہ اس صورت میں مائع پچکایا نہیں
جا رہا ہے اگر مائع کی سطح کا اتار اس صورت میں = $ا_۳$ اور ق = $د_۱$ اور $د_۲$ = صفر

$$ تو\ ا_۳ س = \frac{ح ق}{ف_۲^۲ - ف_۱^۲}\left\{\frac{ف_۲^۲ - ف_۱^۲}{بَ} + \frac{ف_۱^۲}{ب} + \frac{ف_۲^۲}{د}\right\} \quad ......(۲۷) $$

اب مساوات (۲۵) (۲۶) اور (۲۷) سے :-

$ا_1 س = ا_2 س + ا_3 س$

$\therefore ا_1 = ا_2 + ا_3$ ............................ (۲۸)

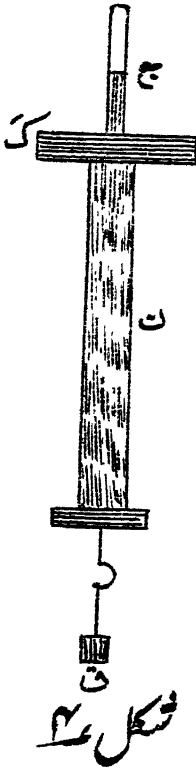
ریگنو نے اس ضابطہ کی تجربی طور پر تحقیق کی اور اس طرح نظریہ کی صحت کا ثبوت حاصل کیا لیمی کا یہ خیال تھا کہ پواسان کی نسبت سب مادی اشیاء کے لئے $\frac{1}{4}$ کے مساوی ہے۔

چنانچہ چوتھے باب کی مساوات (۲) سے $د = \frac{۲}{۵}$ ب

اسی بنا پر ریگنو نے مساوات (۲۶) میں د کے بجائے $\frac{۲}{۵}$ ب رکھ کر ب کی قیمت پہلے تجربہ سے دریافت کی اور اس کے بعد مساوات (۲۵) کی مدد سے مائع کے لئے ب کی قیمت دریافت کی لیکن یہ طریقہ ٹھیک نہیں۔ لیمی کی رائے بعد میں غلط ثابت ہوئی لہذا یہی بہتر ہے کہ ب کی قیمت ایک علیحدہ تجربہ سے دریافت کی جائے اور پھر اس آسان ضابطہ سے بَ کی قیمت معلوم کی جائے۔ ب کی قیمت جیسا کہ اوپر بیان ہو چکا ہے میلیک کے طریقے سے بھی دریافت کی جا سکتی ہے مگر جو طریقہ ذیل میں لکھا جاتا ہے وہ اس سے بھی زیادہ آسان ہے۔

شکل $\frac{۸۲}{۴}$ میں ت ایک ٹھوس نلی ہے جس کیلئے ب کی قیمت دریافت کرنی ہے۔ یہ نلی ایک اور درجہ دار پتلی نلی ج سے بند کردی گئی ہے اور اس میں پانی بھرا جاتا ہے ک، ک پر نلی کو اچھی طرح جما دینے کے بعد ایک تناؤ ق لگایا جاتا ہے۔

نلی بڑھتی ہے اور اسکا اندرونی حجم زیادہ ہو جاتا ہے حجم میں یہ اضافہ فرح جو واقع ہوتا ہے وہ پتلی نلی ج میں پانی کے نیچے اتر آنے سے ناپا جاتا ہے۔ نلی کا ابتدائی حجم ح اگر معلوم ہو تو حسب ذیل مساوات سے (جو چوتھے باب صفحہ ۸۲ سے لی گئی ہے) ب کی قیمت آسانی سے معلوم ہو جاتی ہے :-

$$\frac{\text{فرح}_1}{\text{ح}_1} = \frac{\text{ق}}{\text{۳ ب}} \quad \text{.............................} \quad (۲۹)$$

کسی مائع کے پچکاؤ کی شرح دریافت کرنے کا بہترین طریقہ یہ ہے کہ شکل ۳ کے آلات میں پہلے کوئی مائع (مثلاً پارہ) بھر دیا جائے جس کی پچکاؤ کی شرح معلوم ہے اور اس کے بعد جب برتن کے اندرونی اور بیرونی جانب دباؤ ایک ہی ہو تو حجم میں جو ظاہری تبدیلی ہوتی ہے اس کو معلوم کر لیا جائے۔ پھر برتن میں ایسا مائع بھر دیا جائے جس کے پچکاؤ کی شرح دریافت طلب ہے۔ اب اسی طرح حجم کی ظاہری تبدیلی کو دریافت کریں جبکہ اندرونی اور بیرونی دباؤ ایک ہی ہو۔

پارہ کی صورت میں جس کے پچکاؤ کی شرح $\frac{۱}{\text{بً}}$ معلوم ہے مساوات (۲۵) سے ہمکو یہ مساوات حاصل ہو گی۔

ج

ک ک

ت

ق

شکل ۴

$$\text{اَ س} = \text{ح قَ} \left( \frac{۱}{\text{بً}} - \frac{۱}{\text{ب}} \right) \quad \text{..............} \quad (۳۰)$$

جہاں اَ = پارہ کی سطح کا اُتار اور $\text{د}_1 = \text{قَ} = \text{د}_2$

لہذا مساوات (۲۵) اور (۳۰) سے دونوں نامعلوم مقادیر ب اور بً کی قیمتیں دریافت کر لی جا سکتی ہیں :-

آواز کی رفتار کی مدد سے بھی کسی مائع کی پچکاؤ کی شرح دریافت کی جا سکتی ہے۔ آواز کی کسی کتاب سے یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ

$$\text{ر} = \sqrt{\frac{\text{معیار لچک}}{\text{کثافت}}}$$ جہاں ر = کسی واسطہ میں آواز کی رفتار

بارتھی نے ۴° م اور ۵۲° م پر معیار لچک کی قیمت معلوم کرنے کے بعد پانی کی بچکاؤ کی شرح دریافت کی تھی(۳)۔

دباؤ، تپش اور ارتکاز کا اثر بچکاؤ کی شرح پر :- ٹیٹ نے یہ دریافت کیا کہ کسی مائع کے بچکاؤ کی شرح دباؤ کے بڑھنے سے گھٹنے لگتی ہے(۴)۔ اکثر مائعات کی بچکاؤ کی شرح تپش کے بڑھنے سے بڑھتی ہے۔ گراسی نے تجربہ کرنے کے بعد یہ ثابت کیا کہ پانی کے بچکاؤ کی شرح صفر درجہ مئی اور ۴° مئی کے درمیان اعظم ہوتی ہے(۵)۔ پیگلیانی اور دیگر سائنسدانوں نے یہ ثابت کیا کہ ۰۴° م اور ۰۷° م کے درمیان پانی کے بچکاؤ کی شرح اقل ہوتی ہے(۶)۔ پارہ کے بچکاؤ کی شرح کے لئے ڈی مٹز نے ت° م پر جو مساوات حاصل کی تھی وہ حسب ذیل ہے(۷):-

$$۳۷٫۴ \times ۱۰^{-۷} + ۷٫۸۷ \times ۱۰^{-۱۰}$$ ت = بچکاؤ کی شرح

سمگنس، زنگن اور شینیڈر نے مختلف محلولوں کیلئے بچکاؤ کی شرح دریافت کی تھی، انہوں نے یہ ثابت کیا کہ کسی محلول کی بچکاؤ کی شرح، پانی سے کم ہوتی ہے اور جیسے جیسے محلول کا ارتکاز بڑھتا ہے، بچکاؤ کی شرح بھی کم ہوتی جاتی ہے۔ چند مائعات کے بچکاؤ کی شرح ذیل کی جدول میں دی گئی ہیں :-

| مائع | تپش مئی درجوں میں | بچکاؤ کی شرح فی ہوا کے کرہ کا دباؤ |
| --- | --- | --- |
| پانی | ۴ | $۵٫۰۰ \times ۱۰^{-۵}$ |
| سمندر کا پانی | ۱۷٫۵ | $۴٫۳۶ \times ۱۰^{-۵}$ |
| ایتھر | صفر | $۱۱٫۵۶ \times ۱۰^{-۵}$ |
| الکحل | صفر | $۸٫۲۸ \times ۱۰^{-۵}$ |
| تارپین | صفر | $۵٫۸۲ \times ۱۰^{-۵}$ |

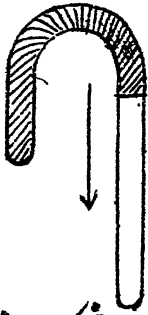
| | | |
|---|---|---|
| کلوروفارم | ۸٫۵ | $۶٫۲۵ \times ۱۰^{-۵}$ |
| زیتون کا تیل | صفر | $۴٫۸۶ \times ۱۰^{-۵}$ |
| گلیسرین | صفر | $۲٫۵۲ \times ۱۰^{-۵}$ |
| پٹرولیم | ۱۹٫۲ | $۷٫۴۵ \times ۱۰^{-۵}$ |
| پارہ | ۴ | $۰٫۳۸ \times ۱۰^{-۵}$ |

**نوٹ**۔ اس جدول سے ایک عجیب بات یہ معلوم ہوتی ہے کہ
۴° پر پارہ کے پچکاؤ کی شرح تقریباً پانی کے پچکاؤ کی شرح کی
$\frac{۱}{۱۳٫۶}$ گنی ہے۔ یعنی اسکا مطلب یہ ہے کہ پارہ کی پچکاؤ کی
شرح پانی کے پچکاؤ کی شرح کی $\frac{۱}{\text{کثافت}}$ گنی ہے۔ دیگر صورتوں
میں یہ صحیح نہیں ہے۔

**مائعات کی تمددی طاقت**:۔ معمولی مشاہدات سے ظاہر ہے کہ مائعات کو علیحدہ حصص میں جدا کرنے کے لئے
ایک بالکل چھوٹی قوت کافی ہوتی ہے اور اس سے بادی النظر میں یہ نتیجہ اخذ
ہو سکتا ہے کہ ایک مائع کے ذرّوں کے درمیان بہت ہی کم قوت اتصال ہونی
چاہئیے۔ مگر ایسا نہیں ہوتا۔ مائع جب حصص میں تقسیم یا جدا کیا جاتا ہے تو اس
کی علیحدگی ہمیشہ سطح پر سے بہنے کی شکل میں وقوع پذیر ہوتی ہے اور کبھی بھی ایسا
نہیں ہوتا کہ اس کے اندرونی حصص کو شکست کرنا پڑے۔ اس کی مثال کاغذ
کے ایک ٹکڑے کی سی ہے جس پر تمددی زور لگایا جاتا ہے۔ اس زور کی
مزاحمت اگرچہ یہ کاغذ ایک حد تک کر سکتا ہے لیکن کاغذ کو کنارے پر سے کتر دیا
جائے تو پھر ایک بالکل چھوٹی قوت آسانی سے اسکو پھاڑ سکتی ہے۔

جن مائعات میں سے ہوا بالکل نکال لی جاتی ہے وہ ٹوٹنے کے بغیر معتدبہ
کھنچاؤ کی قوت کی مزاحمت کر سکتے ہیں۔ اس کی بہترین مثال بارپیما کی نلی کے اوپر

پارہ کے چمٹ جانے سے ملتی ہے۔ ایک بارپیما کی نلی کو، جس میں پارہ بھرا ہوا ہو، احتیاط کے ساتھ جھکا کر انتصاباً اُلٹ دیا جائے تو بعض دفعہ پارہ نلی کے اوپر چمٹ جاتا ہے۔ اگرچہ یہ پارہ کا یہ طول اس طول سے زیادہ ہوتا ہے جس کو طبعی طور پر بارپیما سہار سکتا ہے لیکن پھر بھی نلی میں پارہ رہتا ہے۔ ظاہر ہے کہ اُلٹنے سے، پارہ کے اسطوانہ کے اس زائد طول میں تناؤ ضرور پیدا ہوتا ہے مگر اسطوانہ ٹوٹتا نہیں۔

شکل ۵ میں بتائی ہوئی وضع کی ایک نلی لو اور اسکو پانی اور آبی بخار سے بھر لو۔ پھر پانی کو جوش دے کر اس میں سے احتیاط کے ساتھ کُل ہوا کو نکال لو اور نلی کو بند کر دو۔ جب پانی شکل ۵ میں بتایا ہوا مقام اختیار کرے تو نلی کو تیزی کے ساتھ پیکان کی سمت دھکا دے کر حرکت دو۔

پانی کے اسطوانہ پر گو ایک معتدبہ تناؤ عمل کرتا ہے لیکن اسطوانہ ٹوٹتا نہیں۔ جب کبھی پانی کا اسطوانہ ٹوٹے گا، ہوا کا ایک چھوٹا بلبلہ وہاں ضرور نظر آئے گا اور اسی کی موجودگی اسطوانہ کے ٹوٹنے کی وجہ ہوتی ہے۔

شکل ۵

لہذا اگر یہ مطلوب ہو کہ پانی کا اسطوانہ ٹوٹنے کے بغیر ایک بڑے دھکے کو سہار لے تو حتی الامکان پانی میں سے ہوا کے بلبلوں کو نکال دینا ضروری ہے۔

ان مثالوں سے ہم اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ پانی، پارہ اور دیگر مائعات بڑی حد تک ٹوٹنے کے بغیر تمدیدی زور کو سہار سکتے ہیں۔ اس کا مطلب یہ ہوا کہ مائع کے ذرات آپس میں خوب چمٹے ہوئے رہتے ہیں اور ان کو کھینچ کر علیحدہ کرنے کے لئے ایک معتدبہ قوت درکار ہوتی ہے۔

مائعات میں سے ہوا کو بالکل علیحدہ کرنا ایک ایسا مشکل امر ہے کہ اس کی موجودگی کی وجہ سے اس مطلق زور یا تناؤ کی قیمت صحیح طور پر دریافت نہیں

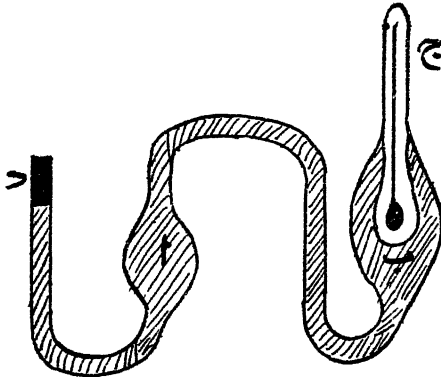
کی جا سکتی جو مائع کے اسطوانہ کو توڑنے کے لئے درکار ہوتا ہے۔ پروفیسر اسبورن رینالڈ نے یہ دریافت کیا ہے کہ پانی ۷۲ء۵ پونڈ فی مربع انچ کے تناؤ کو بغیر ٹوٹے ہوئے سہار سکتا ہے۔

پروفیسر ورڈنگٹن نے یہ معلوم کیا کہ سلفیورک ترشہ ۱۷۳ پونڈ فی مربع انچ اور الکحل ۱۱۶ پونڈ فی مربع انچ کے تناؤ کو سہار سکتا ہے۔⑤ ۱۹۰۹ء میں ایچ ایچ ڈکسن ایسے طریقہ سے ایک تجربہ کی بنیاد ڈالی جس کو بریلیو نے ابتدا میں پانی کے تمدیدی زور کو اس کے لچک اور بگاڑ کی رقموں میں دریافت کرنے کے لئے استعمال کیا تھا۔⑨

ایک مضبوط شعری نلی جس کا ایک سرا بند کر دیا گیا تھا ۸۲° ھ کی تپش کے پانی سے بھری گئی۔ اس کو ۱۸° ھ تک ٹھنڈا کیا گیا، اور ایک چھوٹا سا ہوا کا بلبلا اس کے اندر داخل کیا گیا۔ اب نلی کو بالکل بند کر دیا گیا۔ نلی کو گرم کرنے سے ہوا بتدریج پانی میں حل ہو گئی اور پوری نلی میں پانی بھر گیا۔ نلی کو جب پھر ۱۸° ھ تک ٹھنڈا کیا گیا تو پوری نلی میں صرف پانی ہی بھرا ہوا رہا۔ اس سے ظاہر ہے کہ پانی کے حجم میں بگاڑ پیدا ہوا ہوگا اور اسکو ہوا کے بلبلے کے حجم کی اس نسبت سے جو پانی کے حجم کے ساتھ ہوگی، ناپا جا سکتا ہے پانی کے حجمی معیار لچک کی معلوم قیمت سے، پانی کے تمدیدی زور کی قیمت حساب کے ذریعہ حاصل ہو سکتی ہے۔

فرض کرو کہ بہت دیر تک جوش دئے ہوئے پانی سے، جس میں سے ہوا قریب بالکل نکالی جا چکی ہے ہم شعری نلی کو تقریباً بھر دیتے ہیں اور اس کے بقیہ حصہ میں پانی کا بخار موجود ہے۔ اس نلی کو ایک کسی خاص تپش تک گرم کیا جائے تو پوری نلی میں پانی بھر جاتا ہے اور نلی کو سرد کرنے پر پانی کی سطح کچھ دیر تک ٹوٹتی نہیں، لیکن ایک خاص تپش پر فرض کرو کہ اسطوانہ ایک بلند "کلک" کی آواز سے ٹوٹ جاتا ہے اور بخار کا بلبلا پھر نمودار ہوتا ہے۔ بلبلا کے اس

حجم اور پانی کے حجم کی نسبت سے بگاڑ کی پیمائش ہوتی ہے۔ لہذا پانی کے حجمی معیار لچک کی معلوم قیمت سے برتھیلو نے پانی کے اس تمدیدی زور کی قیمت معلوم کی جس کو بغیر ٹوٹے ہوئے پانی کا اسطوانہ سنبھال سکتا ہے۔

پروفیسر وردنگٹن نے اس طریقہ کو پیش نظر رکھ کر اس میں ترمیم کی شکل ۶ میں ج ایک شعری نلی ہے جسکا ایک سرا ناقص کی شکل کا جوفہ ہے۔ اس میں پارہ اور ا اور ب میں مائع ڈالا جاتا ہے۔ د ہوا کا یا بخار کا ایک بلبلہ ہے۔

یہ ظاہر ہے کہ جب مائع تناؤ کی حالت میں رہتا ہے (جیسا کہ ڈکسن کے تجربہ میں تھا) تو ناقصی جوفہ پھیلتا ہے اور پارہ کا سوت شعری نلی میں نیچے اُتر جاتا ہے۔ اسکے اتار کی مقدار سے پہلے کی طرح بگاڑ کی قیمت دریافت کی جا سکتی ہے اور اس طرح تمدیدی زور دریافت کیا جا سکتا ہے۔ اس طریقہ سے وردنگٹن نے پانی اور الکہل کی حجمی معیار لچک کی قیمتیں بھی دریافت کی ہیں۔[۱۰]

شکل ۶

سطحی تناؤ کے باب میں تمدیدی طاقت کا تفصیلی بیان دیا جائیگا۔

## Chapter VI.

(۱) Proc Roy. Soc. A, 74 P50 (1904)
(۲) Memoires de l'Institut, 21 429 (1847)
(۳) Properties of Matter "McEwen" P162 (1923)
(۴) Properties of Matter "Tait" P190, (1885)
(۵) Properties of Matter "Newman & Searle" P131 (1928)
(۶) ,, ,, ,, P131 (1928)
(۷) Properties of Matter 'Poynting & Thomson" P122, (1922)
(۸) ,, ,, ,, P123, (1922)
(۹) General Physics for Students "Edser" P282 (1926)
(۱۰) Phil, Trans. A, P. 355 (1892)

# ساتواں باب

## مائعات کا سطحی تناؤ

مائعات میں سالماتی اندرونی قوتوں کی موجودگی، ان مظاہر کا باعث ہوتی ہے جن کو سطحی تناؤ سے تعبیر کیا جاتا ہے متعدد مشاہدات سے اس امر کا پتہ چلتا ہے کہ مائع کی سطح ایک ایسی جھلی کی طرح عمل کرتی ہے جو پتلی، پھیلی ہوئی اور لچک دار ہو۔ مائع کی سطح کا عمل حسب ذیل مشاہدات سے واضح ہوگا:—

جب پارہ کا ایک قطرہ کسی شیشہ کی تختی یا دھاتی سطح پر ڈالا جاتا ہے تو بجائے پھیل جانے کے ایک جا جمع ہو جاتا ہے، اس کی گہرائی کئی مم کی ہوسکتی ہے۔ پانی کا قطرہ بھی کسی چکنائی دار تختی پر اسی طرح عمل کرتا ہے اور پھیلنے کے بجائے مجتمع ہو کر ایک جا قائم ہو جاتا ہے۔

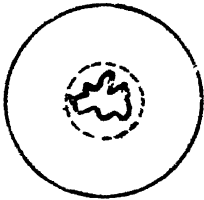
سطح کو جو مائعات بھگوتے ہیں وہ پھیل جاتے ہیں اور جو سطح کو نہیں بھگوتے وہ متذکرہ بالا طریقہ سے ایک جا جمع ہو جاتے ہیں۔ یہ عمل صرف ان کے وزن کی قوتوں پر مبنی نہیں ہوتا بلکہ دیگر قوتوں مثلاً تماسی سطح کی خاصیت وغیرہ پر بھی منحصر ہوتا ہے۔

مائعات کے اوپر ایک پتلی جھلّی دار سطح کا وجود تصور کیا جا سکتا ہے۔ مثلاً مچھر جب پانی پر بیٹھتا ہے تو اس کے نیچے پانی کی سطح دب جاتی ہے۔ چاندی کی خشک سوئی پانی کی سطح پر آہستہ رکھ دی جائے تو وہ تیرنے لگتی ہے۔ رنگ کرنے کا معمولی برش پانی میں ڈبویا جاتا ہے تو اس کے بال ایک دوسرے پر جم جاتے ہیں، یعنی سطحی تناؤ کی وجہ سے بال ایک دوسرے

کے قریب کھنچ جاتے ہیں۔

دائری وضع کے ایک تار کو ڈوری ا ب سے باندھ کر صابون کے محلول میں
ڈبو کر باہر نکالو تو تار پر ایک پتلی جھلی بنتی ہے۔ حصہ ج کو چھونے سے ڈوری
ا ب (جیسا کہ شکل ۱ میں نقطہ دار خط سے دکھایا گیا ہے) سطحی تناؤ کے باعث
کھنچ کر دائری وضع اختیار کر لیتی ہے۔

شکل ۱

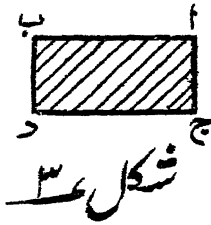
شکل ۲ کے مطابق پتلے دھاگے کا ایک
حلقہ بنا کر صابون میں بھگو لو اور احتیاط
کے ساتھ اس کو تار کے حلقہ پر بنی ہوئی
صابون کی جھلی کے اوپر رکھ دو۔ دھاگے
کے اندر کی جھلی کو سوئی سے توڑ دو تو دھاگا
کھنچ کر ایک دائرے کی شکل اختیار کر لیتا ہے جس کو نقطہ دار خط سے دکھایا گیا ہے۔

اسی طرح دھاگے کے متعدد چھوٹے چھوٹے
ٹکڑوں کو تار کے حلقہ کے مختلف نقطوں پر ڈھیلا
باندھ کر جھلی کو توڑنے سے مختلف شکلیں حاصل ہو سکتی
ہیں۔

شکل ۲

کسی جھلی نظام کی توانائی بالقوہ اقل ہو تو وہ
تعادل کی حالت میں مستحکم طور پر ہوتا ہے۔ کسی
دیئے ہوئے حجم کے لئے صرف کرہ کی سطح کا رقبہ اقل ہوتا ہے اسلئے لازمی طور پر
مائع کا قطرہ کرّوی شکل اختیار کرے گا۔ اس صورت میں سطحی تناؤ کی وجہ توانائی
بھی اقل ہوتی ہے۔

بچے اس طرح کھیلا کرتے ہیں کہ کسی نلی کے ایک سرے پر صابون کے محلول
کی جھلی بنا کر دوسرے سرے سے پھونکتے ہیں تو صابون کا بلبلا کروی بنتا ہے۔
پانی سے بھرے ہوئے کسی برتن میں ایک شعری نلی ڈال دی جائے تو نلی کے

اندر پانی کی سطح بیرونی سطح سے بلند تر رہتی ہے۔ چونکہ نلی کی دیواروں کے قریب مائع کا سطحی تناؤ بہت کم ہوتا ہے اس لئے پانی شعری نلی میں اوپر چڑھ جاتا ہے۔
یہ سب سطحی تناؤ کی مثالیں ہیں۔

**سطحی تناؤ اور سطحی توانائی** :— فرض کرو کہ شکل ۳ کے مطابق ایک مستطیلی شکل کے تار ا ب ج د پر مائع کی ایک جھلی بنائی جاتی ہے۔ ا ب اوپر یا نیچے متحرک ہو سکتا ہے۔ ا ب کو تعادل میں رکھنے کے لئے اس کے علی القوائم ایک قوت لگانی ہوگی۔ اس قوت کو جھلی کے ہر ایک رُخ پر کے تناؤ کو تعادل میں رکھنا ہوگا۔ اس تناؤ کو مائع کا سطحی تناؤ کہتے ہیں یعنے مائع کی جھلی کی وجہ قوت فی اکائی طول مائع کا سطحی تناؤ کہلاتی ہے۔

ب ا
د ج

شکل ۳

پس $\frac{\text{ق}}{\text{۲ ا ب}} = \text{س}$ جہاں س = سطحی تناؤ
اور ق = قوت

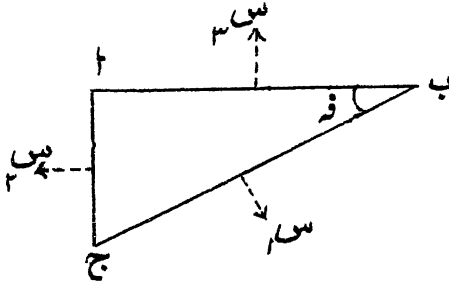
سطحی تناؤ کے ابعاد ا کمیت اور –۲ وقت ہیں۔

فرض کرو کہ ا ب، ج د سے منطبق ہو جاتا ہے، ایسی صورت میں قوت
= س × ۲ ا ب
اور سطحی تناؤ سے کام جو کیا گیا = جھلی کی توانائی بالقوہ جو پہلے تھی
= س × ۲ ا ب × ا ج اور اس صورت میں

$$\text{س} = \frac{\text{جھلی کی توانائی بالقوہ}}{\text{جھلی کا رقبہ (اسکے دو رخ کا لحاظ کر کے)}} = \frac{\text{جھلی کی توانائی بالقوہ}}{\text{۲ ا ب × ا ج}}$$

لہٰذا کسی مائع کے سطحی تناؤ کی تعریف یوں کی جا سکتی ہے :—
"سطحی تناؤ وہ کام ہے جو مائع کی سطح میں ہم تپشی حالات کے تحت، اکائی

رقبہ کا اضافہ کرنے میں کیا جاتا ہے۔"

**مائع کا سطحی تناؤ ہر جگہ ایک ہوتا ہے**[1] : — کسی مائع کی سطح کے تعادل پر غور کرو۔

فرض کرو کہ ا ب ج اس سطح میں ایک قائم الزاویہ مثلث کی شکل کا ٹکڑا ہے (شکل ۴۲) اور ب ج، ج ا اور ا ب کے کناروں پر سطحی تناؤ بالترتیب $س_1$، $س_2$ اور $س_3$ ہے۔

ا، ب، ج، فہ، $س_1$، $س_2$، $س_3$

**شکل ۴۲**

ان تینوں کناروں پر عموداً عمل کرنے والی قوتیں بالترتیب $س_1$(ب ج)، $س_2$(ا ج) اور $س_3$(ا ب) ہوں گی۔

ا ب کے علی القوائم سمت میں تحلیل کرنے سے :—

$س_3$(ا ب) = $س_2$(ا ج) ھم فہ = $س_1$(ب ج) جم فہ

$\therefore$ $س_1 = س_2 = س_3$

لہٰذا ہر جگہ سطحی تناؤ کی قیمت ایک ہی ہوتی ہے۔

کسی شکل کا ایک مثلثی یا مستطیلی ٹکڑا سطح پر لیکر اوپر کے نتیجہ کو ثابت کیا جا سکتا ہے۔

**قطرے کے اہتزازات** : — جب نلی کے سرے پر قطرہ بنتا ہے اس پر سے گرنے کے قبل کروی شکل کا نہیں ہوتا۔ اسکا انتصابی قطر افقی قطر کی بہ نسبت، نلی سے باہر نکلنے میں، بڑا ہو جاتا ہے۔ اس لمحہ میں جبکہ وہ نلی کے سرے سے علیحدہ ہوتا ہے اس کی شکل لیمو جیسی ہوتی ہے۔ خلا میں آزادانہ گرنے کے دوران میں اس پر جاذبہ زمین کا اثر چونکہ نظر انداز کئے جانے کے قابل ہوتا ہے لہذا اس وقت صرف سطحی تناؤ کا لحاظ کیا جاتا ہے۔ اس کی وجہ سے قطرہ

کی شکل ایک کامل کرہ کی سی ہو جاتی ہے (بارش کا قطرہ بھی ہوا میں سے جس کی لزوجت بہت چھوٹی ہوتی ہے گرتے ہوئے یہی شکل اختیار کر لیتا ہے)۔ لہٰذا لیموں کی طرح بننے کے بعد قطرہ کی شکل قلیل وقفہ کے لئے کروی ہو جاتی ہے۔ چونکہ قطرہ کے ذرات میں سطحی قوتوں کے عمل سے توانائی اور معیار حرکت پیدا ہو جاتا ہے اس لئے ذرات ایک دوسرے کے اضافی نقطۂ نظر سے ساکن نہیں ہو سکتے۔ اسی وجہ سے زیادہ دیر تک قطرہ کی شکل کروی نہیں رہ سکتی اور وہ چپٹا ہو کر تربوز کی شکل اختیار کر لیتا ہے۔ پھر یہی کیفیت دہرائی جاتی ہے اور قطرہ مختلف شکلیں بدلتا ہے اور تھوڑی دیر کے لئے پھر کروی شکل اختیار کر لیتا ہے۔ آخر کار ان تبدیلیوں میں بتدریج کمی واقع ہوتی ہے اور اندرونی رگڑ وغیرہ کی وجہ سے، یہ بالکل غائب ہو جاتی ہیں۔

**شکل ۵**

شکل ۵ میں پانی کی ایک دھار بتائی گئی ہے جو ایک گول سوراخ میں سے بہ کر نکلی ہے۔ ابتدا میں یہ ایک مائع کے لمبے اسطوانہ کی شکل اختیار کر لیتی ہے لیکن بعد میں تعادل میں نہ ہونے کی وجہ سے اس کی گردنیں بننے لگتی ہیں اور وہ پھولنے لگتا ہے حتیٰ کہ جس طرح شکل میں دکھایا گیا ہے وہ متفرق قطروں میں منقسم ہو جاتا ہے۔ اسی شکل میں چھوٹے چھوٹے وہ قطرے بھی دکھائے گئے ہیں جو بڑے قطروں کے ٹوٹنے سے بنتے ہیں۔ اس پوری کیفیت کی عکسی تصویر لی گئی ہے

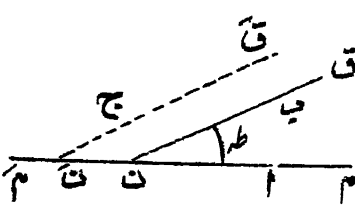
لارڈ کلون نے، پانی کے ایک قطرے کے اہتزاز کا وقت دوران حسابی طریقہ سے دریافت کیا ہے[۲]۔ (یعنی اس وقفہ کو دریافت کیا ہے جس میں قطرہ مختلف تبدیلیوں کے بعد پھر کروی شکل اختیار کر لیتا ہے) اور اس کی قیمت $\frac{1}{\text{ہ}}$ ص$^{\frac{3}{2}}$ دریافت کی گئی ہے جہاں ص = قطرہ کا نصف قطر

## کسی مائع کا ٹھوس یا کسی دوسرے مائع کی سطح پر پھیلنا (زاویہ تماس)

جب کبھی کسی مائع کا قطرہ ایک ٹھوس کی چکنی اور افقی سطح (مثلاً شیشہ کی تختی) پر رکھا جاتا ہے تو جو شکل وہ اختیار کرتا ہے اس کی نوعیت مختلف چیزوں پر منحصر ہوتی ہے۔ جتنا زیادہ وہ پھیلے گا اتنا ہی اس کا مرکز جاذبہ پست ہونے لگے گا، اور اُسی قدر اس کی تجاذبی توانائی کم ہونے لگے گی۔ لیکن قطرہ کے پھیلنے سے اس کا سطحی رقبہ بڑھنے لگتا ہے اور اسکے لئے کام کرنے کی ضرورت ہوتی ہے۔
تعادل کے لئے، تجاذبی توانائی کی ایسی کمی کا جو ایک چھوٹے سے رقبہ کے بڑھنے کی وجہ سے واقع ہوتی ہے، اُس کام کے مساوی ہونا ضروری ہے جو سطح کے بڑھنے کے لئے درکار ہوتا ہے۔

اگر قطرہ چھوٹا ہو تو وہ کروی شکل اختیار کر لیتا ہے اور اگر وہ بڑا ہو تو ایک ایسی شکل اختیار کر لیتا ہے جو صابون کی ٹکیا کی طرح ہوتی ہے۔ دیکھو شکل ۶

شکل ۶

اس صورت میں ہمیں تین مختلف واسطوں پر غور کرنا ہوگا یعنی دوسرے الفاظ میں تین مختلف سطحی تناؤ کا لحاظ کرنا ہوگا۔ اول شیشہ اور ہوا کی تماسی سطح پر جس کو ہم س۱ سے تعبیر کریں گے غور کرنا ہوگا۔ دوم مائع اور ہوا کی تماسی سطح پر جس کی تعبیر س۲ سے کی جائے گی اور سوم مائع اور شیشہ کی تماسی سطح پر جس کو س۱۲ سے تعبیر کیا جائیگا۔
مائع کے تعادل کی حالت پر غور کرو جس پر سوائے سطحی تناؤ کے اور کوئی قوت عمل نہیں کرتی ہو۔ فرض کرو شکل ۷ میں ا ٹھوس کی، ب مائع کی اور ج ہوا کی تعبیر کرتا ہے اور نیز یہ بھی فرض کرو کہ مائع اور ہوا کے درمیان سطح فاصل ق ن ہے اور م مَ ٹھوس کی سطح ہے۔

ق
قَ
ج
ب
ط
مَ نَ ن ا م

شکل ۷

فرض کرو کہ زاویہ ق ن م = طہ

زاویہ (۱۸۰ - طہ) ٹھوس کے ساتھ مائع کا "زاویہ تماس" کہلاتا ہے۔

فرض کرو کہ مائع اور ہوا کی سطح فاصل ق ن، سے مقام قَ نَ میں آجاتی ہے جو ق ن کے متوازی ہے۔ اس ہٹاؤ سے، ٹھوس کی ایک دھجی پر جس کا عرض ن نَ ہے مائع پھیل جاتا ہے۔

فرض کرو کہ اس دھجی کا رقبہ سا ہے۔ ہٹاؤ کی وجہ سے توانائی میں تبدیلی اگر ہم ہر صورت پر علیحدہ غور کریں

تو (۱) ا اور ب کی درمیانی سطح میں رقبہ سا کے بڑھنے کی وجہ سے ہوگی اور

(۲) ب اور ج کی درمیانی سطح میں رقبہ سا جم طہ کے بڑھنے سے ہوگی اور

(۳) ا اور ج کی درمیانی سطح میں رقبہ سا کی کمی کی وجہ سے ہوگی۔

پہلی صورت پر غور کرنے سے ظاہر ہے کہ توانائی میں اضافہ = سا × $س_{۲۱}$

اور دوسری صورت پر غور کرنے سے، توانائی میں اضافہ = $س_{۲}$ سا جم طہ

اور تیسری صورت میں توانائی میں کمی = $س_{۱}$ × سا

تعادل یا توازن کے لئے توانائی میں مجموعی اضافہ ہمیشہ توانائی میں مجموعی کمی کے مساوی ہونا چاہیئے۔

یعنی $س_{۱}$ سا = $س_{۲۱}$ سا + $س_{۲}$ سا جم طہ

$$\text{یعنی جم طہ} = \frac{س_{۱} - س_{۲۱}}{س_{۲}}$$

ایسے پارہ میں جو شیشہ سے تماس کرتے ہوئے رکھا گیا ہو طہ کی قیمت = ۱۴۰°

ظاہر ہے کہ $س_{۱} - س_{۲۱}$ کی قیمت مثبت، اور $س_{۲}$ سے کم ہوگی۔ اس کی وجہ یہ ہے کہ $\frac{س_{۱} - س_{۲۱}}{س_{۲}}$ کی قیمت + ۱ سے زیادہ اور - ۱ سے کم کسی حالت میں نہیں ہوسکتی۔ اگر ایسا ہو تو طہ کی قیمت مساوات پر صادق نہیں آتی اور اسی لئے کسی ٹھوس کی سطح پر قطرہ بننے کے بغیر مائع پوری طور سے پھیل

جاتا ہے۔

جب کسی مائع کا ایک قطرہ دوسرے مائع کی سطح پر رکھا جاتا ہے تو اسی طرح کے حالات واقع ہوتے ہیں۔ ایسی صورت میں $س_{۱۲}$ سے، دونوں مائعوں کے درمیانی سطح کے سطحی تناؤ کی تعبیر ہوتی ہے۔

اوپر بیان ہو چکا ہے کہ $\frac{(س_{۱} - س_{۱۲})}{س_{۲}} < +۱$

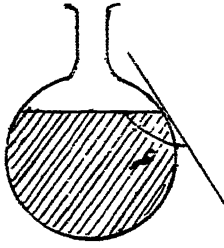
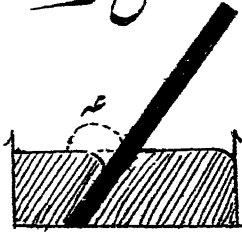
یعنی $س_{۱} < (س_{۱۲} + س_{۲})$ اور $\frac{(س_{۱} - س_{۱۲})}{س_{۲}} > -۱$

یعنی $س_{۱} + س_{۲} > س_{۱۲}$

لہذا $س_{۱}$، $س_{۲}$ اور $س_{۱۲}$ میں کے کسی دو مقداروں کا مجموعہ، تیسرے سے بڑا ہونا ضروری ہے۔ اس لئے ایک ایسے مثلث کا کھینچنا ممکن ہے جس کے ضلعوں کے طول $س_{۱}$، $س_{۲}$ اور $س_{۱۲}$ کے مساوی ہوں۔ یہ مثلث نیومن کی مثلث کہلاتی ہے(۳)۔

اگر کوئی دو مقداروں کا مجموعہ تیسرے سے کم ہو تو مثلث کا کھینچنا ناممکن ہوگا لہذا مائع کسی دوسری سطح پر قطرہ بننے کے بغیر پھیلنے لگتا ہے۔

زاویہ تماس دریافت کرنے کا طریقہ:- کروی شکل کی ایک صراحی میں پارہ کو ڈالکر، شیشہ سے پارہ کا زاویہ تماس دریافت کیا جا سکتا ہے۔ اگر گہرائی کم ہو تو پارہ کی سطح محدب ہوتی ہے۔ اگر اور زیادہ پارہ بتدریج صراحی میں ڈالا جائے تو ایک خاص موقعہ پر اس کی سطح بالکل چپٹی ہو جاتی ہے اور پھر مقعر ہونے لگتی ہے۔ پارہ کی سطح سے (جبکہ وہ بالکل چپٹی ہوتی ہے) شیشہ کے ساتھ جو زاویہ منفرجہ بنتا ہے وہ زاویہ تماس عہ کہلاتا ہے۔ شکل ۵۰ میں یہ زاویہ دکھایا گیا ہے۔ یہ گے لوزک کا طریقہ کہلاتا ہے۔

ایک اور سادہ ترین طریقہ یہ ہے کہ شیشہ کی ایک تختی لیکر اس کا کچھ حصہ

ایک پارے سے بھرے ہوئے برتن میں ڈبو دو اور شیشہ کو اتنا زاویہ بناتے ہوئے جھکاؤ کہ اس کے نیچے کی پارہ کی سطح بالکل مستوی ہو جائے۔
(دیکھو شکل ۹) شیشہ کی تختی پارہ کی افقی سطح سے جو زاویہ منفرجہ بناتی ہے وہ زاویہ تماس عہ ہوگا۔

شکل ۸

شکل ۹

## پانی کی سطح پر چکنائی کے پرت:-

کافور کے چھوٹے چھوٹے ذرے لیکر پانی کی صاف سطح پر ڈالو تو عجیب طریقے سے وہ اِدھر اُدھر ناچنے لگتے ہیں۔ مایرنگونی نے اس کی توضیح یوں کی کہ یہ عمل پانی میں کافور کے حل ہونے کی وجہ سے ہوتا ہے۔ کافور اور پانی کے محلول کا سطحی تناؤ خالص پانی کے سطحی تناؤ سے کم ہوتا ہے۔ کافور کے ہر ذرہ کے گرد پانی کی ہر ایک چھوٹی سطح کا سطحی تناؤ اطراف کے سطحی تناؤ سے کم ہوتا ہے اس لئے سطح کا یہ ٹکڑا اردگرد کی سطح سے باہر کھینچ کر نکالا جاتا ہے اور اسی وجہ سے کافور کے ذرے متحرک ہوتے ہیں۔ اگر پانی پر چکنائی یا تیل کی ایک پتلی سی جھلّی موجود ہو تو کافور کے ذرّوں کی حرکت غائب ہو جاتی ہے۔ اس کی وجہ یہ ہے کہ تیل کی ایک پتلی سی جھلّی پانی کے سطحی تناؤ کو اتنا کم کر دیتی ہے کہ کافور کے محلول سے سطحی تناؤ میں مزید کوئی کمی نہیں ہو سکتی۔

لارڈ ریلے نے تیل کی جھلی کی اُس موٹائی کو ناپا ہے جو پانی پر کافور کے ذرّوں کی حرکت کو روک دینے کے لئے کافی ہوتی ہے۔ اس کی قیمت $2 \times 10^{-7}$ سمر ہوتی ہے لیکن $10^{-7}$ کی یا اس سے کم موٹائی کی جھلّی کا،

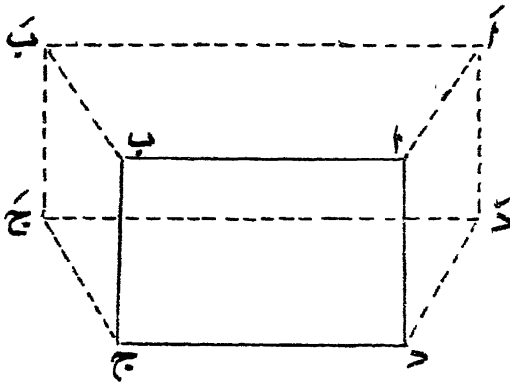
پانی کے سطحی تناؤ پر کوئی اثر نہیں ہوتا۔ اسکا مطلب یہ ہے کہ اس موٹائی کی
حد تک پانی کے سطحی تناؤ میں کمی نہیں ہوتی، لیکن اس کے بعد سطحی تناؤ
میں تیزی کے ساتھ کمی واقع ہونے لگتی ہے حتیٰ کہ موٹائی $۲ \times ۱۰^{-۷}$ سم
تک پہنچ جاتی ہے جھلی کی موٹائی کی اس قیمت کے بعد سطحی تناؤ کی قیمت
میں کمی بتدریج واقع ہوتی ہے۔ لارڈ ریلے نے بعض وجوہات کی بنا پر یہ
رائے قائم کی کہ تیل کے ایک سالمہ کا قطر $۱۰^{-۷}$ سم ہے لیکن اس سے نصف
موٹائی کے تیل کی جھلیوں کی تصدیق ہو چکی ہے جس سے یہ ثابت ہوتا ہے
کہ تیل کے ایک سالمہ کا قطر $۱۰^{-۷}$ سم سے کم ہونا چاہیئے۔

سمندر میں طوفان برپا ہو تو پانی کی سطح پر تیل یا چکنائی چھوڑ کر موجوں کو
بڑی حد تک سکون میں لایا جا سکتا ہے۔ تیل والی سطح کے ایک حصہ پر
جب ہوا چلتی ہے تو یہ تیل کو آگے ڈھکیلتی ہے اور پانی کی تقریباً خالص
سطح کو پیچھے چھوڑ دیتی ہے چونکہ اسکا سطحی تناؤ تیل والی سطح کی بہ نسبت زیادہ
ہوتا ہے اس لئے اس سطح پر جس کو ہوا حرکت دیتی ہے، پیچھے کی طرف کھنچاؤ
واقع ہوتا ہے اور آگے کی جانب موجوں کی حرکت رک جاتی ہے۔ کچھ موجیں
اگر بنتی بھی ہیں، تو چکنائی دار سطح پر گزرتے ہوئے یہ روک دی جاتی ہیں
اس کا سبب یہ ہے کہ موجی حرکت پانی کی سطح کی پرت میں کھنچاؤ پیدا کرنی
چاہتی ہے اور ایک حصہ میں دیگر حصص کی بہ نسبت جہاں کہ چکنائی ہوتی
ہے کسی لمحہ میں کھنچاؤ زیادہ ہوتا ہے۔ اس سے کم کھنچے ہوئے حصوں پر،
زیادہ کھنچے ہوئے حصے کھنچاؤ کی قوت لگاتے ہیں۔ لہذا موجوں کی توانائی پانی
کی سطح میں حرکت پیدا کرنے میں صرف ہو جاتی ہے۔

**گیس اور مائع کی سطحوں کا تماس :-** کسی مائع کے سطحی تناؤ کا انحصار اس گیس پر ہوتا ہے جو مائع
کی سطح کے ساتھ تماس کرتی ہے۔ لیمبے اور شیلڈ کی رائے میں پانی کا

سطحی تناؤ جبکہ آبی بخار اس کی سطح سے مس کر رہا ہو صفر درجہ مئی تپش پر ۷۳ر۳
ڈائین فی سمر کے مساوی ہوتا ہے۔

اگر پانی کی سطح کا تماس ہوا کے ساتھ ہو تو صفر درجہ مئی پر سطحی تناؤ کی قیمت ۸ر۵۷ ڈائین فی سمر ہوتی ہے۔ اسٹاکل نے یہ دریافت کیا کہ پارہ کے سطحی تناؤ کی قیمت پارہ کے بخار کے ساتھ جب تماس ہو رہا ہو تو کم ہوتی ہے بہ نسبت اس قیمت کے جبکہ ہوا کے ساتھ تماس ہو رہا ہو (بشرطیکہ دونوں حالتوں میں تپش ایک ہی ہو۔) پارہ کے سطحی تناؤ کی قیمت کا انحصار جبکہ ہوا کے ساتھ اس کی سطح کا تماس ہو رہا ہو وقت کے اس عرصہ پر بھی ہوتا ہے جس میں کہ پارہ، ہوا میں رکھا رہتا ہے۔

## سطحی تناؤ، مائع کی سطح کا انحنا اور دباؤ " لاپلاس کی مساوات":۔

ا ب ج د مستطیل شکل کا ایک بہت ہی چھوٹا عنصر مائع کی سطح پر لیا جاتا ہے (شکل عنا)

شکل عنا

جہاں ا ب = عہ
اور ب ج = بہ
(فرض کرو)

نیز یہ فرض کرو کہ مائع کی سطح کے دونوں رخوں کے درمیان فرق دباؤ = د

فرض کرو کہ اب عنصر مذکور بیرونی جانب سطح کے علی التقوائم ایک

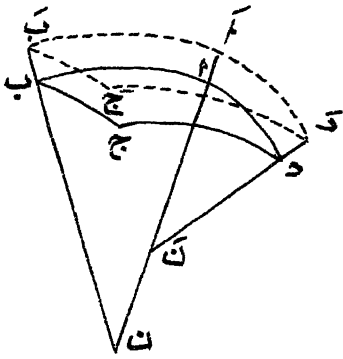
چھوٹا سا فاصلہ فرمائے طے کرتا ہے اس کے نئے مقام کو اَ بَ جَ دَ سے تعبیر کرو۔ جہاں اَ بَ = عَہ اور بَ جَ = بَہ۔

دباؤ نے جو کام کیا = د × عہ × بہ × فرما

سطحی تناؤ نے جو کام کیا = س (عَہ بَہ – عہ بہ)

تعادل کے لئے یہ ضروری ہے کہ د عہ بہ فرما = س (عَہ بَہ – عہ بہ) ....(۱)

چونکہ عنصر ا ب ج د منحنی سطح کا ایک حصہ ہے۔

لہٰذا اَ بَ جَ دَ کی سطح بھی منحنی ہوگی جیسا کہ شکل ۱۱ میں دکھایا گیا ہے۔

ا اور ب پر کے سطح کے عمود ن پر اور ا اور د پر کے سطح کے عمود نَ پر متقاطع ہوتے ہیں، نقاط ن اور نَ سطح کے مقابل جانب بھی ہو سکتے ہیں جیسا کہ شکل ۱۲ میں دکھایا ہے۔

شکل ۱۱ پر غور کرو:—

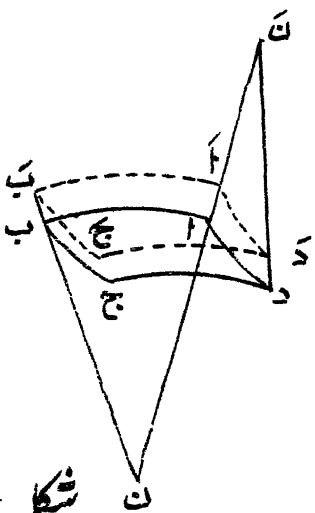
چونکہ مثلث ا ب ن اور اَ بَ ن

متشابہ ہیں لہٰذا

$$\frac{ب\,ا}{ب\,ن} = \frac{بَ\,اَ}{بَ\,ن}$$

یعنی $عَہ = عہ \cdot \frac{(ص_۱ + فرما)}{ص_۱}$ .....(۲)

جہاں $ص_۱$ = ب ن = ا ب کا نصف قطر انحنا۔

شکل ۱۱

شکل ۱۲

اسی طرح مثلث ا د نَ اور اَ دَ نَ چونکہ ایک دوسرے کے متشابہ ہیں

$$\therefore \text{بہَ} = \frac{\text{بہ}(\text{ص}_{۲} + \text{فرما})}{\text{ص}_{۲}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (۳)$$

جہاں $\text{ص}_{۲} = \text{ا نَ} = \text{ا د}$ کا نصف قطر انحنا۔

چونکہ عنصر زیر غور بہت چھوٹا ہے لہذا شکل ۱۱ میں ا ب ج د اور اَ بَ جَ دَ کو ہم مستطیل شکلیں تصور کر سکتے ہیں۔

∴ مساوات (۲) اور (۳) سے:-

$$\text{عہَ بہَ} = \frac{\text{عہ بہ}}{\text{ص}_{۱}\text{ص}_{۲}} \left\{ (\text{ص}_{۱} + \text{فرما})(\text{ص}_{۲} + \text{فرما}) \right\}$$

$\text{ص}_{۱}$ اور $\text{ص}_{۲}$ کے مقابلہ میں اگر فرما بہت چھوٹا ہو تو $\frac{(\text{فرما})^{۲}}{\text{ص}_{۱}\text{ص}_{۲}}$ کو ہم نظر انداز کر سکتے ہیں۔

$$\therefore \text{عہَ بہَ} = \frac{\text{عہ بہ}}{\text{ص}_{۱}\text{ص}_{۲}} \left\{ \text{ص}_{۱}\text{ص}_{۲} + \text{ص}_{۱}\,\text{فرما} + \text{ص}_{۲}\,\text{فرما} \right\}$$

$$= \text{عہ بہ} \left\{ ۱ + \frac{\text{فرما}}{\text{ص}_{۲}} + \frac{\text{فرما}}{\text{ص}_{۱}} \right\} \quad \ldots\ldots \quad (۴)$$

اوپر کی مساواتوں (۱) اور (۴) سے:-

$$\text{د عہ بہ فرما} = \text{س} \left[ \text{عہ بہ فرما} \left( \frac{۱}{\text{ص}_{۲}} + \frac{۱}{\text{ص}_{۱}} \right) \right]$$

$$\therefore \text{د} = \text{س} \left( \frac{۱}{\text{ص}_{۱}} + \frac{۱}{\text{ص}_{۲}} \right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (۵)$$

اسی طرح شکل ۱۲ پر غور کرنے سے ہمیں $\text{عہَ} = \text{عہ}\left(\frac{\text{ص}_{۱} + \text{فرما}}{\text{ص}_{۱}}\right)$

اور $\text{بہَ} = \text{بہ}\left(\frac{\text{ص}_{۲} - \text{فرما}}{\text{ص}_{۲}}\right)$ حاصل ہوتے ہیں

$$\text{چنانچہ عہَ بہَ} = \text{عہ بہ} \left\{ ۱ - \frac{\text{فرما}}{\text{ص}_{۲}} + \frac{\text{فرما}}{\text{ص}_{۱}} \right\}$$

اب مساوات (۱) میں درج کرنے سے :-

$$د = س \left[ \frac{1}{ص_1} - \frac{1}{ص_2} \right] \quad \text{......... (۶)}$$

اگر نصف قطر انحنا مثبت اُس صورت میں فرض کیا جائے جبکہ انحنا کا متناظر مرکز، مائع کی سطح کے اس جانب ہو جہاں دباؤ زیادہ ہے، اور منفی اس صورت میں جبکہ انحنا کا مرکز سطح کے اس جانب ہو جہاں دباؤ کم ہے، تو دونوں صورتوں میں عام مساوات حسب ذیل ہوگی۔

$$د = س \left( \frac{1}{ص_1} + \frac{1}{ص_2} \right) \quad \text{......... (۷)}$$

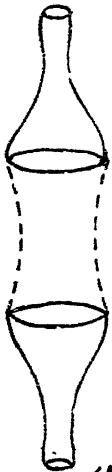
یہ مساوات عملی مسائل کے حل کرنے میں نہایت اہم ہے۔

اگر سطح کروی ہو تو $ص_1 = ص_2$

یعنی اس صورت میں $د = \frac{۲ س}{ص_1}$

اگر سطح استوانہ نما ہو تو $ص_2 = \infty$

یعنی اس صورت میں $د = \frac{س}{ص_1}$

اگر د = صفر یعنی جھلی کے دونوں رخوں کے درمیان دباؤ میں کوئی فرق نہ ہو تو $ص_1 = - ص_2$ اس کی عملی طور پر تصدیق کرنے کے لئے دو مساوی ناپ کی قیفیں لو اور ان کے چوڑے کناروں کے درمیان صابون کی ایک جھلی اس طرح بناؤ کہ دونوں قیفوں کے کنارے ایک دوسرے کے متوازی اور ان کے مستوی ان کے مرکزوں کو ملانے والے خط کے علی القوائم رہیں (جس طرح کہ شکل ۱۳ میں دکھایا گیا ہے)

چونکہ قیفوں کے سرے کرہ ہوائی کے دباؤ کے لئے کھلے ہوئے ہیں لہذا قیفوں کے اندرونی اور بیرونی دباؤ یکساں ہوں گے۔

شکل ۱۳

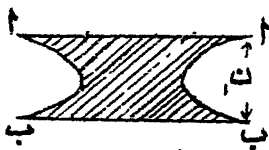
∴ ص۱ = − ص۲ شکل میں نقطہ دار خطوط سے واضح طور پر بتایا گیا ہے۔
اب ایک قیف کی نلی کو بند کردو اور دوسری قیف کی نلی سے دباؤ کو اس طرح ترتیب دو کہ جھلی اسطوانہ نما ہو جائے۔ دونوں قیفوں کو علیحدہ کردو لیکن اس امر کا خیال رکھو کہ جھلی کی شکل ہر حالت میں اسطوانہ نما رہے۔ اس طرح اس اسطوانہ کا اعظم طول دریافت کرو جو بغیر ٹوٹے قائم رہ سکتا ہے، اس سے یہ ثابت ہوگا کہ اسطوانہ کا یہ اعظم طول، قیف کے کنارے کے دور یا اس اسطوانہ کے محیط سے کسی حالت میں بھی بڑھ نہیں سکتا، اگر ذرا سا بھی زیادہ کردیا جائے تو اسطوانہ نما جھلی فوراً پھٹ جائے گی۔

پروفیسر بائز اور پروفیسر رکر نے نہایت ہی عمدگی سے اس تجربہ کو دکھایا تھا۔

اسی طرح یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ مختلف شکلوں کی جھلیاں چند خاص خاص شرائط کے تحت قائم رہ سکتی ہیں۔

## سطحی تناؤ کے باعث دو متوازی تختیوں کے درمیان قوت (۵):-

شکل ۱۴۱ میں ا اور ب دو متوازی تختیاں ہیں، ان کے درمیان ایسا مائع موجود ہے جس سے تختیاں بھیگ جاتی ہیں، اگر تختیوں کے درمیان فاصلہ ن۱ اور مائع سے بھیگے ہوئے حصہ کے رقبہ کا قطر ن۲ ہو تو مائع کی آزاد سطح پر نصف قطر انحنا + ن۱/۲ اور − ن۲/۲ ہونگے لہذا مساوات (۷) سے کرہ ہوائی کے دباؤ اور جھلی کے اندر کے دباؤ میں فرق ذیل کی مساوات کے مطابق ہوگا:-

ا ا
ن۱
ب ب

شکل ۱۴۱

$$د = ۲ س \left( \frac{۱}{ن_۱} - \frac{۱}{ن_۲} \right)$$

اگر ن ۱ کی قیمت ن ۲ کے مقابلہ میں بہت چھوٹی ہو

تو $د = \frac{۲ س}{ن_۱}$

اگر جھلی سے بھیگے ہوئے حصہ کا رقبہ ر ہو تو قوت جو ا کو ب کی طرف دبائے گی حسب ذیل ہو گی۔

قوت = ذ ر = $\frac{۲ س ر}{ن_۱}$ .................... (۸)

اس سے ظاہر ہے کہ قوت، تختیوں کے درمیانی فاصلہ سے معکوس اور تختیوں کے رقبہ سے راست تناسب رکھتی ہے۔ لہذا شیشہ کی دو متوازی تختیوں کے درمیان، پانی کا قطرہ رکھا جائے تو چونکہ ن ۱ کی قیمت گھٹ جاتی ہے اور ر کی قیمت بڑھ جاتی ہے اس لئے تختیاں زیادہ قوت سے ایکدوسرے کی طرف کھنچ آئیں گی۔

مثال:۔ پانی کے ایک قطرہ کو جس کا وزن ۱ء۰ گرام ہے دو متوازی مستوی شیشہ کی تختیوں کے درمیان داخل کیا جاتا ہے۔ اگر دونوں تختیوں کے درمیان فاصلہ ۱۰۰۰ء۰ سمر ہو تو کتنی قوت عمل کرے گی؟

چونکہ پانی کا قطرہ تختیوں کے درمیان ایک خاص رقبہ والے مدور قرص کی شکل میں پھیل جاتا ہے اس لئے فرض کرو کہ پانی سے تختیوں کا جو حصہ بھیگتا ہے اس مدور قرص کا رقبہ ر ہے۔ فرض کرو کہ اُس قرص کا نصف قطر ص ہے۔

$\therefore$ ر = $\pi$ ص$^۲$

یعنی قوت = $\frac{۲ س \pi ص^۲}{ن_۱}$

چونکہ پانی کی کثافت ۱ ہے لہذا قطرہ کا حجم = ۱ء۰ مکعب سمر

جبکہ دونوں تختیوں کے درمیان فاصلہ = ن ۱ تو قطرہ کا حجم =

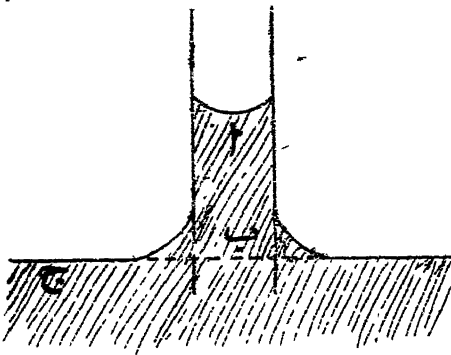
= ن ۱ $\pi$ ص$^۲$ = ۱ء۰ مکعب سمر

یعنی $\pi$ ص$^۲$ = $\frac{۱ء۰}{ن_۱}$ = $\frac{۱ء۰}{۱۰۰۰ء۰}$ مربع سمر

∴ قوت = $\frac{۷۵ \times ۲}{۱۰۰٫۰} \times \frac{۱٫۰}{۱۰۰۰٫۰}$

= ۱٫۵ × ۱۰^۹ ڈائین

**متوازی تختیوں کے درمیان جذب یا دفع کا عمل**[۵]:۔

چھوٹے اجسام مثلاً کاک کے ٹکڑے یا لکڑی کے چھوٹے ٹکڑے جب کسی مائع کی سطح پر تیرتے ہیں تو ایک دوسرے کو جذب کرتے ہوئے ایک جگہ جمع ہو جاتے ہیں۔ یہ اس وقت ہوتا ہے جبکہ تمام اجسام یا تو مائع سے بھیگے ہوئے ہوتے ہیں یا بالکل خشک ہوتے ہیں۔ اگر ان میں سے ایک خشک اور دوسرا بھیگا ہوا ہو تو ایک دوسرے کو دفع کرتا ہے۔ اس کی توجیہہ یہاں کی جائے گی۔

شکل ۱۵ پر غور کرو۔ یہاں دو متوازی شیشہ کی تختیاں ایک ایسے مائع میں رکھی ہوئی دکھائی گئی ہیں جو ان کی سطح کو بھگوتا ہے۔ ان دونوں تختیوں کے درمیان مائع اپنی سطح سے اونچا رہتا ہے۔

شکل ۱۵

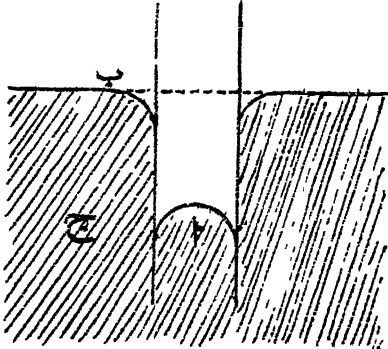
ج پر دباؤ = ب پر کے دباؤ کے (ہمسطح ہونے کی وجہ سے)
= کرہ ہوائی کا دباؤ

اور ب پر دباؤ = ا پر دباؤ ہلالی سطح کے ٹھیک نیچے + ا ب گہرائی کی وجہ دباؤ اس سے ظاہر ہے کہ ا پر کا دباؤ کرہ ہوائی کے دباؤ سے کم ہے۔ لہذا کرہ ہوائی کا دباؤ دونوں تختیوں کو ایک دوسرے کے قریب لانے کا تقاضا کرے گا۔ اس کے علاوہ تختیوں کے درمیان جو مائع موجود

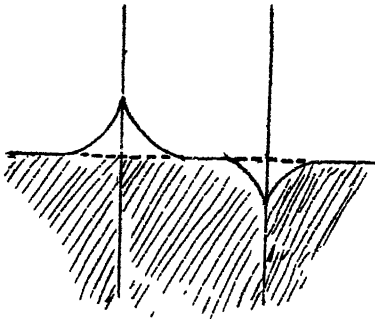
ہے ایک منفی دباؤ ڈالے گا یعنی ایک تناؤ کی قوت ڈالے گا جس کے تحت تختیاں ایک دوسرے کو جذب کریں گی۔

اگر مائع تختیوں کو نہیں بھگوتا تو مائع کے اسطوانہ کا سرا اپنی سطح سے نیچے رہتا ہے۔ دیکھو شکل ۱۶ نتیجہ پھر بھی وہی رہتا ہے۔

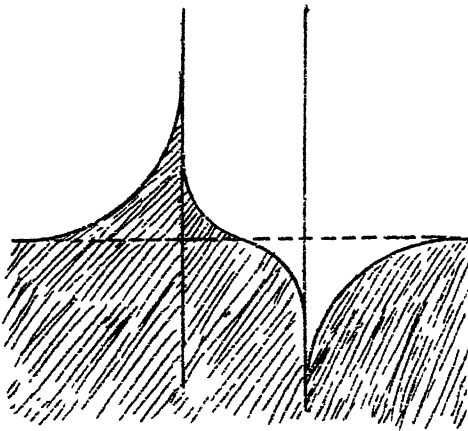
مائع کی ہلالی سطح ا کے اوپر، کرہ ہوائی کا دباؤ ہوگا، اور ج پر مائع کا دباؤ (جو ا کے ہم سطح نقطہ ہے)

= کرہ ہوائی کا دباؤ + ب ج گہرائی کی وجہ دباؤ۔

یعنی ج پر دباؤ ا پر کے دباؤ سے زیادہ ہے۔ لہذا مائع کا دباؤ جو تختیوں کو ایک دوسرے کے قریب ڈھکیلنے کی کوشش کرتا ہے، کرہ ہوائی کے دباؤ سے زیادہ ہوتا ہے اور اسلئے تختیوں کو ایکدوسرے سے علیحدہ کرنے کی کوشش کرتا ہے۔ اس وجہ سے تختیاں ایک دوسرے کو جذب کریں گی۔

شکل ۱۶

فرض کرو کہ دونوں تختیوں میں سے ہر ایک مختلف مادہ کی بنی ہوئی ہو اور اس میں سے ایک کو مائع بھگو سکتا ہے اور دوسری کو نہیں بھگو سکتا اور یہ بالکل خشک رہتی ہے اور تیز یہ بھی فرض کرو کہ دونوں تختیوں کے درمیان فاصلہ بہت زیادہ ہے۔ مائع کی سطح کی تراش شکل ۱۷ کے مطابق ہوگی۔ ایک تختی کے لئے سطح کے انحنا کی علامت

شکل ۱۷

ایک ہوگی اور دوسری تختی کے لئے اس کے متضاد ہوگی۔ تختیوں کے درمیان مائع کی افقی سطح، بیرونی سطح کے برابر رہتی ہے۔ لہذا تختیوں کے درمیان نہ تو جذب کا عمل ہوتا ہے اور نہ تو دفع کا۔

فرض کرو کہ تختیاں ایک دوسرے کے قریب لائی جاتی ہیں۔ ان کے درمیان افقی سطح اب بدل جائے گی اور شکل ۱۸ کے مطابق ہوگی۔ اس صورت میں تختیاں ایک دوسرے سے علیحدہ ہونے لگیں گی۔ اس کی وجہ یہ ہے کہ بھگوئی ہوئی تختی میں اندر کی جانب مائع جس بلندی تک پہنچے گا وہ بیرونی جانب کی بلندی سے کم ہوگا اور خشک تختی سے اندرونی جانب مائع کی سطح جتنی نیچے اترے گی وہ بیرونی سطح سے کم ہوگی۔ بھیگی ہوئی تختی، خشک تختی سے

شکل ۱۸

سطحی تناؤ کی وجہ سے علیحدہ ہونیکی کوشش کرتی ہے۔ البتہ خشک تختی کی طرف بھیگی ہوئی تختی کو کھینچنے کا عمل سطحی تناؤ کا صرف افقی جز کرتا ہے جو خود سطحی تناؤ سے کم ہوتا ہے۔ لہذا علیحدہ کرنے والی قوت کا عمل، قریب ڈھکیلنے والی قوت کے عمل سے زیادہ ہوتا ہے جس کی وجہ سے دونوں تختیوں میں دفع کا عمل ہوتا ہے۔

اگر دونوں تختیاں ایک دوسرے کے بالکل قریب رکھی جائیں تو دونوں کے درمیان مائع اوپر چڑھے گا اور دفع کے بجائے پھر جذب کا عمل ہونے لگے گا۔

# سطحی تناؤ معلوم کرنے کے طریقے

(۱) شعری نلی میں مائع کو چڑھا کر سطحی تناؤ کی دریافت:- فرض کرو کہ شکل نمبر ۱۹ میں ایک شعری نلی کسی برتن میں مائع کے اندر انتصابی وضع میں رکھی ہوئی ہے اور سطحی تناؤ کی وجہ سے مائع نلی میں اوپر چڑھ گیا ہے اور شعری نلی کا نصف قطر = ص اور چڑھے ہوئے مائع کی بلندی = ل

شعری نلی میں مائع کے اوپر کی سطح ایک منحنی شکل اختیار کرے گی جو شکل میں تبلائی گئی ہے۔

دراصل ل = منحنی کے نچلے حصہ سے برتن میں مائع کی مستوی سطح تک طول سطحی تناؤ س کی سمت شکل نمبر ۲۰ میں تبلائی گئی ہے۔

شکل نمبر ۱۹

شکل نمبر ۲۰

انتصابی وضع میں سطحی تناؤ = س جم فہ

لیکن منحنی کا طول = ۲ $\pi$ ص

$\therefore$ قوت کا انتصابی جز = ۲ $\pi$ ص س جم فہ

= پورے چڑھے ہوئے مائع کا وزن جو تعادل کی حالت پیدا کرتا ہے۔

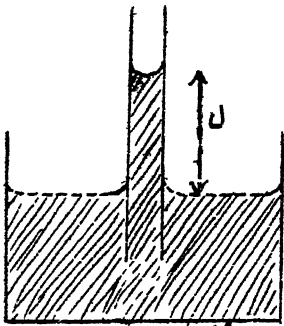
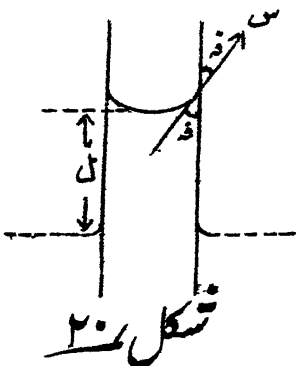
اس چڑھے ہوئے مائع کا حجم

= $\pi$ ص$^2$ ل اسلئے کمیت = $\pi$ ص$^2$ ل ثہ

جہاں ثہ = کثافت

اسلئے وزن = $\pi$ ص$^2$ ل ثہ ج

$\therefore$ ۲ $\pi$ ص س جم فہ = $\pi$ ص$^2$ ل ثہ ج

پارے کی صورت میں فہ ۹۰° سے زائد ہے اس لئے جم فہ نفی ہوگا یعنی ل نفی ہوگا اس کا

مطلب یہ ہے کہ نلی میں اوپر چڑھنے کے بجائے پارہ نیچے کی جانب اوسط سطح سے زیادہ اوتر آئے گا۔

اگر مائع نلی کو بھگو دے تو فہ = صفر یعنی جم فہ = ۱

∴ ۲ $\pi$ ص س = $\pi$ ص$^2$ ل ثہ ج

یعنی س = $\frac{\text{ص ل ج ثہ}}{۲}$ ، اگر پانی ہو تو ثہ = ۱

∴ س = $\frac{\text{ص ل ج}}{۲}$ ............ (۹)

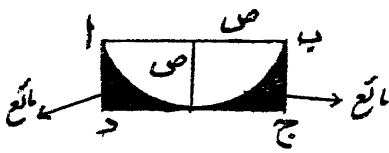
تجربہ میں ل خوردبین سے ناپا جاتا ہے۔ عملی کام میں ل کو ہمیشہ نلی سے دور ہٹ کر ناپنا چاہیئے (چونکہ مائع کی سطح نلی کے قریب کچھ اٹھی ہوئی ہوتی ہے اسلئے مستوی سطح سے ناپنا ہوتا ہے )

ل منحنی کے نچلے حصہ سے ناپا جاتا ہے۔ چونکہ منحنی کے نیچے دونوں جانب بھی تھوڑا سا کچھ مائع ہوتا ہے جیسا کہ شکل ۲۱ میں دکھایا گیا ہے اس لئے جواب صحیح حاصل ہونے کے لئے اُس مائع کے وزن کا تعین بھی ضروری ہے۔ اس وزن کو دریافت کرنے کے بعد نلی میں چڑھے ہوئے مائع کے وزن کو اس میں جمع کر لینا چاہیئے۔

استوانہ ا ب ج د کا حجم

= $\pi$ ص$^2$ × ص = $\pi$ ص$^3$

اور نصف کرہ کا حجم = $\frac{۲}{۳}$ $\pi$ ص$^3$

شکل ۲۱

اس لئے ان ٹکڑوں کا حجم جس میں مائع موجود ہے = $\pi$ ص$^3$ − $\frac{۲}{۳}$ $\pi$ ص$^3$

= $\frac{۱}{۳}$ $\pi$ ص$^3$

∴ اس مائع کا وزن = $\frac{۱}{۳}$ $\pi$ ص$^3$ ج ثہ

∴ کل چڑھے ہوئے مائع کا وزن = $\pi$ ص$^2$ ج ثہ ل + $\frac{۱}{۳}$ $\pi$ ص$^3$ ج ثہ

$= \pi$ ص² ج ثہ (ص/۳ + ل)

$= ۲ \pi$ ص س جم فہ

اگر مائع نلی کو بھگو دے تو فہ = صفر

$\therefore$ س = ص ج ثہ (ص/۳ + ل) / ۲ ............... (۱۰)

یہ صحیح ضابطہ ہے۔

(۱) ب۔ متوازی تختیوں کے ذریعہ سطحی تناؤ کی دریافت:۔

شعری نلی کے بجائے شیشہ کی دو متوازی تختیوں کو تصور کرو جن کا عرض اکائی ہے۔

فرض کرو کہ پہلے کی طرح مائع کے چڑھاؤ کی قیمت ل ہے۔ اگر دونوں تختیوں کے درمیان فاصلہ ن، ہو تو چڑھے ہوئے مائع کا وزن = ج ل ثہ ن،

ایک جانب سے انتصابی وضع میں جو قوت عمل کرتی ہے وہ = س جم فہ

اسی طرح دوسری طرف سے بھی قوت س جم فہ عمل کرتی ہے۔ لہٰذا سطحی تناؤ کی وجہ سے پوری قوت جو کہ مائع کو تعادل کی حالت میں قائم رکھتی ہے

= ۲ س جم فہ = ج ل ثہ ن،

$\therefore$ س = ج ل ثہ ن، / ۲ جم فہ ............... (۱۱)

(۲) مائع کے قطرے کے اہتزاز سے سطحی تناؤ کی دریافت:۔ سطحی تناؤ کی قوت کے زیر اثر اگر قطرہ تعادل کی حالت میں ہو تو اُس کی شکل کروی ہوگی۔ (دیکھو شکل ۲۲ ع) ۔ اگر قطرے کو ابتدا میں کسی قوت سے اس کی کروی شکل کو بدل کر چھوڑ دیا جائے تو سطحی تناؤ کی وجہ سے تھوڑی دیر میں پھر وہ کروی وضع اختیار کر لے گا۔ لیکن قطرہ کے اندر اس وقت چونکہ مائع حرکت کرتا رہتا ہے اس

لئے جمود کی وجہ سے قطرہ کی شکل پھر بدل جاتی ہے جیسا کہ شکل (۲۲ ب) سے ظاہر ہے۔ شکل کی یہ بتدریج تبدیلی اس وقت تک ہوتی رہتی ہے جب تک کہ سطحی تناؤ کی قوت اس کے مائع کے جمود پر غالب نہ آجائے۔ جب یہ قوت غالب ہو جاتی ہے تو پھر قطرہ کروی شکل اختیار کرنے لگتا ہے جیسا کہ شکل (۲۲ ا) میں دکھایا گیا ہے۔ اس کے بعد فوراً پھر مائع کے جمود کی وجہ سے قطرہ کی شکل کوئی دوسری ہو جائے گی۔ پھر سطحی تناؤ کی قوت جب غالب ہو گی تو اپنی اصلی کروی حالت میں قطرہ عود کر آئے گا۔ اس کی مثال رقاص کی سی ہے۔

ا
ب
اَ
شکل نمبر ۲۲

جب یہ ایک دفعہ کسی قوت کے ساتھ حرکت میں لایا جاتا ہے تو وہ اہتزاز کرتا رہتا ہے۔ اس کو اپنی تعادل کی وضع پر آنے کے بعد رک جانا چاہیئے تھا لیکن رقاص کے جمود کے معیار اثر کی وجہ سے وہ ٹھہرنے کے بجائے اہتزاز کرتا رہتا ہے۔ اسی طرح کروی وضع میں قطرہ کو جو اس کی تعادل کی وضع تھی ٹھہر جانا چاہیئے تھا لیکن جمود کی وجہ سے اس کی شکل میں تبدیلی ہونے لگتی ہے اور اس طرح وہ کروی اور غیر کروی وضع میں بتدریج گردش کرتا رہے گا۔ وقت کا وہ وقفہ جو مائع کے قطرہ کو اپنی پہلی کروی وضع سے پھر دوسری مرتبہ اسی کروی وضع میں آنے کے لئے درکار ہوتا ہے وقت دوران یا وقت ارتعاش کہلاتا ہے جیسا کہ پہلے بیان کیا جا چکا ہے۔ شکل ۲۲ پر غور کرو۔ مقام ا میں پہلے قطرہ کروی وضع میں تھا۔ ایک خاص وقفہ کے بعد مقام اَ پر پھر وہ کروی وضع اختیار کر لیتا ہے۔ اس خاص وقفہ کو وقت ارتعاش یا وقت دوران سے تعبیر کیا جاتا ہے۔

چونکہ و متناسب ہے مائع کی کثافت کے سطحی تناؤ اور قطرے کے نصف قطر کے اس لئے ابعاد کے ذریعہ سے ہم ایک ضابطہ حاصل کر سکتے ہیں:—

$$و \propto [\text{کثافت}]^{لا} [\text{سطحی تناؤ}]^{ما} [\text{نصف قطر}]^{یا}$$

جہاں لا، ما، یا کوئی عدد ہیں۔

$$\therefore \text{و} \propto \left[\text{ک ص}^{-۳}\right]^{\text{لا}} \left[\text{ک و}^{-۲}\right]^{\text{ما}} \left[\text{ص}\right]^{\text{یا}}$$

جہاں ص = قطرہ کا نصف قطر

اور ک = قطرہ کی کمیت

$$\therefore \text{و} \propto \text{ک}^{\text{لا}}\ \text{ص}^{-۳\text{لا}}\ \text{ک}^{\text{ما}}\ \text{و}^{-۲\text{ما}}\ \text{ص}^{\text{یا}}$$

$$\text{یعنے و} \propto \text{ک}^{(\text{لا}+\text{ما})}\ \text{ص}^{(-۳\text{لا}+\text{یا})}\ \text{و}^{(-۲\text{ما})}$$

اس مساوات کو صحیح ہونے کے لئے

$-۲\text{ما} = ۱$، $-۳\text{لا} + \text{یا} = \text{صفر}$ اور $\text{لا} + \text{ما} = \text{صفر}$

یعنے $\text{ما} = -\frac{۱}{۲}$ ∴ $\text{لا} = \frac{۱}{۲}$ اور $\text{یا} = \frac{۳}{۲}$

$$\therefore \text{و} \propto \left[\text{ث}\right]^{\frac{۱}{۲}} \left[\text{س}\right]^{-\frac{۱}{۲}} \left[\text{ص}\right]^{\frac{۳}{۲}}$$

$\therefore \text{و} = \text{م ص}^{\frac{۳}{۲}} \sqrt{\frac{\text{ث}}{\text{س}}}$ جہاں م کوئی مستقل ہے اور ث مائع کی کثافت

لینارڈ نے م کی قیمت $\frac{\pi}{\sqrt{۲}}$ ماحرکیات کے ذریعہ حاصل کی

پس قطرہ کا وقت ارتعاش $\text{و} = \frac{\pi}{\sqrt{۲}} \cdot \sqrt{\frac{\text{ص}^{۳}\ \text{ث}}{\text{س}}}$ ......... (۱۲)

اگر نصف قطر ص اور وقت دوران و معلوم ہو جائے تو مائع کا سطحی تناؤ س آسانی سے معلوم کیا جا سکتا ہے۔ اگر پانی کے قطرہ کا نصف قطر ۰۰۲۵ء۰ سمر

ہو تو وہ ایک ثانیہ میں ۱۰۰ مرتبہ ارتعاش کرے گا۔

اگر پانی کے قطرہ کو کاربن ڈائسلفیڈ ( $CS_2$ ) اور پٹرولیم کے آمیزہ میں جس کی کثافت پانی کی کثافت کے مساوی ہو ڈال دیا جائے تو صرف آنکھ کے ذریعہ ہم وقت ارتعاش معلوم کر سکتے ہیں۔ اسی طرح زیتون کے تیل کے قطرہ کو الکوہل اور پانی کے ایسے امیزہ میں جس کی کثافت زیتون کے تیل کی کثافت کے مساوی ہو ڈالنے سے ہی وقت ارتعاش معلوم کیا جا سکتا ہے۔

لینارڈ نے قطروں کی عکسی تصویریں آناً فاناً کھینچ کر د کی قیمت معلوم کی ۔ اوراس کی مدد سے س کی قیمت دریافت کی۔ قطرہ کا نصف قطر خوردبین سے ناپا جا سکتا ہے۔

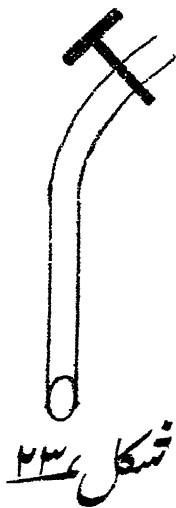
(۳) قطروں کی جسامت سے سطحی تناؤ کی دریافت :- فرض کرو کہ شکل ۲۳ میں ایک شعری نلی سے مائع کے قطرے گر رہے ہیں کسی قطرہ پر سطحی تناؤ کی وجہ سے جو قوت اوپر عمل کرتی ہے وہ = ۲ $\pi$ ص س

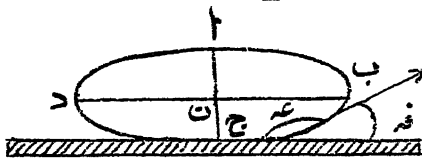
جہاں ص = قطرہ کا نصف قطر یا شعری نلی کا نصف قطر اور دوسری قوت جو نیچے کی طرف عمل کرتی ہے = قطرہ کا وزن م + دباؤ کی وجہ سے قطرہ میں قوت = م + $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ $\pi$ ص$^2$

∴ ۲ $\pi$ ص س = م + س $\pi$ ص

∴ $\pi$ ص س (۲ − ۱) = م

∴ س = $\frac{\text{م}}{\pi \text{ص}}$ .............. (۱۳)

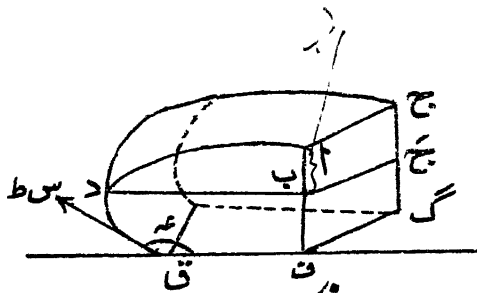
م کی قیمت معلوم کرنے کے لئے کئی قطروں کو ایک ہی رفتار کے ساتھ آہستہ آہستہ ایک برتن میں گرنے دیا جاتا ہے۔ ان سب کا وزن معلوم کرنے کے بعد ایک قطرہ کا وزن دریافت کیا جاتا ہے۔

شکل ۲۳

لارڈ ریلے نے π کی قیمت ۸ ر ۳ رکہی تہی ۔

## (۴) کوینکے کے طریقے سے سطحی تناؤ کی دریافت :-

اگر پارہ کو شیشہ کی تختی پر رکہا جائے تو جیسا کہ پہلے ذکر ہوچکا ہے وہ ایک خاص طریقہ سے پھیل کر تختی سے تماس کرے گا۔ شکل ۲۴ میں زاویۂ تماس زاویہ عہ ہے جو (۱۸۰ - فہ) کے مساوی ہے ۔ فرض کرو کہ قطرہ بہت بڑا ہے اور ب اور د قطرے کے بائیں اور دائیں جانب کے درمیانی حصہ میں ۔ اگر قطرہ چھوٹا ہو تو ظاہر ہے کہ ا ت > ت ج ہے چونکہ انحنا اوپر ہوگا ۔

شکل ۲۴

اگر قطرہ کافی بڑا ہو تو اوپر کی سطح مستوی تصور کی جا سکتی ہے ۔

اس بڑے قطرہ کو اس کے درمیان میں سے ایک ایسا ٹکڑا بناتے ہوئے کاٹو جس کے دو متوازی انتصابی مستویوں ج گ اور ا ف میں کوئی فاصلہ 'ط' رہے ۔ یعنی گ ف = ط

اس ٹکڑے کے دو حصے اس طرح کرو کہ کٹے ہوئے ٹکڑے کو پھر اس کے طول کی سمت کے علی القوائم درمیان میں سے کاٹا جائے تو شکل ۲۵ کے مطابق ہو۔

شکل ۲۵

شکل ۲۴ سے مقابلہ کرنے سے ا ب = ا ت = ل (فرض کرو)

ب د کے اوپر کے حصہ والے افقی مستوی میں سطحی تناؤ کی وجہ سے قوت = س ط

اور اوسط دباؤ = $\frac{1}{2}$(ا ب) ج ثہ (کیونکہ آدھا ٹکڑا کاٹ دیا گیا ہے)
جہاں ثہ = کثافت
لہٰذا اوسط قوت انتصابی دیوار ا ج ج ب پر دائیں جانب سے بائیں
جانب = $\frac{1}{2}$(ا ب) ج ثہ × (ا ب) ط = س ط

∴ س = $\frac{1}{2}$(ا ب)$^2$ ج ثہ ............ (۱۴)

یعنی شکل ۲۵ میں ا ب یا شکل ۲۴ میں ا ن معلوم ہو جائے تو س کی قیمت معلوم کی جا سکتی ہے اگر ہم پورے ٹکڑے ا د ق ف گ ج پر غور کریں
تو اس صورت میں سطحی تناؤ کی قوتیں = س ط[۵۱] + س ط جم عہ[۵۲]

∴ س ط (ا + جم عہ) = $\frac{1}{2}$(ا ف) ج ثہ × (ا ف) ط
= اوسط قوت دیوار ا ج گ ف پر دائیں جانب سے بائیں جانب

∴ س (ا + جم عہ) = $\frac{1}{2}$ (ا ف)$^2$ ج ثہ ............ (۱۵)

جہاں (ا ف) = قطرے کی پوری گہرائی جو خوردبین کے ذریعے ناپ لی جاتی ہے۔

[ا ب یا ا ن ناپنے کے لئے خوردبین کو د پر اس طرح ماسکہ میں لاؤ کہ اس کا انتصابی صلیبی تار اس حصہ کو مس کرے اور افقی صلیبی تار د پر منطبق ہو جائے۔ اسی طرح ا پر بھی ماسکہ میں لاؤ اور فاصلہ ا ب یا ا ن ناپ لو۔ اسی طرح مائع میں ڈوبے ہوئے مقعر عدسہ کی سطح کے نیچے ہوا کا ایک بلبلا بنا کر سطحی تناؤ کی قیمت ان ہی اصول پر دریافت کی جا سکتی ہے]

اگر س کی قیمت مساوات (۱۴) سے حاصل ہو جائے تو زاویہ عہ مساوات (۱۵) سے معلوم کیا جا سکتا ہے۔

---

[۵۱] قوت کی سمت شکل میں بتائی گئی ہے۔

[۵۲] قوت افقی وضع میں چونکہ نیچے کا ٹکڑا ہی لیا گیا ہے۔

سطحی تناؤ کی ان دونوں مساواتوں کو ایک دوسرے سے تقسیم کرنے سے :-

$$\frac{۱}{۱ + \text{جم عہ}} = \frac{(\text{ا ب})^{۲}}{(\text{ا ف})^{۲}}$$

$$\text{یعنی جم عہ} = \frac{(\text{ا ف})^{۲}}{(\text{ا ب})^{۲}} - ۱$$

میگی نے اس طریقہ سے مختلف مائعات کے لئے شیشہ کے ساتھ زاویہ تماس عہ کی قیمتیں معلوم کیں۔

(۵) ولہلمی کے طریقے سے سطحی تناؤ کی دریافت (۸) :- ایک صاف پلاٹینم کے تار کے ٹکڑے کو مستطیل کی شکل میں موڑ دو۔ فرض کرو کہ اسکا عرض = ل۔

اس تار کو ترازو کے ایک سرے پر لٹکا دو اور اس کو مائع میں اس طرح ڈبو دو کہ اس کے اوپر کی سطح مائع کی سطح کے قریب ہو جائے۔ اب ترازو کے دوسرے پلڑے میں اتنے باٹ ڈالو کہ تعادل قائم ہو جائے۔ اس کے بعد تار کو مائع میں پوری طرح ڈوبنے دو۔ مائع کی ایک جھلی تار پر قائم ہو جائے گی جبکہ تار اوپر کی طرف اٹھے گا (دیکھو شکل ۲۶)۔ چونکہ جھلی کی وجہ سے سطحی تناؤ والی قوتیں نیچے کی طرف عمل کرتی ہیں اس لئے باٹوں میں اضافہ کرنا چاہئیے تاکہ تعادل قائم ہو جائے۔

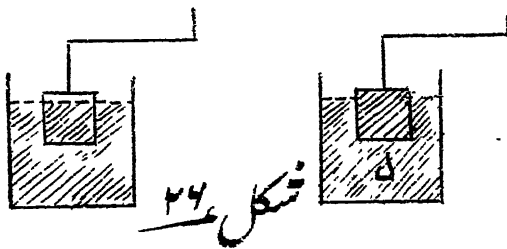
اگر تعادل قائم کرنے کے لئے اضافہ کمیت ک ہو تو

قوت = ک ج

اور دوسری قوت سطحی تناؤ کی وجہ سے = س ۲ ل

= ک ج

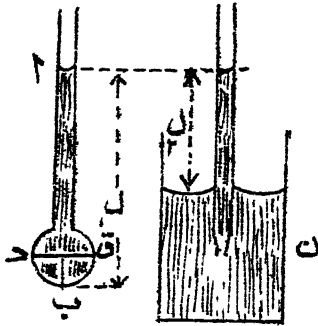
$$\therefore \text{س} = \frac{\text{ک ج}}{۲\,\text{ل}}$$

شکل ۲۶

اس طرح تجربہ کو کئی بار دُھرانا چاہیئے اور ک کی اوسط قیمت لینی چاہیئے۔
[نوٹ۔ تار کو ابتدا میں ریگمال کاغذ سے خوب صاف کر لو اور پھر بنسنی شعلہ میں اچھی طرح گرم کرو۔ تجربہ کے دوران میں تار کے ٹکڑے کو دونوں صورتوں میں مائع کی سطح سے ایک ہی بلندی پر رکھنا چاہیئے۔]

(۶) سنِلس کے طریقے سے سطحی تناؤ کی دریافت :-

اس طریقہ میں شکل ۲۷ کے مطابق، شعلہ پر ایک پتلی نلی کو گرم کرنے کے بعد کھینچ کر چھوٹے سوراخ والی بنالیا جاتا ہے اور پھر اُس مائع میں جس کا کہ سطحی تناؤ دریافت کرنا مطلوب ہوتا ہے اس پتلی نلی کو ڈبو کر نکال لینے کے بعد، ایک لوہے کے استادہ کے ذریعہ انتصابی وضع میں جکڑ دیا جاتا ہے۔ چونکہ مائع کی سطح نیچے اُترنے لگتی ہے اس لئے ایک قطرہ ق ب د آخرکار نلی کے سرے پر بننے لگتا ہے۔

قطرہ کی شکل کو کروی تصور کرتے ہوئے فرض کرو کہ اسکا نصف قطر = ص اور شعری نلی میں مائع کی دوڑی کا سرا ۲ اور قطرہ کے سب سے نچلے نقطہ ب کے درمیان فاصلہ = ل۱

شکل ۲۷

شعری نلی کو حرکت دیئے بغیر یہ فرض کرو کہ اس کا نچلا سرا ایک برتن ن میں رکھا جاتا ہے جس میں وہی مائع بھرا ہوا ہے۔ شعری نلی میں مائع کی ڈوری کی بلندی نیچے اتر آئے گی لیکن برتن ن کو اوپر اُٹھانے سے شعری نلی میں مائع کی ڈوری کا سرا پھر اس بلندی پر لایا جا سکتا ہے جتنا کہ پہلے تھا۔ فرض کرو کہ برتن میں مائع کی آزادانہ سطح اور شعری نلی میں مائع کی ڈوری کے سرے کے درمیان فاصلہ = ل۲

قطرہ میں ایک افقی مستوی ق د، ایسی کھینچو جو قطرہ کے مرکز میں سے گزرے تاکہ ب اور ق د کے مرکز کے درمیان فاصلہ ص ہو جائے۔

ق د سے ا تک (جو شعری نلی میں مائع کی ڈوری کا سرا ہے) فاصلہ =

= (ل۱ - ص) اس مستوی ق د پر عمل کرنے والی قوتوں پر غور کرنے سے یہ معلوم ہوگا کہ (ل۱ - ص) طول میں سے ل۲ طول کو وہ قوتیں سہارتی ہیں جو سطحی تناؤ کی وجہ سے اوپر کی جانب عمل کرتی ہیں۔

لہذا ق د پر دباؤ ڈالنے والا حاصل استوانہ = (ل۱ - ص - ل۲)

∴ ق د پر دباؤ = ج ثہ (ل۱ - ص - ل۲) جہاں ثہ مائع کی کثافت ہے۔

اس لئے ق د پر نیچے کی جانب عمل کرنے والی قوت =

= ج ثہ (ل۱ - ص - ل۲) $\pi$ ص$^2$

لیکن ق د پر کرہ کا نصف وزن بھی نیچے کی جانب عمل کرتا ہے اور یہ

= $\frac{2}{3}$ $\pi$ ص$^3$ ج ثہ

لہذا نیچے کی جانب مجموعی قوت =

ج ثہ (ل۱ - ص - ل۲) $\pi$ ص$^2$ + $\frac{2}{3}$ $\pi$ ص$^3$ ج ثہ

سطحی تناؤ کی وجہ قوت = س ۲ $\pi$ ص

لہذا تعادل کے لئے :- ۲ $\pi$ ص س =

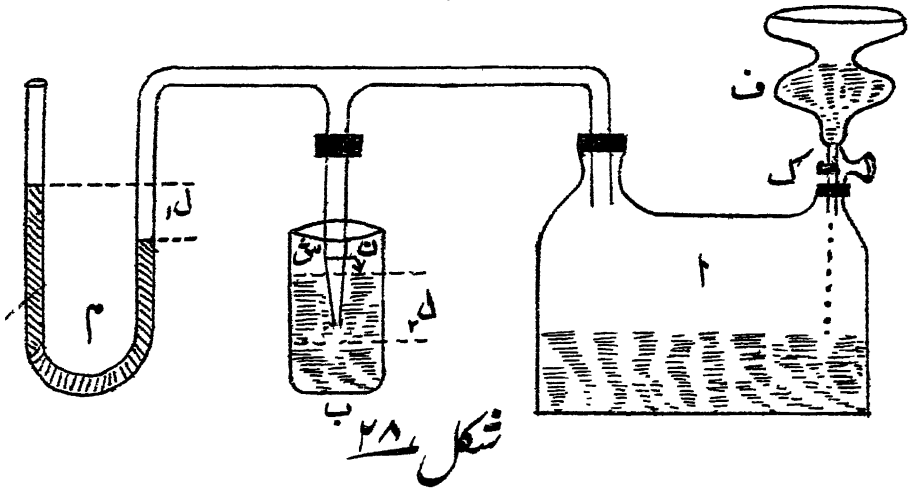
ج ثہ $\pi$ ص$^2$ $\left\{(ل_1 - ص - ل_2) + \frac{2}{3} ص\right\}$

$$∴ س = \frac{ج ثہ ص}{2} \left\{(ل_1 - ل_2) - \frac{ص}{3}\right\} \quad \text{......... (۱۷)}$$

متحرک خوردبین سے ل۱، ل۲ اور ق د = ۲ ص۔ ان سب کی قیمتیں ناپ لی جائیں تو س کی قیمت حسابی عمل سے دریافت کی جا سکتی ہے۔

(۷) اٹیگر کے طریقہ سے سطحی تناؤ کی دریافت :- شکل ۲۸ میں ب ایک برتن ہے جس میں وہ مائع رکھا جاتا ہے جس کا سطحی تناؤ مطلوب ہوتا ہے۔

ش ایک سیدھی پتلی نلی ہے جس کا سِرا شعری نلی کی طرح بنایا گیا ہے اور اس سرے کا قطر تقریباً ۳ر یا ۴ر ملمر ہے۔ ن ایک نمایندہ ہے جو مائع کی سطح کو بتاتا ہے۔ م ایک داب پیما ہے جس میں ذیلیال یا اور کوئی مائع جس کی کثافت معلوم ہو، ڈال دیا جاتا ہے۔ ا ایک بوتل ہے جس میں ابتداً ہوا کرہ ہوائی کے دباؤ پر رہتی ہے۔ ف ایک قیف ہے جس میں پانی بھر دیا جاتا ہے اور ک کاک کے ذریعہ نہایت ہی آہستہ آہستہ ا میں گرتا ہے۔

شکل ۲۸

اس طریقے میں ہوا کے بلبلے اس مائع میں بنائے جاتے ہیں جس کا کہ سطحی تناؤ دریافت کرنا مطلوب ہوتا ہے۔ ظاہر ہے کہ جوں جوں پانی ف میں سے گرتا جائے گا ا کے اندر ہوا کے دباؤ میں اضافہ ہوگا جس کی وجہ سے شعری نلی کے سرے پر ہوا کا بلبلا بنے گا اور یہ ایک خاص کروی جسامت تک پہنچنے کے بعد ٹوٹ جائے گا اس کے ٹوٹنے کا سبب یہ ہے کہ اس کا اندرونی دباؤ، بیرونی دباؤ سے بڑھ جاتا ہے جب یہ بلبلا ٹوٹنے کو ہوتا ہے تو اس کا قطر اعظم قیمت پر پہنچ جاتا ہے اور اس قیمت سے کسی طرح بڑھ نہیں سکتا۔ اس کے ٹوٹنے کے لمحہ میں اس کے اندر کے دباؤ کی قیمت ظاہر ہے کہ ا کے اندر کے دباؤ کے مساوی ہوگی،

اور یہ دباؤ م میں مائع کی بلندیوں کا فرق پڑھ لینے سے معلوم کیا جا سکتا ہے، اور جب بلبلا ٹوٹتا ہے تو اس وقت ا میں کا دباؤ پھر کرۂ ہوائی کے دباؤ کے مساوی ہو جاتا ہے اور م میں کے مائع کی سطح ایک ہی بلندی پر آ جاتی ہے۔ اس کے بعد یہی عمل پھر اسی طرح دوہرایا جاتا ہے۔ دوبارہ جب بلبلا ٹوٹتا ہے تو داب پیما میں بلندیوں کے فرق کے مختلف مشاہدات لئے جاتے ہیں۔

فرض کرو کہ جوں ہی بلبلا ٹوٹتا ہے م کے مائع کی بلندیوں میں فرق = $ل_1$

بلبلے کے اندر دباؤ = $\pi$ + $ثہ_1$ ج $ل_1$

جہاں $\pi$ = کرہ ہوائی کا دباؤ

ج = اسراع بوجہ جاذبہ زمین

اور $ثہ_1$ = م کے مائع کی کثافت

اور نیز یہ بھی فرض کرو کہ بلبلے کے ٹوٹتے ہی، شعری نلی ش کا سرا، مائع کی سطح سے $ل_2$ فاصلہ نیچے رہتا ہے۔ دیکھو شکل ۲۸

تب بلبلے کے باہر دباؤ = $\pi$ + $ثہ_2$ ج $ل_2$

جہاں $ثہ_2$ = اس مائع کی کثافت جس کا سطحی تناؤ دریافت طلب ہے۔

اب چونکہ بلبلا ٹوٹ گیا ہے اس کی وجہ یہ ہوئی کہ اندر کا دباؤ باہر کے دباؤ سے بڑھ گیا۔

لہٰذا بلبلے کے اندر اضافۂ دباؤ = ($\pi$ + $ثہ_1$ ج $ل_1$) − ($\pi$ + $ثہ_2$ ج $ل_2$)

= ج ($ثہ_1$ $ل_1$ − $ثہ_2$ $ل_2$)

بلبلے کے لئے لاپلاس کے ضابطہ سے اندرونی دباؤ میں بیرونی دباؤ سے اضافہ د = س $\left(\frac{1}{ص_1} + \frac{1}{ص_2}\right)$

اگر بلبلا کروی شکل کا ہو تو $ص_1$ = $ص_2$

$\therefore$ د = $\frac{2 س}{ص_1}$ جہاں $ص_1$ = بلبلے کا نصف قطر

= تقریباً شعری نلی کے سرے کا نصف قطر

$$\therefore \text{د} = \frac{\text{س}^{2}}{\text{ص}_{1}} = \text{ج}\,(\text{ثہ}\,\text{ل}_{1} - \text{ثہ}\,\text{ل}_{2})$$

$$\therefore \text{س} = \frac{\text{ج}\,\text{ص}_{1}}{2}\,(\text{ثہ}\,\text{ل}_{1} - \text{ثہ}\,\text{ل}_{2}) \quad \text{..........} \quad (18)$$

تجربہ میں $\text{ل}_{1}$، $\text{ل}_{2}$ اور $\text{ص}_{1}$ متحرک خوردبین کے ذریعہ ناپ لئے جاتے ہیں۔ پس ان سے سطحی تناؤ س کی قیمت معلوم ہو جاتی ہے۔

اس طرح ب میں کے مائع کو مختلف تپشوں پر گرم کرکے اس مائع کے سطحی تناؤ کی قیمت معلوم کی جاتی ہے اور تپش کی وجہ سے اس پر جو اثرات ہوتے ہیں وہ دریافت کئے جا سکتے ہیں۔

کسی نمک کے مختلف ارتکاز کے محلول دئیے ہوئے ہوں تو ان کے سطحی تناؤ بھی معلوم کئے جا سکتے ہیں اور ارتکاز کے جو اثرات سطحی تناؤ پر ہوتے ہیں وہ بھی دریافت کئے جا سکتے ہیں۔

اس تجربہ میں نقص یہ ہے کہ ہم بلبلے کو کروی وضع کا تصور کرتے ہوئے $\text{ص}_{1} = \text{ص}_{2}$ مانتے ہیں لیکن ٹھیک طور پر یہ کہا نہیں جا سکتا کہ ہمارا یہ معروضہ صحیح ہے۔

اس میں ایک اور نقص یہ ہے کہ بلبلے کے نصف قطر کو ہم تقریباً شعری نلی کے سرے کے نصف قطر کے مساوی لیتے ہیں لیکن بلبلے کا نصف قطر اس کے ٹوٹتے وقت شعری نلی کے نصف قطر سے بڑا ہوتا ہے۔ اس کی تصحیح کے لئے دیکھو مساوات (۴۷)

اے فرگوسن نے کروی شکل وغیرہ فرض کرنے کے بغیر ایک صحیح ضابطہ اخذ کیا جو اوپر کے نقائص سے پاک ⑩ ہے:-

$$\text{س} = \text{ج}\,\text{گ} + \left\{ \frac{\text{ص}^{3}\,\sqrt{3}}{12\,\sqrt{\text{گ}}} \right\}$$

جہاں ص = شعری نلی کا نصف قطر

اور گ = $\frac{ص}{۲}$ [ ثہ ل۱ - ثہ (ل۲ + $\frac{۲ ص}{۳}$) ]

(۸) شعری موجوں کے ذریعہ سطحی تناؤ کی دریافت :- پانی کی سطح پر کی موجیں دو قسم کی ہوتی ہیں، ایک کو شعری موج یا لہر کہتے ہیں جو کہ ہلکی ہلکی ہوا کے چلنے سے پیدا ہوتی ہیں اور دوسری جو بڑی دکھائی دیتی ہیں ان کو ارضی تجاذبی موجوں سے موسوم کیا جاتا ہے۔ شعری موجوں کا طول تقریباً ۲ ر اسمر سے بھی چھوٹا ہوتا ہے اور ان کا حیطۂ ارتعاش بھی اسی طرح بہت کم ہوتا ہے۔ ذرّات کی حرکت چونکہ سادہ موسیقی ہوتی ہے اس لئے ایسی موجوں کی تعبیر جیبی منحنی کی شکل سے ہوتی ہے۔ یہ موجیں پانی کے سطحی تناؤ کی وجہ سے پیدا ہوتی ہیں۔ جاذبۂ ارض کا اثر ان پر بالکل خفیف سا ہوتا ہے جو قابل نظر انداز ہے۔

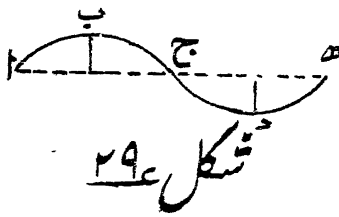
ارضی تجاذبی موجوں کا طول اور حیطۂ ارتعاش کافی بڑا ہوتا ہے۔ ایسی موج میں ذرات کی حرکت کی سمت، موج کی روانی کی سمت کے علی القوائم ہونے کے علاوہ اس کے متوازی بھی ہوتی ہے۔ اس کا نتیجہ یہ ہوتا ہے کہ عمودی اور افقی حرکتوں کے ملنے سے ہر ایک ذرّہ ایک خاص وضع کے ناقص کی شکل میں حرکت کرتا ہے گہرے پانی میں ان دونوں عمودی اور افقی حرکتوں کے حیطۂ ارتعاش مساوی ہوتے ہیں۔

چنانچہ موج کے راستہ میں ہر ایک ذرّہ مساوی نصف قطر کے دائروں میں حرکت کرتا ہے۔ ذرات کی اس قسم کی حرکت سے پانی کی سطح جو شکل اختیار کرتی ہے وہ ~~سائکلائڈ~~ مُدَوَّر کی سی ہوتی ہے۔

فرض کرو کہ شکل ۲۹ میں ا ب ج د ہ ایک ایسی موج ہے جو جاذبہ ارض کے باعث گہرے پانی میں پیدا ہوئی ہے۔ سہولت کی غرض سے منحنی کی شکل جیبی بنائی گئی ہے۔

موج سے پہلے پانی کی سطح ا ج ھ تھی۔ فرض کرو کہ موج کی رفتار س ا ہے اور نیز یہ بھی فرض کرو کہ پانی کو اس کے مساوی رفتار مخالف سمت میں (یعنی − س ا) دے کر موجوں کو قائم کر دیا گیا ہے۔ اب حضیض اور اوج اپنے ابتدائی مقامات پر قائم رہیں گے

ب
ا ج ھ

شکل ع ۲۹

صرف پانی بہہ کر چلا جائے گا۔ ب پر کے ذرات کی رفتار = $\frac{۲ \pi ا}{و} + س$

جہاں ا = ذرات کے دائروں کا نصف قطر

اور و = موج کا وقت دوران

لہذا ان ذرات کی توانائی بالفعل = $\frac{۱}{۲}ک \left(\frac{۲\pi ا}{و} + س\right)^۲$

جہاں ک = اس پانی کی کمیت جو ب پر ہے۔

اب چونکہ د پر کے ذرات ب پر کے ذرات کے مخالف سمت میں حرکت کر رہے ہیں۔

اس لئے اس کمیت کا پانی جب ب سے د پر پہنچے گا تو اس کی توانائی بالفعل

$= \frac{۱}{۲}ک \left(\frac{۲\pi ا}{و} - س\right)^۲$

لہذا ب سے د پر پہنچنے میں توانائی بالفعل کی کمی =

$$= \frac{۱}{۲}ک \left\{\left(\frac{۲\pi ا}{و} + س\right)^۲ - \left(\frac{۲\pi ا}{و} - س\right)^۲\right\}$$

$$= \frac{۴\pi ک ا س}{و}$$

اور توانائی بالقوہ میں اضافہ = ۲ ک ج ا جہاں ج = اسراع بوجہ جاذبیت

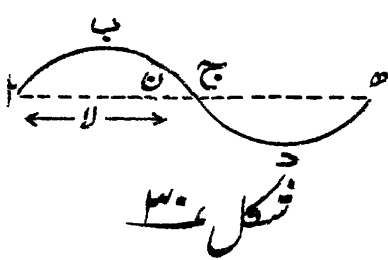
∴ بقائے توانائی کے کلیہ سے ۲ ک ج ا = $\frac{۴\pi ک ا س}{و}$

یعنی $س = \frac{ج و}{۲\pi} = \frac{ج ل}{۲\pi س}$ جہاں ل = طول موج

$\therefore$ مر۲ = ج لہ / ۲ π ........................ (۱۹)

اب ہم شعری موجوں کی رفتار دریافت کریں گے جو کہ سطحی تناؤ کی وجہ سے پیدا ہوئی ہے جیسا کہ اوپر بیان ہو چکا ہے ان موجوں کو جیبی منحنی کی شکل سے تعبیر کر سکتے ہیں

فرض کرو کہ شکل ع۳۰ میں ا ب ج د ھ ایک شعری موج ہے جس میں ا ج ھ پانی کی ابتدائی سطح ہے ۔ ا سے لا فاصلہ پر کوئی ایک ذرہ ن سطح پر تصور کرو ۔ تب ذرہ کا نقل مکان ما کسی ایک خاص وقت ت میں :-

شکل ع۳۰

ما = ا جب سرلا ت

جہاں ا = حیطۂ ارتعاش اور سرلا = زاوئی رفتار

یعنی ما = ا جب ۲ π لا / لہ

یعنی فر۲ ما / فرلا۲ = − ۴ π۲ ما / لہ۲ ........................ (۲۰)

اب اگر موج کا حیطۂ ارتعاش ذرا سا زیادہ ہو جائے تو نقطۂ ن ایک چھوٹا فاصلہ بقدر فا اوپر کی طرف چڑھے گا ۔ اس لئے ن کے قریب ایک چھوٹا سا پانی کا رقبہ عہ تصور کیا جا سکتا ہے ۔

سطح پر دباؤ کی مقدار = س / ص جہاں ص = سطح کا نصف قطر انحنا

$\therefore$ قوت = س عہ / ص یعنی ن کے اوپر چڑھنے کی وجہ سے کام = س عہ ف / ص

جاذبۂ ارض کی وجہ سے جو کام عمل میں آیا = عہ ف ثہ ج ما جہاں ثہ = پانی کی کثافت

پس ان دونوں کی وجہ حاصل کام = عہ ف ثہ ج ما − س عہ ف / ص ........(۲۱)

لیکن $\frac{1}{\text{ص}} = \dfrac{\dfrac{\text{فر}^2\,\text{ما}}{\text{فر لا}^2}}{\left\{1+\left(\dfrac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}$

اگر $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ بہت چھوٹا ہو تو $\frac{1}{\text{ص}} = \frac{\text{فر}^2\,\text{ما}}{\text{فر لا}^2} = -\frac{4\pi^2\,\text{ما}}{\text{لہ}^2}$

اب مساوات (۲۱) میں ص کی قیمت درج کرنے سے حاصل کام یا

حاصل توانائی بالقوہ $= \text{عہ ف}\left(\text{ثہ ج ما} + \frac{4\pi^2\,\text{ما س}}{\text{لہ}^2}\right)$

$= \text{عہ ف ما ثہ}\left(\text{ج} + \frac{4\pi^2\,\text{س}}{\text{ثہ لہ}^2}\right)$

اس سے ظاہر ہے کہ سطحی تناؤ کی وجہ سے ج میں جو اضافہ ہوا وہ $\frac{4\pi^2\,\text{س}}{\text{ثہ لہ}^2}$ کے مساوی ہے۔ صرف جاذبۂ زمین کے اثر کی وجہ سے کوئی تبدیلی نہیں ہوتی۔

لہذا جاذبۂ زمین اور سطحی تناؤ کے مشترکہ عمل سے جو موجیں بنیں گی ان کی رفتار مساوات (۱۹) میں ج کے بجائے $\left(\text{ج} + \frac{4\pi^2\,\text{س}}{\text{ثہ لہ}^2}\right)$ لکھنے سے حاصل ہوگی۔

$$\therefore \text{ر}^2 = \left(\text{ج} + \frac{4\pi^2\,\text{س}}{\text{ثہ لہ}^2}\right)\cdot\frac{\text{لہ}}{2\pi}$$

$$\therefore \text{ر} = \sqrt{\left\{\frac{\text{ج لہ}}{2\pi} + \frac{2\pi\,\text{س}}{\text{ثہ لہ}}\right\}} \quad \ldots\ldots\ldots (۲۲)$$

جاذبۂ ارض کی موجوں میں لہ کے اضافہ سے ر کی قیمت بڑھے گی لیکن شعری موجوں میں لہ کے بڑھنے سے ر میں کمی واقع ہوگی۔

ر کو اقل ہونے کے لئے $\frac{\text{ج لہ}}{2\pi} = \frac{2\pi\,\text{س}}{\text{ثہ لہ}}$

لیکن شعری موجوں کے لئے ما جب اقل ہوگا لہ اعظم ہوگا۔

$$\therefore \text{شعری موجوں کے لئے } ل_{\text{اعظم}} = 2\pi \sqrt{\frac{\text{س}}{\text{ج ث}}}$$

$$\text{اور ارضی موجوں کیلئے } ل_{\text{اقل}} = \text{شعری موجوں کے لئے } ل_{\text{اعظم}}$$

مساوات ۲۲ کے استعمال سے سب سے پہلے لارڈ ریلے نے مائع کا سطحی تناؤ کامیابی کے ساتھ معلوم کیا[11] اور اس کے بعد ڈاکٹر ڈارسے نے بھی اسی طریقہ سے مختلف محلولوں کے سطحی تناؤ کی قیمتیں معلوم کیں[12]۔

جس مائع کا سطحی تناؤ دریافت کرنا مطلوب ہوتا ہے اس کو ایک بڑے چپٹے برتن میں رکھا جاتا ہے۔ دوشاخے کی ایک شاخ سے ٹین یا المونیم کی ایک پتلی دھجی باندھ دی جاتی ہے جس کا کچھ حصہ مائع میں اس طرح ڈوبا رہتا ہے کہ جب دوشاخہ مرتعش کیا جاتا ہے تو شعری موجیں بننے لگتی ہیں، دوشاخہ کا تعدد ۶۰ کے قریب ہوتا ہے اور اس کو برقی طریقہ سے مرتعش کیا جاتا ہے۔ چونکہ ان موجوں کی رفتار بہت تیز ہوتی ہے اس وجہ سے وہ بالراست نظر نہیں آسکتیں لیکن غیر مسلسل نور کی شعاعوں سے (جن کی تنویری چمک کا تعدد، شعری موجوں کے پیدا کرنے والے مبدء کے تعدد کے مساوی ہو) ان کو دیکھا جائے تو یہ قائم موجوں کی طرح نظر آسکتی ہیں۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ جب مشاہد، مائع کی سطح کو غیر مسلسل طریقہ پر اس طرح سے دیکھتا ہے کہ اس کے دیکھنے کا تعدد، شعری موجوں کو پیدا کرنے والے دوشاخہ کے تعدد کے مساوی ہو، تو ایک مرتبہ دیکھنے کے بعد، پھر جب وہ دوسری مرتبہ دیکھے گا تو اس کے وقفہ میں موجیں ایک طول موج کے مساوی فاصلہ آگے بڑھیں گی اور اس طرح یہ اس مقام پر ہوں گی جہاں ان سے پہلے کی موجیں تھیں۔ اس طرح موجیں ساکن نظر آئیں گی۔

اس غیر مسلسل طریقہ سے مائع کی سطح کو دیکھنے کا انتظام یوں کیا جاتا ہے کہ ایک اور دوشاخہ جس کا تعدد پہلے دوشاخہ کے تعدد کے مساوی ہو لے کر اسی برقی دور کے ذریعہ چلایا جاتا ہے جو پہلے دوشاخہ کو مرتعش کرتا ہے۔ اس دوسرے دوشاخے کے دونوں شاخوں کے ساتھ الومینیم کے دو پتلے ٹکڑے اس طرح باندھ دیئے جاتے ہیں کہ ان ٹکڑوں کی وجہ سے مائع کی سطح جبکہ دوشاخہ ساکن ہوتا ہے بالراست نہیں نظر آسکتی، لیکن جب شاخیں انتہائی علیحدگی کے مقام پر ہوتی ہیں تو ان میں سے مائع کی سطح نظر آتی ہے۔ لہذا دوشاخہ کے ہر مکمل ارتعاش پر سطح کو دیکھا جائے تو موجیں ساکن نظر آتی ہیں۔ یہ اسی طرح کا عمل ہے جیسا کہ گردش نمائی طریقے سے دوشاخہ کا تعدد دریافت کرنے میں تیزی سے گھومنے والے قرص کے سوراخ، ساکن نظر آتے ہیں۔

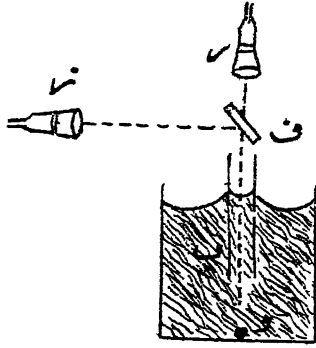
طول موج تقسیمی پرکار یا ایسے ایک پیمانہ کے ذریعہ جو سطح پر ترتیب دیا جاسکتا ہے دریافت کیا جاتا ہے۔ پانی یا کسی دوسرے ہلکے مائع کی صورت میں اچھے نتائج حاصل کرنا ہو تو ایک برقی گولہ سطح سے دو یا تین گز اوپر رکھا جاتا ہے تاکہ موجیں واضح طور پر نظر آسکیں۔ اگر دوشاخہ کا تعدد ع کے مساوی ہو تو مساوات (۲۲) سے

$$\text{ر} = \text{ع}\,\text{ل} = \sqrt{\frac{\text{ج}\,\text{ل}}{2\pi} + \frac{2\pi\,\text{س}}{\text{ث}\,\text{ل}}}$$

$$\therefore\ \text{س} = \frac{\text{ث}\,\text{ل}^2}{4\pi^2}\left\{2\pi\,\text{ع}^2\,\text{ل} - \text{ج}\right\} \quad \ldots\ldots\ (۲۳)$$

اس ضابطہ سے س کی قیمت دریافت کی جاسکتی ہے۔

یہ طریقہ مختلف نمکوں کے محلول کے سطحی تناؤ، متفرق ارتکازوں پر، دریافت کرنے میں نہایت کارآمد ہوتا ہے۔

(۹) اینڈرسن اور بوئیٹ کا طریقہ:۔ شکل ۱۳۱ پر غور کرو۔ اس میں
ا ایک مستطیل شیشہ کا برتن ہے جس کے پیندے میں ایک نشان و کیا گیا ہے۔
شیشہ کی ایک نلی ب عموداً اس میں اس طرح رکھی گئی ہے کہ و اس کے محور پر (بشرطیکہ یہ خارج کیا جائے) واقع ہوتا ہے۔

م ایک خوردبین ہے جو افقی یا انتصابی سمتوں میں ہٹائی جا سکتی ہے۔ تجربہ میں خوردبین کو اس طرح ترتیب دیا جاتا ہے کہ و اس میں ماسکہ پر ہو اور اس کے کسر پیما کو پڑھ لیا جاتا ہے۔ جس مائع کا سطحی تناؤ دریافت کرنا ہو اس کو برتن ا میں ڈال دیا جاتا ہے۔ نلی ب میں مائع شکل ۱۳۱ کے مطابق ہوگا۔ خوردبین میں اب و کے خیال کو جو ہلالی سطح میں سے منعطف ہو کر بنتا ہے ماسکہ پر لایا جاتا ہے اور پھر کسر پیما کو پڑھ لیا جاتا ہے۔ اس کے بعد خوردبین میں نلی میں کے مائع کی اوپر کی ہلالی سطح کے مرکز کو ماسکہ پر لاکر کسر پیما کو آخری دفعہ پڑھ لیا جاتا ہے۔ کسر پیما کے ان مشاہدات سے ش اور خ یعنی شخص کے اور خیال کے فاصلے ہلالی سطح کے مرکز سے معلوم ہو جاتے ہیں۔ علم ہندسی مناظر سے

شکل ۱۳۱

$$\frac{1}{خ} - \frac{ن}{ش} = \frac{ن-1}{ص} \quad \ldots\ldots (24)$$

جہاں ص = ہلالی سطح کا نصف قطر انحنا

اور ن = مائع کا انعطاف نما

اب اگر یہ فرض کیا جائے کہ کسی تراش عمودی پر ہلالی سطح کا انحنا ایک ہی

رہتا ہے تو اسکے دونوں رخوں پر فرق دباؤ = $\frac{۲ س}{ص}$ = ج ثہ ل ......(۲۵)

جہاں ثہ = مائع کی کثافت

اور ل = برتن ۲ میں مائع کی آزاد سطح سے ہلالی سطح کے مرکز کی بلندی۔

ان دونوں مساواتوں (۲۴) اور (۲۵) سے :—

$$س = \frac{ج ثہ ل}{۲} \left\{ \frac{(ن - ۱)}{\left(\frac{۱}{خ} - \frac{ن}{س}\right)} \right\} ........(۲۶)$$

اس سے س کی قیمت حسابی طریقہ سے معلوم کی جا سکتی ہے۔

اس طریقہ میں بعض مائعیات کے ہلالی سطحوں (مثلاً تارپین وغیرہ) کے مرکز کو خوردبین میں ماسکہ پر لانا بے حد دشوار ہوتا ہے۔ اس سے بچنے کے لئے انعکاس سے ایک اور خیال بنایا جاتا ہے۔ شکل $\frac{۳۱}{ب}$ میں نرا ایک توازی گر ہے جس میں سے نور کی متوازی شعاعیں شیشہ کی ایک چھوٹی تختی ف پر واقع ہوتی ہیں (ف نلی کے محور سے ۴۵° کا زاویہ بناتے ہوئے رکھا جاتا ہے) جہاں سے وہ ہلالی سطح کی جانب نیچے منعکس ہوتی ہیں اور ہلالی سطح کے مرکز سے $\frac{ص}{۲}$ فاصلہ پر نلی کے نیچے ایک خیال بناتی ہیں۔ یہاں چونکہ شعاعیں لامتناہی فاصلے سے (متوازی ہونے کی وجہ سے) آرہی ہیں۔

$$لہذا\ ل_۱ = \frac{ص}{۲} + \frac{ص}{ن - ۱}$$

$$یعنی\ ص = \frac{۲ (ن - ۱)}{(ن + ۱)} . ل_۱ ....................(۲۷)$$

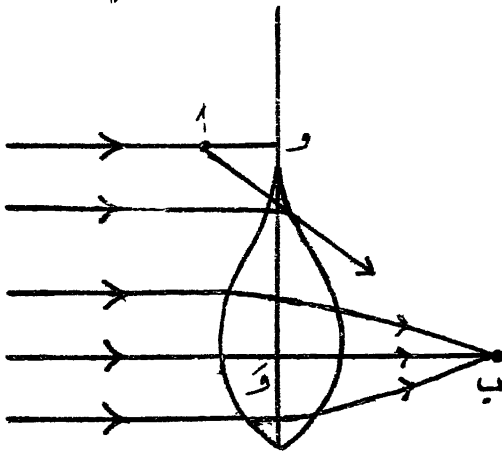
جہاں $ل_۱$ = منعطف اور منعکس خیالوں کے متناظر خوردبین کے کسر پیما والے مشاہدات میں فرق

اسلئے مساوات (۲۵) اور (۲۷) سے :—

$$س = ج\, ث\, ل \left\{ \frac{ن - ۱}{ن + ۱} \right\} ل_۱ \quad \text{.................... (۲۸)}$$

اس صورت میں خوردبین میں مائع کی ہلالی سطح کو ماسکہ پر لانے کی ضرورت باقی نہیں رہتی اور ضابطہ بھی پہلے سے زیادہ آسان ہے۔

کچھ دنوں بعد اینڈرسن اور بوئن نے ایک دوسرا طریقہ ان مائعات کے سطحی تناؤ کو معلوم کرنے کا دریافت کیا جو شیشہ کے ساتھ صفر زاویۂ تماس بناتے ہیں۔

اگر پتلے شیشہ کا ایک صاف مستطیلی شکل کا ٹکڑا لیکر کسی مائع میں ڈبویا جائے اور انتصابی مستوی میں اس طرح رکھا جائے کہ اس کے دو کنارے افقی رہیں، تو اس کے ساتھ ایک لمبا اسطوانہ نما مائع کا قطرہ چمٹ جائیگا۔ اس کے تراش عمودی کی شکل، شکل ۳۲ میں دکھائی گئی ہے۔

شکل ۳۲

قطرہ دو اسطوانہ نما عدسے بناتا ہے جن میں سے ایک محدب (ق مرکز) اور دوسرا مقعر (و مرکز) ہوتا ہے۔ عملاً مقعر عدسے کا صرف نچلا نصف حصہ موجود ہوتا ہے۔ اگر ایک توازی گر ایسا لیا جائے کہ اس کا محور بھی افقی اور جھری بھی افقی ہو اور قطرہ کے بائیں طرف اس کو رکھا جائے تو شیشہ کی تختی پر متوازی شعاعیں عموداً اس سمت میں واقع ہوں گی جیسا کہ پیکان کے نشانوں سے شکل ۳۲

میں دکھلایا گیا ہے مقعر عدسہ، چھری کا ایک مجازی خیال ا پر بنائے گا جس کے مقام کو ایک خوردبین کے افقی صلیبی تار سے جو قطرہ کے داہنی جانب رکھا ہوا ہو، منطبق کیا جا سکتا ہے۔ اگر خوردبین کو اب فاصلہ و ا پیچھے ہٹایا جائے، تو شیشہ کی تختی کو اس کے ماسکہ پر لایا جا سکتا ہے۔ علیٰ ہذا محدب عدسہ کی صورت میں چھری کا ایک حقیقی خیال ب پر بنتا ہے جس کا مقام بھی متعین کیا جا سکتا ہے۔

فرض کرو کہ $\text{ف}_1 = \text{و ا}$ $\quad \text{ف}_2 = \text{وَ ب}$

ل = و ا اور وَ ب کے درمیان عمودی فاصلہ

$\text{ص}_1$ = مقعر عدسے کے ہر رُخ کا نصف قطر انحنا یہ فرض کرتے ہوئے کہ انحنا ایک ہی ہے۔

$\text{ص}_2$ = محدب عدسہ کے ہر رُخ کا نصف قطر انحنا

$\text{د}_1$ = و پر مائع کا اندرونی دباؤ

اور $\text{د}_2$ = وَ 〃 〃 〃

چونکہ شعاعیں متوازی آرہی ہیں اور عدسوں کو بالکل پتلے فرض کیا جاتا ہے اس لئے

$$\frac{1}{\text{ف}_1} = (\text{ن} - 1)\frac{2}{\text{ص}_1} \quad \text{اور} \quad \frac{1}{\text{ف}_2} = (\text{ن} - 1)\frac{2}{\text{ص}_2}$$

اگر $\Pi$ کرہ ہوائی کا دباؤ ہو تو

$$\text{د}_2 - \Pi = \frac{\text{س}}{\text{ص}_2} \quad \text{اور} \quad \Pi - \text{د}_1 = \frac{\text{س}}{\text{ص}_1}$$

$$\therefore \text{د}_2 - \text{د}_1 = \text{س}\left(\frac{1}{\text{ص}_1} + \frac{1}{\text{ص}_2}\right)$$

$$= \frac{\text{س}}{2(\text{ن} - 1)}\left(\frac{1}{\text{ف}_1} + \frac{1}{\text{ف}_2}\right)$$

لیکن ج ثہ ل = د۱ – د۲

$$\therefore \text{س} = \frac{(\text{ن}-1)^{2}\,\text{ج ثہ ل}}{\left(\frac{1}{\text{ف}_1}+\frac{1}{\text{ف}_2}\right)} \quad \ldots\ldots (۲۹)$$

اگر شیشہ کی تختی کا صرف ایک ہی رُخ بھیگا ہوا ہو تو

$$\text{س} = \frac{(\text{ن}-1)\,\text{ج ثہ ل}}{\left(\frac{1}{\text{ف}_1}+\frac{1}{\text{ف}_2}\right)} \quad \ldots\ldots (۳۰)$$

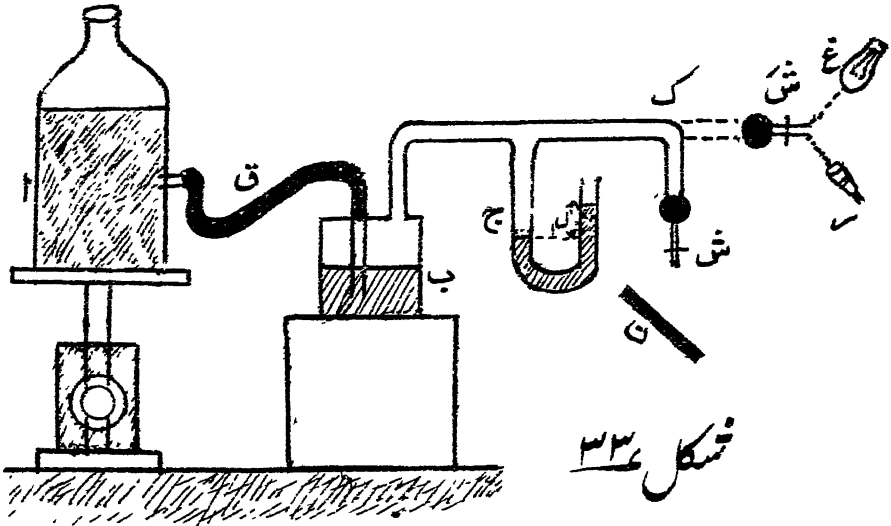
یہ طریقہ، تبخیر کی وجہ سے قطرہ کی شکل میں تغیرات ہونے سے، زیادہ صحیح نہیں ہے خصوصاً طیران پزیر مائعات کے لئے اس سے صحیح نتائج نہیں حاصل ہوتے اس لئے بہتر یہ ہے کہ مشاہدات بہت ہی تیزی کے ساتھ لئے جائیں۔

زیادہ لزج مائعات کے لئے بھی نتائج صحیح نہیں حاصل ہوتے چونکہ اس صورت میں قطرے زیادہ موٹے ہوتے ہیں اور پتلے عدسوں کا یہ ضابطہ ان پر صادق نہیں آتا۔

## (۱۰) اے فرگوسن کے طریقہ سے سطحی تناؤ کی دریافت[۱۴] :۔

اس طریقہ میں مائع کی بہت کم مقدار کی ضرورت ہوتی ہے یعنی تقریباً ایک مکعب ملی میٹر مائع بالکل کافی ہوجاتا ہے۔ آلات کی ترتیب بہت ہی سادہ ہوتی ہے جو شکل ع۳۳ میں دکھائی گئی ہے۔ ۲ ایک شیشہ کی بوتل ہے جس میں پانی رکھا جاتا ہے۔ ق ایک ربر کی نلی ہے جو ایک برتن ب سے ملی ہوئی ہے۔ ۲ کو اونچا یا نیچا کرنے سے ب میں دباؤ بڑھایا یا گھٹایا جاسکتا ہے۔ ج ایک ل نما نلی کی شکل کا داب پیما ہے۔ ش ایک شعری نلی ہے جو انتصاباً رکھی ہوئی ہوتی ہے اور اس میں مائع کی ایک ڈوری لی جاتی ہے جس کا کہ سطحی تناؤ مطلوب ہوتا ہے۔ س ایک مستوی آئینہ ہے جو شعری نلی کے نچلے سِرے

کے قریب ۴۵° درجہ کا زاویہ بناتے ہوئے اس طرح رکھا جاتا ہے کہ شعری نلی کو
آئینہ میں دیکھا جائے تو وہ افقی نظر آتی ہے (نوٹ۔ سردست، شکل کی داہنی

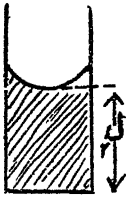
شکل ۳۲

جانب جو نقطہ دار خطوط دکھائے گئے ہیں ان پر کوئی غور نہ کیا جائے)۔ تجربہ میں
بوتل ا کو اتنا اونچا رکھا جاتا ہے کہ مائع کی ڈوری شعری نلی میں نیچے ہٹائی
جاکر اس کے کھلے سرے پر ہلالی سطح کا انحنا ٹھیک طور پر مستوی ہو جائے۔
ہلالی سطح کے مستوی ہونے کو جانچنے کے لئے ایک محدب عدسہ کے ذریعہ دس
وولٹ کے ایک چھوٹے برقی لیمپ کے ریشہ کے خیال کو، ہلالی سطح میں دیکھا
جاتا ہے۔ لیمپ کو ترچھی وضع میں نلی کے نیچے کسی مناسب فاصلہ پر اس طرح
رکھا جاتا ہے کہ اس کے ریشوں کا خیال آئینہ ن میں نظر آنے لگے۔ جب
ہلالی سطح مستوی ہوتی ہے تو ریشوں کا خیال جڑا ہو کر نور کا ایک چھوٹا سا
بقعہ بن جاتا ہے لیکن جب وہ محدب یا مقعر رہتی ہے تو ریشے واضح طور
پر نظر آتے ہیں، یہ ایک بہت حساس طریقہ ہے اور دباؤ کے ان مشاہدات سے
جو ہلالی سطح کو مستوی کرنے کے لئے درکار ہوتے ہیں، مائع کے سطحی تناؤ کی

قیمت معلوم ہو جاتی ہے۔

فرض کرو کہ شکل ۳۴ کے مطابق، مائع کا ایک چھوٹا طول $ل_{۲}$ ایک ایسی شعری نلی میں رکھا ہوا ہے جسکا نصف قطر $ص_{۱}$ ہے۔

اوپر بیان ہو چکا ہے کہ کرہ ہوائی کا دباؤ اگر $\Pi$ ہو تو دباؤ جو مائع کی ہلالی سطح کے عین نیچے واقع ہوتا ہے حسب ذیل ہے:—

$$د_{ا} = \Pi - ج\, ثہ_{۲}\, ل_{۲}$$

جہاں $ثہ_{۲}$ = مائع کی کثافت

شکل ۳۴

اگر مائع کی ہلالی سطح کے ٹھیک اوپر دباؤ $د_{ب}$ ہو تو ہلالی سطح کے دونوں جانب فرق دباؤ لاپلاس کی مساوات سے حسب ذیل ہوگا:—

$$د_{ب} - د_{ا} = \frac{۲س}{ص}$$

جہاں ص = ہلالی سطح کا نصف قطر انحنا

لیکن ہم کو یہ معلوم ہے کہ $د_{ب} = \Pi + ج\, ثہ_{۱}\, ل_{۱}$

جہاں $ثہ_{۱}$ = داب پیما کے مائع کی کثافت۔

اور $ل_{۱}$ = جب ہلالی سطح مستوی ہوتی ہے تو داب پیما میں مائع کی بلندی

$$\therefore (\Pi + ج\, ثہ_{۱}\, ل_{۱}) - (\Pi - ج\, ثہ_{۲}\, ل_{۲}) = \frac{۲س}{ص}$$

$$\text{یعنی}\quad س = \frac{ج\,ص}{۲}\left\{ثہ_{۱}\, ل_{۱} + ثہ_{۲}\, ل_{۲}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (۳۱)$$

ایسے مائع کے لئے جسکا زاویہ تماس صفر ہوتا ہے مساوات (۷۴) میں یہ ثابت کیا جائے گا کہ $ص = ص_{۱}\left(۱ + \frac{ص_{۱}^{۲}}{۶\, ا^{۲}}\right)$ جہاں $ا^{۲} = \frac{س}{ج\, ثہ_{۲}}$

ہم اگر ص کی قیمت مساوات (۳۱) میں لکھیں تو

$$س = \frac{ج\, ص_{۱}}{۲}\left\{ثہ_{۱}\, ل_{۱} + ثہ_{۲}\, ل_{۲}\right\} + \frac{ج\, ثہ_{۲}\, ص_{۱}^{۲}}{۶} \quad \ldots\ldots (۳۲)$$

اس مساوات سے ہم آسانی کے ساتھ دئے ہوئے مائع کے لئے س کی قیمت دریافت کر سکتے ہیں بشرطیکہ ہمیں مائع کی کثافت ث۲ معلوم ہو۔ لیکن چونکہ مائع کی مقدار بہت تھوڑی سی ہے ث۲ کی قیمت علیحدہ دریافت کرنا بیحد دشوار ہوتا ہے اس کے لئے دو راستے اختیار کئے جا سکتے ہیں۔ یا تو ڈوری ل۲ کا طول کم کرنا ہوگا حتیٰ کہ ث۲ ل۲ کی قیمت مساوات (۳۱) میں ث۱ ل۱ کے مقابلہ میں نظر انداز کرنے کے قابل ہو جائے یا ل۲ کو بدل بدل کر متعدد مشاہدات لینے ہوں گے۔

مساوات (۳۲) کو اس طرح لکھ سکتے ہیں:۔

$$\text{۲س} = \text{ج ص}_{۱}\left\{\text{ث}_{۱}\text{ل}_{۱} + \text{ث}_{۲}\text{ل}_{۲} + \frac{\text{ث}_{۲}\text{ص}_{۱}}{۳}\right\} \quad \cdots\cdots (۳۳)$$

$$\text{یعنی ل}_{۱} = -\frac{\text{ث}_{۲}}{\text{ث}_{۱}}\left(\text{ل}_{۲} + \frac{\text{ص}_{۱}}{۳}\right) + \frac{\text{۲س}}{\text{ج ص}_{۱}\text{ث}_{۱}} \quad \cdots\cdots (۳۴)$$

ہم اگر ل۱ کی (ل۲ + ص۱/۳) کے مقابلہ میں ترسیم کریں تو س کی قیمت بغیر ث۲ کی قیمت معلوم کرنے کے منحنی سے آسانی کے ساتھ حاصل ہو جا سکتی ہے۔ اس کے بعد فرگوسن اور کنیڈی نے ایک نیا طریقہ اختیار کیا جو اس سے بہت آسان ہے اور نیز اس میں ث۲ نظر انداز بھی کیا جا سکتا ہے[15]:۔

پھر شکل ۳۳ پر غور کرو۔ اب ک مث کو چھوڑ دو اور شکل میں ک ش کو شامل کر لو۔ مث کو ہی اگلی شعری نلی ہے جس میں مائع کی ایک چھوٹی سی ڈوری افقی حالت میں رکھی ہوئی ہے۔ م ایک خوردبین ہے اور غ ایک چھوٹے ۱۰ وولٹ کی برقی لمپ کا ریشہ یا سوت ہے۔

ابتدا میں مائع کی ہلالی سطح مقعر رہتی ہے اور جیسا اوپر بیان ہو چکا ہے دباؤ کے اضافہ سے یہ مستوی ہونے لگتی ہے اور پھر محدب۔ پہلے کی طرح دباؤ کو اس طرح ترتیب دو کہ ہلالی سطح مستوی ہو جائے۔ اس تجربہ میں شعری نلی کا نصف قطر بالکل چھوٹا ہونا چاہیئے ورنہ جاذبہ ارض کی وجہ سے ہلالی سطح کی

شکل میں تبدیلی ہو جائے گی۔

مساوات (۳۳) سے انتصابی شعری نلی کی صورت میں ہم دیکھ چکے ہیں کہ

$$\frac{۲\,\text{س}}{\text{ج}\,\text{ص}_۱} = \text{ثہ}\,\text{ل}_۱ + \text{ثہ}_۲\left(\text{ل}_۲ + \frac{\text{ص}_۱}{۳}\right)$$

اب افقی شعری نلی کیصورت میں یہ فرض کرتے ہوئے کہ اس کا نصف قطر بہت چھوٹا ہے اور سطحی تناؤ کی قوت کے مقابلہ میں جاذبۂ ارض کی قوتوں کو نظرانداز کیا جا سکتا ہے :—

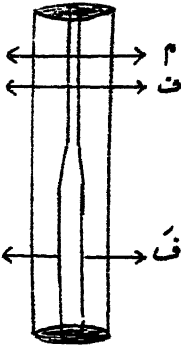
$$\frac{۲\,\text{س}}{\text{ج}\,\text{ص}_۱} = \text{ثہ}\,\text{ل}_۱ \quad\text{.........................}\quad (۳۵)$$

عملاً تجربہ کے اغراض کے لئے یہ سادہ ضابطہ بیحد مفید ہوتا ہے۔ اس میں مائع کی کثافت ثہ کے معلوم ہونے کی کوئی ضرورت نہیں ہے۔

اس طریقہ سے مختلف مائعات کے سطحی تناؤ کی قیمتیں دریافت کی گئی ہیں جن میں سے چند حسب ذیل ہیں :—

| مائع | تپش درجہ مئی | سطحی تناؤ ڈائین فی سمر |
|---|---|---|
| ایتھر | ۱۶٫۰ | ۱۷٫۱۴ |
| کاربن ٹیٹرا کلورائیڈ | ۱۶٫۵ | ۲۶٫۰۵ |
| بنزین | ۱۵٫۰ | ۲۹٫۱۴ |
| کلوروفارم | ۱۵٫۰ | ۲۷٫۵۰ |
| ٹولوئین | ۱۴٫۰ | ۲۸٫۸۴ |
| ایتھل برومائیڈ | ۱۷٫۰ | ۲۴٫۵۲ |

## (۱۱) سی سٹن کے طریقہ سے سطحی تناؤ کی دریافت :— (۱۶)

اس طریقہ میں بھی مائع زیرِ تجربہ کا حجم بہت چھوٹا ہوتا ہے اور نیز مائع کی کثافت کے جاننے کی بھی ضرورت باقی نہیں رہتی۔ شکل ۳۵ میں دو شعری نلیاں جن کے قطر مختلف ہوتے ہیں گرم کرکے ایک دوسرے کے ساتھ جوڑ دئے گئے ہیں۔ ان میں اتنا مائع داخل کیا جاتا ہے کہ جوڑ میں پہنچنے کے علاوہ نلی کے یکساں حصوں تک پھیل جائے۔ اس صورت میں مائع میں تقاضا یہ ہوتا ہے کہ چھوٹے قطر کی نلی میں چلا جائے۔ اگر چھوٹی قطر کی نلی کو اوپر کی جانب رکھا جائے تو مائع کے استوانہ کا وزن اس تقاضے کو تعادل میں رکھتا ہے۔

شکل ۳۵

تعادل کے لئے

$$\frac{س}{۲\pi ص_1} - \frac{س}{۲\pi ص_2} = ثہ\,ج\,ل \qquad (۳۶)$$

جہاں $ص_1$ اور $ص_2$ دونوں شعری نلیوں کے نصف قطر ہیں۔ ثہ مائع کی کثافت اور ل مائع کی بلندی ہے۔ اس مساوات سے س کی قیمت دریافت کی جاسکتی ہے۔ مائع کا اگر زاویہ تماس طہ ہو تو اوپر کی مساوات میں س کے بجائے س جم طہ لکھنا ہوگا۔

لیکن اس صورت میں طہ کی قیمت صفر فرض کرلی گئی ہے۔

فرض کرو کہ نلی کا سرا کسی گیس کے خزانہ سے جوڑا جاتا ہے جس میں فرگوسن کے طریقہ کی طرح ایک داب پیما بھی شامل ہے۔

دباؤ کو اب اس طرح ترتیب دو کہ مائع کی ہلالی سطح چھوٹی قطر کی نلی میں نشان ف تک پہنچ جائے۔ اس صورت میں تعادل کے لئے :—

$$\frac{س}{۲\pi ص_1} - \frac{س}{۲\pi ص_2} - ثہ\,ج\,ل_1 = د_1 \qquad (۳۷)$$

جہاں $ل_۱$ = مائع کے استوانہ کی بلندی
اور $د_۱$ = داب پیما کا دباؤ

اب نلی کو الٹ دو تا کہ چھوٹی قطر کی نلی نیچے آجائے۔ ایسی حالت میں سطحی تناؤ کی قوت اور مائع کے استوانہ کا وزن، دونوں ملکر مائع کو نیچے ڈھکیلنے کی کوشش کرتے ہیں۔ دباؤ کو اتنا رکھو کہ مائع پھر نشان ف تک پہنچ کر قائم رہے۔
تعادل کے لئے :۔

$$\left(\frac{س}{۲\pi ص_۱} - \frac{س}{۲\pi ص_۲}\right) + ث\, ج\, ل_۱ = د_۲ \quad ......(۳۸)$$

جہاں $د_۲$ = داب پیما کا دباؤ

اب فرض کرو کہ $\left(\frac{۱}{۲\pi ص_۱} - \frac{۱}{۲\pi ص_۲}\right) = \frac{۱}{گ}$ = کوئی مستقل

مساوات (۳۷) اور (۳۸) سے $\frac{۲س}{گ} = د_۱ + د_۲$

$$\therefore س = \frac{گ}{۲}\left(د_۱ + د_۲\right) \quad ..................(۳۹)$$

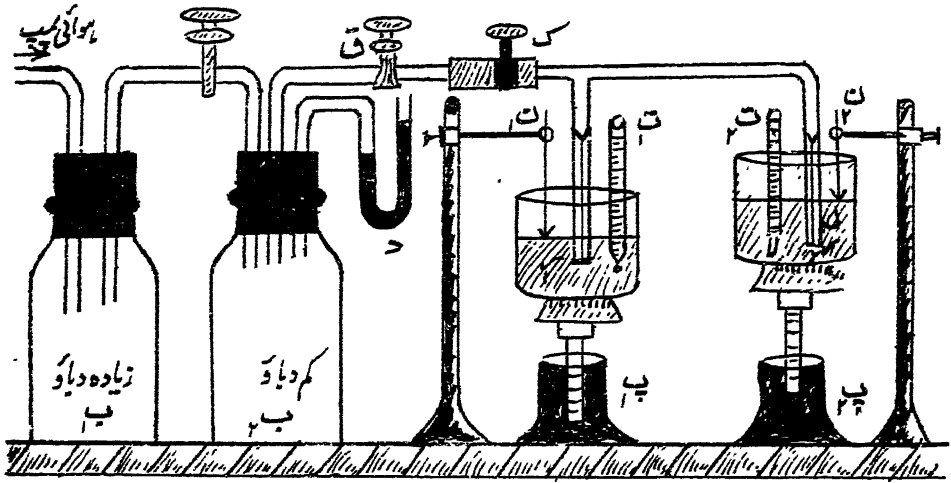
اور نیز $ث = \frac{د_۲ - د_۱}{۲ ج ل_۱}$ ..................(۴۰)

لہٰذا اس طریقہ سے نہ صرف ایک بالکل کم مقدار مائع کا سطحی تناؤ دریافت کیا جا سکتا ہے بلکہ اس کی کثافت بھی علیحدہ طور پر معلوم کی جا سکتی ہے۔ یہ طریقہ دو مختلف مائعات کے سطحی تناؤ کے مقابلہ کے لئے بھی بہت کارآمد ہوتا ہے۔ اسکے لئے حسب ذیل ضابطہ مساوات (۳۹) کی مدد سے حاصل ہوتا ہے :۔

$$\frac{س}{سَ} = \frac{د_۱ + د_۲}{دَ_۱ + دَ_۲} \quad ..........(۴۱)$$

سطحی تناؤ کا میزان (۱۷) :۔ یہاں جس طریقہ سے بحث کی جائے گی وہ خاص

طور پر سطحی تناؤ کی تپشی قدر کی دریافت کے لئے مرتب کیا گیا ہے۔
اور نیز مختلف نمکوں کے محلولوں اور آمیزوں کا بھی سطحی تناؤ خواہ وہ کسی ارتکاز کے ہوں

شکل ع۳۶

اس کی مدد سے دریافت کیا جا سکتا ہے۔ تمام ضروری پیمائشیں مستقل تپش پر کسی معیاری مائع (مثلاً خالص پانی) کے سطحی تناؤ کی رقوم میں ظاہر کی گئی ہیں۔
شکل ع۳۶ میں پ$_1$ اور پ$_2$ دو چھوٹی تپائیوں پر دو منقرے رکھے ہوئے ہیں جن میں مائعات ڈالے جاتے ہیں۔ ن$_1$ اور ن$_2$ ایک ہی تراش عمودی کی دو شعری نلیاں ہیں جو مائعوں میں ڈوبی رہتی ہیں اور ان کی گہرائیوں کو چھوٹے گھمائی کے پیچ سے جو پ$_1$ اور پ$_2$ میں ہوتے ہیں حسب ضرورت بدلا جا سکتا ہے۔ ت$_1$ اور ت$_2$ دو تپش پیما ہیں جو دونوں منقروں میں کے مائعات کی تپش بتلاتے ہیں۔ ک ایک چٹکی اور ق ایک ٹونٹی ہے۔ د ایک ل نما داب پیما ہے۔ شعری نلیاں ایک دوسرے کے ساتھ ملی ہوئی

ہوتی ہیں۔ دو بوتلیں $ب_1$ اور $ب_2$ بھی ان شعری نلیوں سے ملے ہوتے ہیں اور
ان بوتلوں میں ہوا کا دباؤ بدلا جا سکتا ہے۔ بوتل $ب_2$ کے ذریعہ جس میں دباؤ
کرہ ہوائی کے دباؤ سے کسی قدر زیادہ ہوتا ہے ہوا کے بلبلے، شعری نلیوں کے
نچلے سروں کے پاس بنائے جا سکتے ہیں۔

یہ پورا انتظام بے حد حساس ہے۔ دونوں شعری نلیوں کی (مائع کے اندر)
گہرائیاں ابتدا میں $پ_1$ اور $پ_2$ پیچوں کی مدد سے اس طرح ترتیب دی
جاتی ہیں کہ ہوا کے بلبلے دونوں شعری نلیوں سے ایک ہی وقت میں ساتھ ساتھ
پیدا ہوتے ہیں۔ بلبلوں کی حساس ترتیب کے لئے چٹکی ک کا استعمال
(دباؤ میں کسی قدر تبدیلی کرنے کے لئے) کیا جاتا ہے۔ ارتفاع پیما کے
ذریعہ شعری نلیوں کے ڈوبے ہوئے حصوں کی گہرائی دریافت کر لی جاتی ہے۔

اگر بلبلا کر دی ہو تو، تعادل کے لئے:-

$$د = \frac{2س}{ص} = د_ا - د_ب$$

جہاں ص = بلبلے کا نصف قطر انحنا

$د_ا$ = بلبلے کا اندرونی دباؤ

$د_ب$ = بلبلے کا بیرونی دباؤ = $\Pi + ج\, ث\, ل_1$

ث = اس مائع کی کثافت جس میں شعری نلی، $ل_1$ گہرائی تک ڈوبی ہوئی
ہوتی ہے۔

اور $\Pi$ = کرہ ہوائی کا دباؤ

$$\therefore \frac{2س}{ص} = د_ا - (\Pi + ج\, ث\, ل_1) \quad \text{........ (۴۲)}$$

اگر اسی شعری نلی میں مائع کے چڑھاؤ کی بلندی ل ہو تو ہم جانتے ہیں کہ

$$س = \frac{ص_1\, ج\, ث\, (\frac{ص_1}{3} + ل)}{2}$$ جہاں $ص_1$ = شعری نلی کا نصف قطر

اب فرض کرو کہ $\frac{\text{س}}{\text{ج ثہ}_{۱}} = \text{ا}^{۲}$

اِس $\text{ا}^{۲}$ کو نوعی اتصال سے تعبیر کیا جاتا ہے۔

اس صورت میں :-

$$۲\,\text{ا}^{۲} = \text{ص}_{۱}\,\text{ل}\left(۱ + \frac{\text{ص}_{۱}}{۳\,\text{ل}}\right) \quad \ldots\ldots (۴۳)$$

لاپلاس کی مساوات سے راس پر :-

$$\frac{۲\,\text{س}}{\text{ص}} = \text{ج ثہ ل} \quad \text{یعنی } ۲\,\text{ا}^{۲} = \text{ص ل} \quad \ldots\ldots (۴۴)$$

مساوات (۴۳) اور (۴۴) سے :-

$$\text{ص} = \text{ص}_{۱}\left(۱ + \frac{\text{ص}_{۱}}{۳\,\text{ل}}\right) \quad \ldots\ldots (۴۵)$$

مساوات (۴۳) سے اگر پہلی تقریبی قیمت لی جائے تو

$$\text{ل} = \frac{۲\,\text{ا}^{۲}}{\text{ص}_{۱}} \quad \ldots\ldots (۴۶)$$

مساوات (۴۶) والی ل کی قیمت کو مساوات (۴۵) میں لکھنے سے :-

$$\text{ص} = \text{ص}_{۱}\left(۱ + \frac{\text{ص}_{۱}^{۲}}{۶\,\text{ا}^{۲}}\right) \quad \ldots\ldots (۴۷)$$

لہذا مساوات (۴۲) کو ہم اِس طرح لکھ سکتے ہیں :-

$$\frac{۲\,\text{س}}{\text{ص}_{۱}\left(۱ + \frac{\text{ص}_{۱}^{۲}}{۶\,\text{ا}^{۲}}\right)} = (\text{دِ} - \pi) - \text{ج ثہ ل}_{۱}$$

اس کو پھیلا کر $\frac{\text{ص}_{۱}^{۲}}{\text{ا}^{۲}}$ کی اونچی طاقت والی رقموں کو نظر انداز کرنے سے :-

$$\frac{۲\,\text{س}}{\text{ص}_{۱}}\left(۱ - \frac{\text{ص}_{۱}^{۲}}{۶\,\text{ا}^{۲}}\right) = (\text{دِ} - \pi) - \text{ج ثہ ل}_{۱}$$

$$\text{یعنی } \frac{۲\,\text{س}}{\text{ص}_{۱}} - \frac{\text{ص}_{۱}\,\text{ج ثہ}_{۱}}{۳} = \text{لا} - \text{ج ثہ ل}_{۱}$$

جہاں لا = بلبلے کے اندر کرہ ہوائی کے دباؤ سے جتنا دباؤ زیادہ ہو

$$= (\text{دِ} - \pi)$$

$$\therefore \text{س} = \frac{\text{ص}_1}{2}\left(\text{لا} - \text{ج ثہ}_1 \text{ل}_1\right) + \frac{\text{ص}_1^2 \text{ ج ثہ}_1}{6} \quad \ldots\ldots (۴۸)$$

یہ مساوات، دونوں شعری نلیوں پر جن کے تراش مساوی ہیں صادق آتی ہے۔
فرض کرو کہ $\text{س}_2$ سطحی تناؤ $\text{ثہ}_2$ کثافت اور $\text{ل}_2$ زیر امتحان مائع کے اندر ڈوبی ہوئی شعری نلی کی گہرائی ہے۔

$$\text{تب } \text{س}_2 = \frac{\text{ص}_1}{2}\left(\text{لا} - \text{ج ثہ}_2 \text{ل}_2\right) + \frac{\text{ص}_1^2 \text{ ج ثہ}_2}{6} \quad \ldots\ldots (۴۹)$$

اگر مساوات (۴۸) معیاری مائع کی تعبیر کرتا ہو جسکا سطحی تناؤ $\text{س}_1$ ہو تو مساوات (۴۸) اور (۴۹) سے:—

$$\text{س}_1 - \text{س}_2 = \frac{\text{ج ص}_1}{2}\left(\text{ثہ}_2 \text{ل}_2 - \text{ثہ}_1 \text{ل}_1\right) + \frac{\text{ج ص}_1^2}{6}\left(\text{ثہ}_1 - \text{ثہ}_2\right) \quad \ldots\ldots (۵۰)$$

یہ مساوات اوپر کے عملی انتظام پر صادق آتی ہے۔

اس میزان کو بعض مائعات کی مثلاً بنزین، ایتھر وغیرہ کی "تپش فاصل" (وہ تپش جس پر سطحی تناؤ غائب ہو جاتا ہے) کی دریافت میں استعمال کیا جاتا ہے اور نیز مختلف ارتکاز کے محلولوں میں سطحی تناؤ کے تغیرات بھی اس سے معلوم کیے جا سکتے ہیں۔

اوپر جو نظریہ بیان کیا گیا ہے اس میں یہ فرض کیا گیا ہے کہ دونوں شعری نلیاں بالکل ناپ وغیرہ میں ایک دوسرے کے مماثل ہیں۔ یہ ظاہر ہے کہ ایسی نلیاں ایک بڑی لمبی نلی کو دو ٹکڑوں میں تقسیم کرنے سے حاصل کی جا سکتی ہیں۔ اس کی جانچ یوں کی جا سکتی ہے کہ دونوں متفرقوں میں ایک ہی مائع استعمال کر کے تجربہ کیا جائے تاکہ $\text{ل}_1$ اور $\text{ل}_2$ بلبلوں کی ترتیب کے بعد مساوی ہو جائیں۔
اس تجربہ میں یہ بے حد ضروری ہے کہ شعری نلیوں کو معمولی طریقوں سے نہایت احتیاط کے ساتھ پاک کر لیا جائے اور معیاری مائع کو مستقل تپش پر رکھا جائے۔

اس طریقہ کو ڈاکٹر وارن نے پیش کیا تھا۔ نمک کے محلولوں کا سطحی تناؤ عموماً خالص پانی سے زیادہ ہوتا ہے۔ اگر کسی محلول کا سطحی تناؤ س جبکہ اس کے محلول کے ایک لیٹر میں ن گرام سالمات نمک موجود ہوں س ہے تو

$$س_{ن} = س_{پ} + گ\ ن \quad ......................(۵۱)$$

جہاں $س_{پ}$ = خالص پانی کا سطحی تناؤ اسی تپش پر

اور گ = ہر ایک خاص نمک کے لئے ایک مستقل۔ اس کی قیمت ذیل کی جدول میں دی گئی ہے :-

| نمک کا نام | | گ |
|---|---|---|
| سوڈیم کلورائڈ | NaCl | ۱٫۵۳ |
| پوٹاسیم کلورائڈ | KCl | ۱٫۷۱ |
| ½ سوڈیم کاربونیٹ | $\frac{1}{2}(Na_2CO_3)$ | ۲٫۰۰ |
| ½ پوٹاسیم کاربونیٹ | $\frac{1}{2}(K_2CO_3)$ | ۱٫۷۷ |
| ¼ زنک سلفیٹ | $\frac{1}{4}(ZnSO_4)$ | ۱٫۸۶ |

**مائعات کے سطحی تناؤ پر تپش کا اثر :-** تپش بڑھتی ہے تو تمام مائعات کا سطحی تناؤ گھٹنے لگتا ہے اور ایک خاص تپش پر صفر ہو جاتا ہے۔ اس تپش کو "تپش فاصل" سے موسوم کیا جاتا ہے۔

پانی کا ایک اتھلا پرت چپٹے پیندے کے برتن میں لو اور اس کی سطح پر تھوڑا سا کوئلے کا سفوف چھڑک دو۔ اس کی سطح کے کسی مقام کو اس کے قریب گرم دھات کا کوئی ٹکڑا لا کر گرم کرو۔ اس مقام کا پانی گرم ہوگا اور اس کا سطحی تناؤ کم ہونے لگے گا۔ اطراف کے ٹھنڈے پانی کی سطح سکڑنے لگتی ہے جس کی وجہ سے کوئلے کا سفوف برتن کے کناروں کی طرف حرکت کرنے لگتا ہے۔ بجائے گرم

دھات کے محدب عدسہ میں سے سورج کی شعاعوں کو پانی کی سطح کے کسی نقطہ پر مستدق کیا جائے تو اس نقطہ کے پاس پانی گرم ہو جائے گا۔

بعض مائعات کا سطحی تناؤ $س_ت$ ت° م تپش پر حسب ذیل ضابطہ سے ظاہر کیا جاتا ہے :—

$$س_ت = س_{صفر} (۱ - گہ ت) \quad ........ (۵۲)$$

جہاں $س_{صفر}$ = صفر درجہ مئی پر سطحی تناؤ

اور گہ = سطحی تناؤ کی تپشی قدر

ذیل کی جدول میں چند مائعات کے لئے گہ کی قیمتیں دی گئی ہیں :—

| مائع | $س_{صفر}$ | گہ |
|---|---|---|
| ایتھر ($C_4H_{10}O$) | ۱۹٫۳ | ۰٫۱۱۵ |
| الکوہل ($C_2H_6O$) | ۲۵٫۳ | ۰٫۰۸۷ |
| بنزین ($C_6H_6$) | ۳۰٫۶ | ۰٫۱۳۲ |
| پانی ($H_2O$) | ۷۵٫۸ | ۰٫۱۵۲ |
| پارہ ($Hg$) | ۵۲۷٫۲ | ۰٫۳۷۹ |

ایتواس نے متعدد مائعات کے لئے س، $ح^{\frac{۲}{۳}}$ کے حاصل ضرب کی قیمت دریافت کی ہے جہاں ح = سالمی حجم = $\frac{سالمی وزن}{کثافت}$

اس نے دریافت کیا کہ اس حاصل ضرب کی تبدیلی کی شرح بلحاظ تپش (تمام مائعات کے لئے جن پر اس نے تجربہ کیا) مستقل رہتی ہے اور اس مستقل کی قیمت ۱٫۲ ہے۔ پانی کی صورت میں ایتواس کا قاعدہ صادق نہیں آتا۔ اس واسطے کہ ۱۰۰° م اور ۲۰۰° م کے درمیان، اس قاعدے کا صرف اسی وقت

اطلاق ہوتا ہے جبکہ پانی کے سالمی وزن کو ہم بجائے ۱۸ کے ۲ × ۱۸ لیں۔

اس سے ہمیں یہ ماننا ہوگا کہ ۱۰۰° مئی سے زائد تپش پر پانی کی ترکیب ($2H_2O$) ہوتی ہے اور اس تپش سے نیچے ($nH_2O$) جہاں ($n$) کوئی عدد ہے جس کی قیمت ۲ سے زیادہ ہے۔

ایتواس[19] کے قاعدے سے :-

س ح^(۲/۳) = ۲٫۱ (تہ - ت) ........................ (۵۳)

جہاں تہ = کوئی مستقل تپش

ت = مائع کی تپش مئی درجوں میں

اگر ت = تہ تو س = صفر

لہذا تہ کی یہ قیمت مائع کی تپش فاصل ہوگی۔

| مائع | تہ کی قیمت تجربہ سے | فانڈروال کی تپش فاصل کی قیمتیں |
|---|---|---|
| ایتھر | ۱۸۰° م | ۱۹۰° م |
| الکوہل | ۲۹۵° م | ۲۵۶° م |
| پانی | ۵۶۰° م | ۳۹۰° م |

## کسی مائع کی جھلی کے پھیلنے سے تپش میں تغیرات :-

چونکہ کسی مائع کا سطحی تناؤ تپش کے ساتھ ساتھ بدلتا ہے لہذا حرناگزار حالات کے تحت اگر جھلی کے رقبہ میں کوئی تبدیلی ہو تو یہ ضروری ہے کہ اس کے ساتھ تپش بھی متبدل ہو جائے۔

حرارت کی وہ مقدار جو جذب یا خارج ہوتی ہے حرحرکی اصول کی مدد سے دریافت کی جا سکتی ہے :-

فرض کرو کہ کسی مائع کی ایک جھلی جس کی کمیت اکائی ہے مستقل مطلق

تپش ت پر رکھی جاتی ہے اور اسکا رقبہ ا ہے ۔ جب جھلی کا رقبہ ا سے
ا + فر ا تک ذرا سا کھینچ کر بڑھایا جائے تو جھلی پر کام کیا جائے گا اور اسکے
لئے باہر سے حرارت لینے کی ضرورت ہوتی ہے ۔ چونکہ تپش مستقل رکھی
جاتی ہے اس وجہ سے جھلی میں تبرید واقع ہوگی ۔

(سطح کے دونوں رخوں پر غور کرتے ہوئے) جھلی کے رقبہ کو "فر ا" بڑھانے
کے لئے کام = ۲ س فر ا

حرحرکیات کے پہلے کلیہ سے [پانچواں باب مساوات (۱)]

فرحہ = فر بہ + فر کا

= فر بہ − ۲ س فر ا ............ (۵۴)

چونکہ یہ عمل اُلٹایا جاسکتا ہے، حرحرکیات کے دوسرے کلیہ سے :-

فرحہ = ت فرفہ ............ (۵۵)

جہاں فرفہ = ناکارگی میں تبدیلی

ان دونوں مساواتوں سے :-

فر بہ = ت فرفہ + ۲ س فر ا

یعنی فر(بہ − ۲ س ا) = ت فرفہ − ۲ ا فر س

چونکہ یہ کامل تفرق ہے

$$\therefore \left(\frac{\text{فرفہ}}{\text{فرس}}\right)_{\text{ت}} = -۲\left(\frac{\text{فرا}}{\text{فرت}}\right)_{\text{س}} \quad\ldots\ldots (۵۶)$$

مساوات (۵۵) اور (۵۶) سے :-

$$\left(\text{فرحہ}\right)_{\text{ت}} = -۲\,\text{ت}\left(\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}}\right).\,\text{فرا}$$

اگر گہ سطحی تناؤ کی تپشی قدر ہو تو

$$\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}} = \text{گہ}$$

$\therefore$ (فرحہ)ت = –۲ ت گہ فر ۱ .................... (۵۷)

چونکہ تپش کے اضافہ سے تمام مائعات کا سطحی تناؤ کم ہوتا ہے اس لئے گہ منفی ہے، لہذا اوپر کی مساوات میں بائیں جانب کی رقم مثبت ہوگی، یعنی (فرحہ)ت مثبت ہے۔ لہذا جھلی کو حرارت پہنچانی ہوگی جبکہ کھینچکر بڑا کرنے کی صورت میں اس کی تپش کو مستقل رکھنا منظور ہو۔

اگر جھلی کے پھیلنے کی وجہ سے تپش میں کمی = فرت تو

(فرحہ)ت = فرت × ن × جو × ۱

جہاں ن = حرارت نوعی مائع کی

جو = حرارت کا معادل حیلی

$\therefore$ فرت = –۲ ت گہ فر ۱ / ن جو .................... (۵۸)

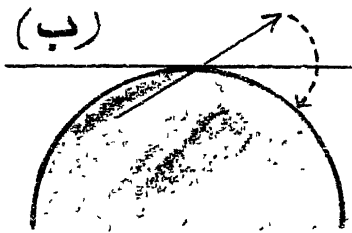
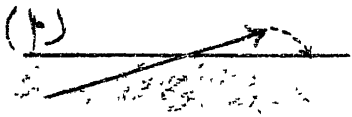
**کسی مائع کی منحنی سطح پر بخار کا دباؤ:**۔ نظریہ تحرک کی رو سے، کسی مائع کی تبخیر کا عمل، مائع کی سطح سے، اسکے سالمات کے بتدریج باہر نکل جانے کا دوسرا نام ہے، مائع کی سطح کے کسی دئے ہوئے رقبہ سے اکائی وقت میں سالمات کی جو تعداد نکلے گی وہ سطح کے انحنا پر منحصر ہوگی۔ اگر سطح مقعر ہو جیسے کہ شکل ۳۷ (ا) میں دکھائی گئی ہے تو ایک پیکان کی سمت میں، سطح میں سے گزرنے والا تیز رفتار سالمہ سالمی کشش کی حد کے باہر نکلنے میں کامیاب ہوتے ہوتے رہ جائے گا۔

لہذا اس قسم کا سالمہ پھر مائع میں واپس ہو جائے گا۔

لیکن یہی سالمہ فضا میں باہر نکل سکتا ہے بشرطیکہ مائع کی سطح شکل ۳۷ (ب) کی طرح مستوی ہو۔ اگر سطح شکل ۳۷ (ج) کی طرح محدب ہو تو پیکاں کے نشان کی سمت میں سالمہ کا باہر نکل جانا ممکن ہے لیکن اس بات کا بھی امکان ہے کہ مستوی سطح والے مائع میں سے یہ نکلنے نہ پائے۔

اس سے ظاہر ہے کہ کسی خاص تپش پر ایسے سالمات کی تعداد جو فی ثانیہ کسی محدب سطح کے مائع سے باہر نکلتے ہیں زیادہ ہوتی ہے بہ نسبت ان سالمات کی تعداد کے جو فی ثانیہ کسی مستوی سطح والے مائع سے باہر نکلتے ہیں اور کسی مقعر سطح سے سالمات کے باہر نکلنے کی شرح بلحاظ وقت، مستوی سطح سے نکلنے والے سالمات کی شرح سے کم ہوتی ہے۔

(ا)

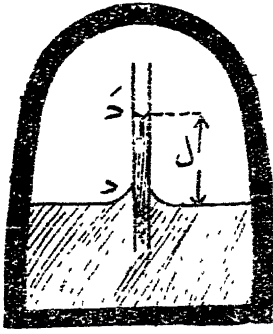
(ب)

(ج)

شکل ۳۷

اگر ذیل کے وجوہات پر غور کریں تو ہم اسی نتیجہ پر پہنچتے ہیں :—

کسی مائع میں جب اس کی مستوی سطح سے تبخیر کا عمل ہوتا ہے تو سطح کے رقبہ میں کوئی تبدیلی نہیں واقع ہوتی اور اسی لئے سطحی تناؤ کی وجہ سے توانائی بالقوہ میں کوئی تغیر نہیں ہوتا۔ کسی منحنی سطح (مثلاً کروی قطرہ) کی صورت میں جب مائع میں تبخیر کا عمل ہوتا ہے تو سطح کے رقبہ میں کمی ہو جاتی ہے جس کی باعث سطحی تناؤ سے توانائی بالقوہ میں کمی ہونے لگتی ہے۔ لہذا چونکہ تبخیر کے ساتھ توانائی بالقوہ میں کمی واقع ہونا ضروری ہے اس لئے سالمات کے باہر نکل جانے کی شرح، یعنی تبخیر کروی قطرے میں، مستوی سطح کی بہ نسبت، بڑھ جاتی ہے۔ اسکا مطلب یہ ہے کہ کروی قطرہ کے ساتھ جو بخاری دباؤ تعادل میں رہتا ہے وہ مستوی سطح کی بہ نسبت زیادہ ہوتا ہے۔

لارڈ کلون پہلا شخص ہے جس نے بخاری دباؤ پر سطح کے انحنا کے اثر کو حسب ذیل طریقہ سے ظاہر کیا[10] :—

شکل ۳۸ میں ایک شعری نلی دکھائی گئی ہے یہ ایسے مائع میں رکھی ہوئی ہے جو شیشہ کو بھگوتا ہے۔ فرض کرو کہ اس پورے انتظام کو ایک بند برتن میں رکھ دیا جاتا ہے اور یہ بھی فرض کرو کہ شعری نلی کا اندرونی نصف قطر ص ہے اور شعری نلی میں مائع کی سطح آزاد مستوی سطح سے ل بلندی پر واقع ہے۔

شکل ۳۸

اگر مستوی سطح کے عین اوپر بخاری دباؤ د اور اس سے ل بلندی پر بخاری دباؤ دَ ہو تو

$$\text{د} = \text{دَ} + \text{ج ث ل} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۵۹)$$

جہاں ث = بخار کی کثافت

لیکن لاپلاس کی مساوات سے ہمکو یہ معلوم ہے کہ

شعری نلی میں کے مائع کی نصف کروی سطح کے دونوں جانب کا فرق دباؤ =

$$= \frac{\text{۲س}}{\text{ص}}$$

$$= \text{ج} \, (\text{ثہ} - \text{ث}) \, \text{ل}$$

جہاں ثہ = مائع کی کثافت۔

(یہ یاد رہے کہ ہم نے اس سے پہلے ث کو مقابلہ ثہ نظر انداز کردیا تھا)

$$\text{یعنی ج ث ل} = \frac{\text{۲س}}{\text{ص}} \left( \frac{\text{ث}}{\text{ثہ} - \text{ث}} \right)$$

∴ مساوات (۵۹) سے

$$\text{دَ} = \text{د} - \frac{\text{۲س}}{\text{ص}} \left( \frac{\text{ث}}{\text{ثہ} - \text{ث}} \right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۶۰)$$

لہذا مقعر سطح پر بخاری دباؤ مستوی سطح کے مقابلہ میں (ایک ہی تپش پر) بمقدار

$\frac{۲\,\text{س}}{\text{ص}}\left(\frac{\text{ث}}{\text{ثہ}-\text{ث}}\right)$ کم ہوتا ہے۔ اس لئے مقعر سطح پر بستگی بہ نسبت مستوی سطح کے زیادہ تیزی کے ساتھ واقع ہوتی ہے (یہ مانتے ہوئے کہ دونوں صورتوں میں تپش ایک ہی ہے) اگر مائع کی سطح محدب ہو جیسا کہ کسی شعری نلی کو پارہ میں ڈبونے کی صورت میں ہوتی ہے تو بھی اسی طریقے سے ہم یہ ثابت کر سکتے ہیں کہ محدب سطح پر بخاری دباؤ دَ مستوی سطح کے بخاری دباؤ سے بالکل اتنا ہی زیادہ ہوتا ہے جتنا کہ اوپر بتایا گیا ہے۔

لہذا عام مساوات :-

$$\text{دَ} = \text{د} \mp \frac{۲\,\text{س}}{\text{ص}}\left(\frac{\text{ث}}{\text{ثہ}-\text{ث}}\right) \qquad \text{.........} (۶۱)$$

(مقعر سطح کیلئے منفی علامت اور محدب سطح کیلئے مثبت علامت استعمال ہوتی ہے)

لہذا محدب سطح کی صورت میں بستگی بہ نسبت مستوی سطح کے آہستہ واقع ہوتی ہے (یعنی تبخیر زیادہ تیزی کے ساتھ واقع ہوتی ہے)

اب پانی کے ایک قطرہ پر غور کرو جسکا نصف قطر صفر درجہ مئی پر $۱۰^{-۴}$ سمر ہے۔ سیر شدہ بخار کی کثافت ث صفر درجہ مئی پر $= ۸٫۴۸ \times ۱۰^{-۶}$ گرام فی مکعب سمر

چونکہ س $=$ ۷۶ ڈائین فی سمر صفر درجہ مئی پر اور ثہ $= ۱$

$\therefore \frac{۲\,\text{س}}{\text{ص}}\left(\frac{\text{ث}}{\text{ثہ}-\text{ث}}\right) \simeq ۳٫۷$ ڈائین فی مربع سمر

لہذا بخاری دباؤ اس صورت میں، بہ نسبت مستوی سطح کے ۳٫۷ ڈائین فی مربع سمر زیادہ ہے۔

لیکن صفر درجہ مئی پر د $= ۶ \times ۱۰^{۳}$ ڈائین فی مربع سمر

لہذا دَ $= (۶ \times ۱۰^{۳} + ۳٫۷)$ ڈائین فی مربع سمر

$\therefore \frac{\text{دَ}}{\text{د}} = ۱٫۰۰۱۲$

اگر قطرہ کا نصف قطر $۱۰^{-۷}$ سمر (۱ ململ) صفر درجہ مئی پر ہو تو

اس صورت میں $\frac{۲\,\text{س}}{\text{ص}}\left(\frac{\text{ث}}{\text{ثہ}-\text{ث}}\right) = ۳٫۷ \times ۱۰^{۳}$ ڈائین فی مربع سمر

اور دَ / دِ = ۲۲ر۲

اس سے ظاہر ہے کہ اگر قطرے بہت چھوٹے ہوں تو بخاری دباؤ پر انحنا کا اثر کافی بڑا ہوتا ہے۔ چونکہ ص جوں جوں کم ہوتا ہے، یہ اثر بڑھتا ہے اس لئے بالکل چھوٹے ناپ کے قطرے بہت تیزی کے ساتھ بخار میں متبدل ہو جائیں گے اگر ان کو ایسی فضاء میں رکھا جائے جو بخار سے سیر شدہ ہو۔

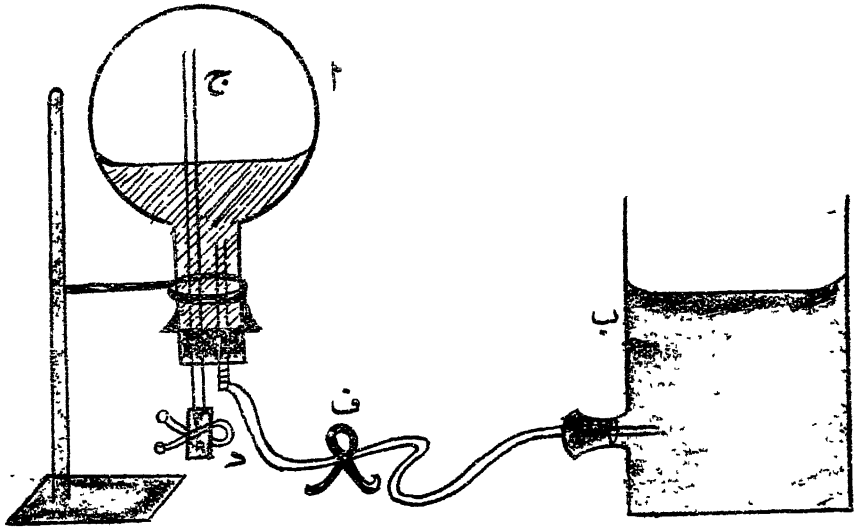
**بادلوں کی ساخت:** — فرض کرو کہ آبی بخار کی بستگی سے جو ایک بے انتہا چھوٹے قطرۂ آب کی سطح پر واقع ہوتی ہے یہ بے انتہا چھوٹا قطرہ بڑھنے لگتا ہے۔ اس صورت میں یہ ایک ایسی فضا میں واقع ہوگا جس میں آبی بخار "زاید سیر شدہ" حالت میں ہے ورنہ بستگی کا مرکزہ ہونے کے بجائے بخار میں متبدل ہو جانے سے اسکا ناپ کم ہونے لگے گا۔

اس سے عموماً یہ ظاہر ہوتا ہے کہ بہت چھوٹے قطرے قائم نہیں رہ سکتے اور بہت جلد غائب ہو جاتے ہیں۔ لہذا بارش کے قطروں یا بادل کی ساخت کا بڑا دشوار مسئلہ معلوم ہوتا ہے جبکہ یہ قطرے ابتدائی حالت میں بہت چھوٹے ہیں۔

۱۸۸۰ء میں ایٹکن نے یہ ثابت کیا کہ معمولی حالات میں جبکہ پانی اور آبی بخار زائد سیر شدہ حالت میں موجود ہوں تو یہ قطرے نہیں بنتے۔ بارش اور کہر کے لئے گرد کے ذرات کی موجودگی لازمات سے ہے۔ گرد کے ذرات پر پانی جمع ہونے لگتا ہے اور اس طرح سے قطرہ کا ابتدائی نصف قطر مقابلتاً بڑا رہتا ہے اور وہ دشواری جاتی رہتی ہے جو قطرہ کے ابتدائی حالت میں درپیش تھی۔

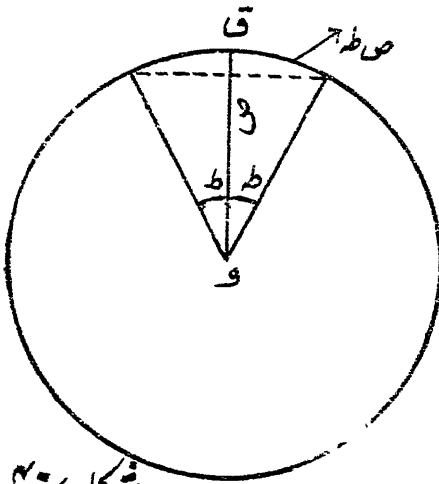
کسی بڑے شہر میں جہاں کارخانے، دودکش اور گاڑیوں وغیرہ کی آمدورفت کافی رہتی ہے دھوئیں اور گرد و غبار کے ذرات بیشمار تعداد میں ہوا میں موجود ہوتے ہیں جن پر آبی رطوبت جم سکتی ہے اور چنانچہ ان کی وجہ سے تاریک کہر واقع ہوتا ہے۔

بادل کے بننے میں گرد کے ذرات کے اثر کو حسب ذیل تجربہ سے ثابت کیا

جا سکتا ہے۔ شکل ۳۹ میں ایک لچکدار نلی ف کے ذریعہ ا اور ب دو برتن ایک دوسرے سے ملے ہوئے ہیں۔ ب میں پانی رکھا جاتا ہے اور اس کو جب اوپر اٹھایا جاتا ہے تو ا کا کچھ حصہ پانی سے بھر جاتا ہے، جب ب کو

شکل ۳۹

نیچے اُتارا جاتا ہے تو پانی ا کے باہر نکل جاتا ہے اور ا میں ہوا کا حجم بڑھ جاتا ہے اس طرح ہوا کے پھیلنے کی وجہ تبرید کا عمل شروع ہوتا ہے، حتیٰ کہ ا میں آبی بخار زاید سیر شدہ ہونے لگتا ہے۔ اگر ا میں گرد آلود ہوا بھر دی جائے تو ب کو نیچے کرنے سے ا میں دھندلا سا بادل بننے لگتا ہے۔ یہ بادل ا کے پانی میں گرد کے چند ذرات اپنے ساتھ لیکر گر جاتا ہے۔ اسی عمل کو دوبارہ دہرانے سے پانی میں گرد کی زیادہ مقدار گر جاتی ہے اور ا کی ہوا میں پہلے کی نسبت گرد کے کم ذرات موجود رہتے ہیں۔ اسی طرح متعدد دفعہ تجربہ کو دوھرانے سے ا میں کی ہوا بالکل گرد سے پاک ہو جاتی ہے اور اس نوبت پر پھر کوئی بادل ا میں ہوا

کے پھیلاؤ سے نمودار نہیں ہوتا۔ اگر اس وقت د کے ذریعہ ذرا سی گرد ا
میں داخل کر دی جائے تو تبرید سے فوراً بادل بننے لگتا ہے۔ اس سے
ظاہر ہے کہ بادل کے نمودار ہونے کے لئے گرد کے ذرات کا موجود ہونا لازمی ہے۔
۱۸۹۷ء میں ولسن نے یہ ثابت کیا کہ گرد کے ذرات کے بغیر بھی گیسوں
کے رواں کو مرکزے قرار دیکر، بادل نمودار ہو سکتے ہیں بشرطیکہ بخار ایک
خاص قیمت سے زیادہ "زائد سیر شدہ" ہو۔

**برقایا ہوا صابون کا بلبلا**:- صابون کے ایک ایسے بند بلبلے پر غور
کرو جس کا نصف قطر ص ہے۔ اگر کرہ ہوائی کا دباؤ د ہو تو بلبلے کے
اندر دباؤ د سے کسی قدر زیادہ ہوگا چنانچہ بیرونی حاصل قوت، بلبلے کے
سطحی تناؤ سے توازن میں رہے گی۔ اگر اس بلبلے کو برقایا جائے تو ایک
مزید قوت بلبلے کی سطح پر باہر کی جانب عمود وار عمل کرنے لگتی ہے جس
کی وجہ سے بلبلا اتنا پھیلتا ہے کہ توازن قائم ہو جائے۔ چونکہ نصف قطر
میں تبدیلی واقع ہوتی ہے
اس وجہ سے اس کا اندرونی
دباؤ حجم کے لحاظ سے معکوس
بدلتا ہے۔ کلیہ بائیل کی رو
سے دباؤ $\frac{م}{ص^3}$ کے مساوی
ہوگا جہاں م = مستقل۔
بلبلے کی سطح پر ایک ایسے
بالکل چھوٹے سے عنصر کے
تعادل پر غور کرو جو ایک مدوّر
مخروط کے ذریعہ، نیم انتصابی
زاویہ طہ مرکز سے بناتے ہوئے، قطع کیا گیا ہو [دیکھو شکل ۴۰]

شکل ۴۰

اس پر حسب ذیل قوتیں عمل کرتی ہیں:-

(۱) کرہ ہوائی کے دباؤ کی وجہ سے جو قوت اندر کی جانب عمود وار عمل کرتی ہے $= د \, \pi \, ص^{۲} \, ط^{۲}$

(۲) سطحی تناؤ کی وجہ سے جو قوت بلبلے کی سطح پر عمل کرتی ہے۔ اس قوت کے اجزا کو ایک مماسی مستوی میں اور دوسرا و ق کی سمت میں تحلیل کیا جا سکتا ہے۔ مماسی مستوی کے اجزائے تحلیلی ایک دوسرے کو زائل کر دیتے ہیں لیکن و ق کی سمت میں عمل کرنے والے اجزا جو اندر کی جانب عمل کرتے ہیں

$$= ۲ \pi \, ص \, ط \, س \, جب \, ط$$

$$\doteq ۲ \pi \, ص \, ط^{۲} \, س$$ کیونکہ ط چھوٹا ہے۔

(۳) اندرونی دباؤ کی وجہ سے جو قوت باہر کی جانب عمود وار عمل کرتی ہے

$$= \frac{م}{ص^{۳}} \, \pi \, ص^{۲} \, ط^{۲}$$

(۴) برقانے کی وجہ سے حسیلی قوت جو باہر کی طرف عمود وار عمل کرتی ہے =

$$= ۲ \pi \, ثہ^{۲} \cdot \pi \, ص^{۲} \, ط^{۲}$$

جہاں ثہ = برقی بھرن فی اکائی رقبہ

تعادل کے لیے یہی تمام قوتیں جو عمود وار اندر کی جانب عمل کرتی ہیں اُن تمام قوتوں کے مساوی ہونی چاہئیں جو باہر کی جانب عمود وار عمل کرتی ہیں۔

$$\therefore د \, \pi \, ص^{۲} \, ط^{۲} + ۲ \pi \, ص \, ط^{۲} \, س =$$

$$= \frac{م}{ص^{۳}} \cdot \pi \, ص^{۲} \, ط^{۲} + ۲ \pi \, ثہ^{۲} \, \pi \, ص^{۲} \, ط^{۲}$$

یعنے $د + \frac{۲ س}{ص} = \frac{م}{ص^{۳}} + ۲ \pi \, ثہ^{۲}$ ............(۶۲)

فرض کرو کہ بلبلے کا نصف قطر برقانے کے قبل $= ص_{۱}$

اور بھرن سے برقائے جانے کے بعد بلبلے کا نصف قطر $= ص_{۲}$

پہلی صورت میں $د + \frac{۲ س}{ص_{۱}} = \frac{م}{ص_{۱}^{۳}}$ ............(۶۳)

دوسری صورت میں چونکہ $\text{ث} = \frac{\text{بھ}}{۴\pi\, \text{ص}_۲}$ اور یہ فرض کرتے ہوئے کہ سطحی تناؤ میں کوئی تبدیلی نہیں ہوتی :—

$$\text{د} + \frac{۲\text{س}}{\text{ص}_۲} = \frac{\text{م}}{\text{ص}_۲^۳} + \frac{\text{بھ}^۲}{۸\pi\, \text{ص}_۲^۴} \quad \ldots\ldots (۶۴)$$

ان دونوں مساواتوں سے س کو ساقط کرنے سے :—

$$\text{د}(\text{ص}_۲ - \text{ص}_۱) - \text{م}\left(\frac{۱}{\text{ص}_۲^۲} - \frac{۱}{\text{ص}_۱^۲}\right) = \frac{\text{بھ}^۲}{۸\pi\, \text{ص}_۲^۳}$$

اگر بلبلے کو ایسی نلی پر پھونک کر بنایا جائے جو ہوا کے لئے کھلی ہوئی ہو تو مساوات (۶۲) کو یوں لکھا جا سکتا ہے :—

$$\frac{\text{س}}{\text{ص}} = \pi\, \text{ث}^۲$$

اگر ہم بلبلے کو یکساں طور پر برقایا ہوا کرہ فرض کریں تو اس کا قوۃ $\text{قو} = ۴\pi\, \text{ص}\, \text{ث}$

ایسی صورت میں $\text{س} = \frac{\text{قو}^۲}{۱۶\pi\, \text{ص}}$

**مثال :—** کسی صابون کے بلبلے کا نصف قطر اور سطحی تناؤ علی الترتیب ص اور س ہو تو ثابت کرو اس کے نصف قطر کو دوگنا کرنے کے لئے جو برقی بھرن درکار ہوگی وہ $= ۴\left\{\pi\, \text{ص}^۳(۶\text{س} + ۷\,\text{د}\,\text{ص})\right\}^{\frac{۱}{۲}}$

جہاں د کرہ ہوائی کا دباؤ ہے۔

پہلی صورت میں مساوات (۶۳) سے چونکہ $\text{ص}_۱ = \text{ص}$

$$\therefore \text{م} = \text{د}\,\text{ص}^۳ + ۲\text{س}\,\text{ص}^۲$$

دوسری صورت میں مساوات (۶۴) سے چونکہ $\text{ص}_۲ = ۲\text{ص}$

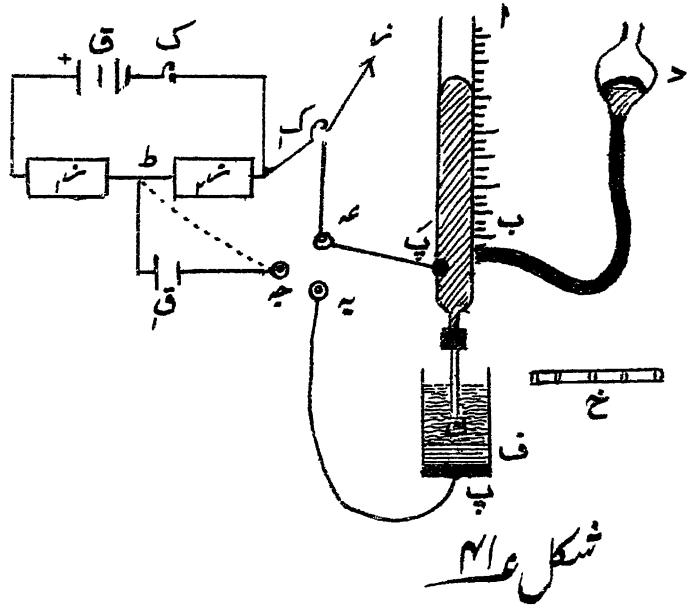
$$\therefore \text{د} + \frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{\text{م}}{۸\,\text{ص}^۳} + \frac{\text{بھ}^۲}{۱۲۸\pi\, \text{ص}^۴}$$

یعنے
$$\text{د} + \frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{\text{د}}{۸} + \frac{\text{س}}{۴\text{ص}} + \frac{\text{بھ}^۲}{۱۲۸\pi\, \text{ص}^۴}$$

$$\text{یعنی بھ}^2 = ۱۶\,\pi\,\text{ص}^3\,(۷\,\text{دص} + ۶\,\text{س})$$

$$\therefore \text{بھ} = ۴\left\{\pi\,\text{ص}^3\,(۶\,\text{س} + ۷\,\text{دص})\right\}^{\frac{1}{2}}$$

## شعری برق پیما :—

مائعات کے سطحی تناؤ پر جو برقی اثرات مرتب ہوتے ہیں ان کو مدنظر رکھ کر شعری برق پیما بنایا گیا ہے۔ شکل ۱۴۱ میں ۲ ب ایک لمبی

شکل ۱۴۱

شیشہ کی نلی ہے جس کے ایک سرے پر پتلی شعری نلی ت ربر کی نلی کے ذریعہ جوڑ دی گئی ہے۔ ۲ ب کے عقب میں لکڑی کا ایک پیمانہ نصب کیا گیا ہے۔ د پارہ سے بھرا ہوا برتن ہے جو ب پر ربر کی نلی سے جوڑ دیا گیا ہے۔ د کو اونچا نیچا کرنے سے شعری نلی پر کے دباؤ کو کم و بیش کیا جا سکتا ہے۔ شعری نلی میں پارہ کی سطح، ۱ ب میں پارہ کی بلندی پر منحصر ہوتی ہے۔ ایک پلاطینم کا تار پ، نلی ف کے پیندے میں پگھلا کر جوڑ دیا جاتا ہے اور اس میں (یعنی ف میں) شعری نلی کا کچھ حصہ نکل آتا ہے۔ ف کے پیندے میں

کچھ پارہ ڈال دیا جاتا ہے اور اس پر الف کے اوپر کے سرے تک سلفورک ترشہ اور پانی کا ہلکایا ہوا محلول، جس کو "مرکیورس سلفیٹ" سے سیر شدہ بنا کر بھرا جاتا ہے۔ لمبی نلی ا ب میں پلاطینم کا ایک دوسرا تار پ پگھلا کر جوڑ دیا جاتا ہے۔ شعری نلی میں پارہ کی ہلالی سطح کو خوردبین خ سے دیکھا جاتا ہے۔

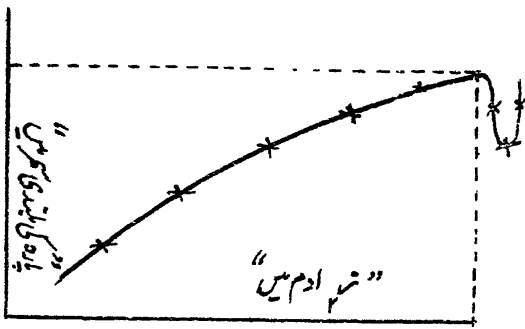
نا اور نا دو مزاحمتوں کے بکس ہیں اور عہ، بہ، جہ پیرافن موم کے کندے میں سوراخ ہیں جن میں پارہ بھر دیا جاتا ہے۔ ق ایک ذخیرہ خانہ ہے، ک اور ک دو کنجیاں ہیں اور نا کا زمین کے ساتھ تعلق کر دیا جاتا ہے۔

شکل ۱۴ کے مطابق اس میں دکھائے ہوئے ضروری چیزوں کو جوڑ دینے کے بعد، ا ب میں دباؤ کو اس طرح بڑھاؤ کہ پارہ شعری نلی میں سے باہر نکلنے لگے اور پھر دباؤ کو اتنا کم کر دو کہ نلی ا ب میں پارہ کسی موزوں مقام پر ٹھیر جائے۔ اس طرح کرنے سے برق پیما کی حساسیت بڑھ جاتی ہے۔ شعری نلی میں پارہ کا سطحی تناؤ، عہ اور بہ کے درمیانی فرق قوہ کا کوئی تفاعل ہے۔ تجربہ میں، عہ اور بہ کو ملاؤ، اس طرح کہ پ اور پ کے درمیان فرق قوہ صفر ہو جائے اس حالت میں د کو اس طرح ترتیب دو کہ شعری نلی میں پارہ کی ہلالی سطح، خوردبین کے چشمہ کے پیمانہ پر کسی موزوں مقام پر ٹھیر جائے۔ نا اور نا مزاحمتوں کو اب اس طرح ترتیب دو کہ ان کا مجموعہ ہمیشہ دس ہزار اوم کے مساوی ہو۔

ق خانہ کو علیحدہ کر دو اور ط اور جہ کو ملاؤ (جس طرح کہ نقطہ دار خط سے شکل میں دکھایا گیا ہے) ک اور ک کنجیوں کو دباؤ۔ جب بہ، جہ کے ساتھ جوڑ دیا جائے تو شعری نلی میں پارہ کی ہلالی سطح کی حرکت، خوردبین میں نظر آئے گی، اب د کو اتنا اونچا کرو کہ پارہ کی ہلالی سطح پھر خوردبین کے پیمانہ میں اسی نشان پر آ جائے جس پر وہ پہلے تھی۔ ا ب میں پارہ کی سطح کے نشانات پیمانہ پر پڑھ لو۔ اس طرح نا اور نا مزاحمتوں کو بدل

بدلکر لیکن ہر صورت میں ان دونوں کی حاصل جمع مزاحمت دس ہزار ادم کے مساوی ہونی ضروری ہے) ا ب میں پارہ کی اوپر کی سطح جن درجوں کے مقابل رہے ان کے مشاہدات اس وقت حاصل کرو جبکہ خوردبین والے چشمے کے پیمانہ پر، پارہ کی ہلالی سطح اپنے ابتدائی نشان پر آجائے۔

م۲ کی مزاحمتوں کو ا ب میں متناظر درجوں کی قیمتوں کے مقابلہ میں مرتسم کرو۔ شکل ۴۲ کے مطابق ایک منحنی حاصل ہوگی۔

اگر ق ذخیرہ خانہ کا ق۔ م۔ ب، م۱ بکس م۲ کی مزاحمت اور برق پیما کے سروں کے درمیان فرق تو ق ہو تو ق۲ = ق م۲ / ۱۰۰۰۰

ترسیم سے م۲ کی وہ قیمت حاصل کرو جو ا ب میں پارہ کی اعظم بلندی کے متناظر ہوتی ہے۔ پھر م۲ کی اس قیمت سے ق۲ کی قیمت دریافت کرو۔

"پارہ کی بلندی کوک میں"

"م۲ ادم میں"

شکل ۴۲

دو خانوں کے برقی محرکوں کے مقابلہ میں، رو پیما کے بجائے یہ برق پیما استعمال کیا جا سکتا ہے اس غرض کے لئے ک کنجی کو کھول دو اور ط اور جہ کے درمیان ایک خانہ ق۱ (جس کے ق۔ م۔ ب کا مقابلہ معیاری خانہ کے ساتھ کرنا ہو) جوڑ دو۔ م۱ کی مزاحمت کو اب اس طرح ترتیب دو کہ شعری نلی والے پارے کی ہلالی سطح میں، بہ کو جہ یا عہ کے ساتھ جوڑنے سے، کوئی حرکت نہ ہونے پائے۔ فرض کرو کہ بکس م۲ کی مزاحمت، تعادل کی صورت میں م۲ ہے۔ اس کے بعد بجائے ق۱ کے معیاری خانہ کو، ق۱ کی جگہ جوڑ دو۔ تعادل کے لئے پھر تجربہ کو اس طرح دہراؤ کہ م۱ اور م۲ کا مجموعہ

ہر حالت میں دس ہزار ۱م کے مساوی رہے۔

اگر نق۲ نکس نق۲ کی مزاحمت اس صورت میں ہو تو

$$\frac{ق_۱}{ق_۱} = \frac{نق_۲}{نق}$$

اس ترتیب کو ویٹ کے قوہ پیما سے موسوم کیا جاتا ہے۔

## لاپلاس والااسطحی تناؤ کا سالمی نظریہ (۲۲) :۔

کسی شئے کے بین السالماتی فاصلے جب ایک خاص حد سے (جو بہت چھوٹی ہوتی ہے) بڑھ جاتے ہیں تو کسی دو سالمات کے درمیان قوت جاذبہ بالکل کم ہو جاتی ہے۔

ہر سالمہ کے گرد اگر ہم کرے اس طرح کھینچیں کہ ان کا نصف قطر ایسے اعظم ممکن فاصلہ کے مساوی ہو جہاں سے دوسرے سالمہ پر قابل لحاظ قوت جاذبہ عمل کر سکے تو ایسے کروں کو "سالمی کشش کے کروں" سے موسوم کیا جاتا ہے۔

گیس کی حالت کے برخلاف، مائع کی حالت میں کسی شے کے سالمات ایک دوسرے کے بالکل قریب رہتے ہیں۔ یعنی اس صورت میں سالمی کشش کا کرہ سالمات کی ایک کثیر تعداد کو اپنے گرفت میں رکھتا ہے جن میں سے ہر ایک پر ایک خاص کششی قوت عمل کرتی ہے۔ نیوٹن کے تیسرے کلیۂ قوت کی رو سے عمل اور ردعمل ہمیشہ مساوی اور متضاد ہوتے ہیں۔ لہٰذا مائع کے اندر ہر سالمہ کو اس کے قریب کے دیگر سالمات مساوی قوت سے مختلف سمتوں میں جذب کرتے رہتے ہیں جس سے سالمہ اپنے ابتدائی مقام پر قائم رہتا ہے۔

ایک ایسے سالمہ پر اگر غور کیا جائے جو مائع کی آزاد سطح سے قریب ہوتا ہے تو ظاہر ہے کہ یہ بالکل مختلف حالات کے تحت رہتا ہے۔

سالمات گیس کی یا بخار کی حالت میں جو مائع کی سطح کے اوپر رہتے ہیں چونکہ ان کے درمیانی فاصلے بہت زیادہ ہوتے ہیں اس لئے مائع کی سطح پر کے سالمات

والے سالمی کشش کے کروں کے اثر سے باہر ہوتے ہیں جس سے سطح پر کا کوئی سالمہ صرف اپنے گرد کے سطحی سالمات اور دیگر ایسے سالمات کی کشش سے جو سطح کے نیچے اس کے قریب میں واقع ہوتے ہیں متاثر ہوتا ہے۔ لہذا جب کوئی سالمہ مائع کے اندر سے سطح تک پہنچتا ہے تو اس کا مطلب یہ ہے کہ اسنے حاصل کشش کو' جو مائع کے اندر اس کو واپس کھینچ لیجانے کا تقاضا رکھتی ہے' مغلوب کرلیا' اور ظاہر ہے کہ اس طرح مائع کے اندر سے سطح تک پہنچنے میں سالمہ کو کام کرنا ہوگا جو اس کی توانائی بالفعل کے خرچ سے کیا جاتا ہے۔ لیکن مائع کی تپش کا انحصار اس کے سالمات کی توانائی بالفعل پر ہوتا ہے' اور چونکہ مائع کی سطح کی تپش بھی وہی ہوتی ہے جو اس کے اندرونی حصص کی ہے لہذا ایک سالمہ جو سطح تک پہنچا ہو توانائی بالفعل میں اضافہ کے ساتھ مائع کی سطحی تپش میں بھی' بیرونی مبدا سے حرارت حاصل کرکے اضافہ کرتا ہے۔

جب کسی مائع کی سطح پھیلتی ہے تو اسکا رقبہ بڑھتا ہے جس کی وجہ سے سالمات کی ایک بڑی تعداد جو پہلے مائع کے اندر تھی اب مائع کی سطح پر آجاتی ہے۔ ان سالمات کی توانائی بالفعل وہی ہونے کے لیے جو مائع کے اندرونی سالمات کی ہے' بیرونی ذرائع سے حرارت کا داخل ہونا ضروری ہے تاکہ تعادل قائم رہے۔ اس طرح جب حرتا گزار حالات کے تحت کسی مائع کی سطح پھیلتی ہے تو ہمیشہ تبرید کے اثرات ظاہر ہوتے ہیں۔ سالمات جو مائع کی سطح پر ایک دوسرے کے بالکل قریب واقع ہوتے ہیں آپس میں ایک خاص قوت سے چمٹ جاتے ہیں۔ اس کا نتیجہ یہ ہوتا ہے کہ مائع کی سطح کھنچی ہوئی لچک دار جھلی کی طرح عمل کرتی ہے جس سے سطحی تناؤ کے وجود کا پتہ چلتا ہے۔

جب کوئی سالمہ مائع کی سطح سے باہر فضا میں نکل جاتا ہے تو مائع کے اندر ہی سے اس کی رفتار اتنی تیز ہوتی ہے کہ سطحی سالمات کی کشش اس کو روک کر قابو میں نہیں رکھ سکتی۔ لہذا جب کسی مائع میں تبخیر کا عمل ہوتا ہے تو صرف

زیادہ تیز حرکت والے سالمات مائع سے باہر کی فضا میں نکل جاتے ہیں۔ ظاہر ہے کہ اسکا اثر ہمیشہ تبرید ہوتا ہے جو مائع کے تبخیر کا نتیجہ ہے کیونکہ تبخیر کے عمل کو جاری رکھنے کے لئے یہ ضروری ہے کہ سالمات بیرونی ذرائع سے حرارت حاصل کرتے ہیں کسی مائع کے ایک گرام کو بخار میں تبدیل کرنے کے لئے اسکی مخفی حرارت کے مساوی مقدار حرارت اس میں داخل کرنی ہوتی ہے۔ حرارت کی یہ مقدار اس کام کے مساوی ہوتی ہے جو ایک گرام مائع کے سالمات کو اس کی اندرونی سطح سے آزاد سطح تک اور پھر آزاد سطح سے سطحی سالمات کے کششی اثر کے باہر فضا میں پہنچانے کے لئے درکار ہوتا ہے۔

اس سے ظاہر ہے کہ سطحی تناؤ اور مائع کے بخار کی حرارت مخفی میں ضرور کوئی خاص تعلق ہے۔ تبخیر کی تپش جب بڑھتی ہے تو کسی مائع کے بخار کی حرارت مخفی گھٹنے لگتی ہے اس لئے تپش کے اضافہ سے سطحی تناؤ کی قیمت کو بھی گھٹنا چاہیئے۔

اوپر بیان کیا گیا ہے کہ تیل کی ایک پتلی جھلی اگر پانی پر موجود ہو تو پانی کا سطحی تناؤ کم ہو جاتا ہے اس کی وجہ غالباً یہ ہے کہ پانی اور تیل کے سالمات میں قوت کشش بالکل کم ہوتی ہے اس لئے سطح پر پانی کے سالمات کی درمیانی فضا میں جب تیل کے سالمات گھس جاتے ہیں تو پانی کے سالمات کے لئے یہ امر بہت دشوار ہو جاتا ہے کہ اس پہلی بڑی قوت سے آپس میں اسطرح چمٹ جائیں جیسا کہ تیل کی عدم موجودگی میں وہ چمٹ جایا کرتے تھے۔ اس وجہ سے پانی کے سطحی تناؤ میں کمی واقع ہوتی ہے۔

اب ہم یہاں ایک ایسے نظریہ کو عام فہم شکل میں بیان کرنا چاہتے ہیں جو لاپلاس اور اس کے ساتھیوں نے پہلے پہل دنیا کے سامنے پیش کیا:۔

**بخار کی حرارت مخفی:۔** فرض کرو کہ ک کمیت کا ایک سالمہ کسی مائع کی سطح سے چلکر، اوسکے اوپر کی خالی فضا میں ایک ایسے فاصلہ پر پہنچ جاتا ہے جو سالمی کششی کرے کے نصف قطر سے زیادہ ہے۔ ظاہر ہے کہ سالمہ پر کام صرف اس وقت کیا

جائے گا جب کہ وہ سطح سے، سالمی کشش کے نصف قطر کے فاصلے کی حد سے باہر ہوگا۔ سالمی کشش کی قوتوں کے کلیہ کو فرض کرنے کے بغیر یہ تصور کرو کہ سالمی کشش کے نصف قطر ص کو عین سطح مائع کے اوپر ہم طول کے ن چھوٹے چھوٹے ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ اس طرح ہر چھوٹے ٹکڑے یا عنصر کا طول $\frac{\text{ص}}{\text{ن}}$ کے مساوی ہوگا۔ فرض کرو کہ سالمہ پر قوت جبکہ وہ ان عناصر کے پہلے عنصر میں گزرتا ہے $\text{ک ثہ ق}_1$ کے مساوی اور، جبکہ وہ دوسرے عنصر میں سے گزرتا ہے $\text{ک ثہ ق}_2$ کے مساوی ہے۔ علیٰ ہذالقیاس آخری عنصر میں جب سالمہ گزرتا ہے تو قوت $\text{ک ثہ ق}_{\text{ن}}$ ہوگی جہاں ثہ = مائع کی کثافت اور $\text{ق}_1$، $\text{ق}_2$، $\text{ق}_3$ ...... وغیرہ سطح سے فاصلوں پر منحصر ہوں گے اور ان کی قیمتیں بتدریج گھٹتی جائیں گی۔

پہلے عنصر کو طے کرنے میں کام جو کیا گیا $= \text{ک ثہ ق}_1 \cdot \frac{\text{ص}}{\text{ن}}$

دوسرے " " " $= \text{ک ثہ ق}_2 \frac{\text{ص}}{\text{ن}}$

اسی طرح مجموعی کام جو سالمہ پر ن عنصروں میں گزرنے، یعنی فاصلہ ص طے کرنے میں کیا گیا

$$= \frac{\text{ص}}{\text{ن}} \left\{ \text{ک ثہ ق}_1 + \text{ک ثہ ق}_2 + \text{ک ثہ ق}_3 + \ldots\ldots + \text{ک ثہ ق}_{\text{ن}} \right\}$$

$$= \text{ک ثہ ص} \left\{ \frac{\text{ق}_1 + \text{ق}_2 + \text{ق}_3 + \ldots\ldots \text{ق}_{\text{ن}}}{\text{ن}} \right\}$$

$$= \text{ک ثہ ص ق} \quad \text{جہاں ق} = \frac{\text{ق}_1 + \text{ق}_2 + \text{ق}_3 + \ldots + \text{ق}_{\text{ن}}}{\text{ن}}$$

"لیکن کسی سالمہ کو مائع کے اندر سے مستوی سطح تک لانے میں جو کام کیا جاتا ہے وہ اُس کام کے مساوی ہوتا جو سالمہ کو مائع کی سطح سے، مائع کی اوپر کی فضا میں ایسے فاصلے تک لیجانے میں کرنا ہوتا ہے جو سالمہ کے کششی قوت کی حد سے باہر ہو"

لہذا ایک سالمہ کو مائع کے اندر سے مستوی سطح تک لانے اور پھر یہاں سے

سطح کی اوپر کی فضا میں، سالمی کششی قوت کی حد سے باہر لے جانے میں جو کام کیا جائے گا وہ = ۲ک ثہ ص ق

فرض کرو کہ مائع کے اکائی حجم میں سالمات کی تعداد = ع

تب اکائی حجم مائع کی کمیت = ک ع = ثہ

لہذا ع سالمات کو مائع کی سطح سے اوپر کی فضا میں لے جانے کے لئے کام

= ع ک ثہ ص ق = ثہ$^2$ ص ق = گع (فرض کرو)

اکائی حجم کے مائع کی تبخیر کی صورت میں، اکائی حجم میں جو سالمات موجود ہوتے ہیں، وہ سطح کے اندر سے "کششی کرے کی حد کے باہر تک" فاصلہ طے کرتے ہیں اور چونکہ اکائی حجم کے سالمات کی کمیت = ثہ لہذا کام جو اس صورت میں کیا جائے گا

= ۲ ثہ$^2$ ص ق = ۲ گع

اگر مائع کی فی اکائی کمیت حرارت مخفی مخ ہو تو

ثہ مخ جو = ۲ گع ............ (۶۵)

جہاں جو = حرارت کی اکائی مقدار کا معادل جیلی۔

## کسی مائع کی تمدیدی طاقت :۔

فرض کرو کہ ا ب (شکل ۴۳) کسی مائع کی سطح کے اندر کھینچے ہوئے ایک فرضی مستوی کی تراش کو تعبیر کرتا ہے۔

ب ا

شکل ۴۳

مائع کی تمدیدی طاقت سے " ا ب کے فی مربع سم پر عمل کرنے والی وہ قوت مراد ہے (مثلاً ثہ ڈائین فی مربع سم) جو ا ب کے اوپر کے مائع کو نیچے کے مائع سے علیحدہ کرنے کے لئے درکار ہوگی۔

ا ب کے نیچے کا مائع ان تمام سالمات کو جذب کریگا جو ا ب کے اوپر فاصلہ ص کے اندر واقع ہوں۔

چونکہ ا ب کے فی مربع سمر پر مجموعی قوت تہ عمل کرتی ہے لہذا ا ب کے اوپر اگر مائع میں ایک چھوٹا سا فاصلہ فہ ہٹاؤ واقع ہو تو فی اکائی رقبہ جو کام کیا جائے گا تہ فہ ہوگا' یہ کام اس قوت کشش کو مغلوب کرنے کے کام کے مساوی ہوگا جس قوت سے ا ب کے نیچے کا مائع' ا ب کے اُن اوپر کے سالمات پر عمل کرتا ہے (جو کہ ص موٹائی اور اکائی رقبہ والے مائع کی ایک پرت میں واقع ہوتے ہیں) فرض کرو کہ ص موٹائی کی اس پرت کو ہم سالمات کے ن پرتوں میں تقسیم کرتے ہیں اور ان میں سے ہر ایک پرت میں فی اکائی رقبہ ع سالمات ہیں۔

اس صورت میں ص موٹائی اور اکائی رقبہ والی پوری پرت کی کمیت' ن ع ک کے مساوی ہوگی جہاں ک ایک سالمہ کی کمیت ہے۔

لہذا کمیت فی اکائی حجم = $\frac{\text{ن ع ک}}{\text{ص}}$ = ثہ = مائع کی کثافت

$\therefore$ ن ع ک = ثہ ص

فرض کرو کہ ا ب کے نیچے کا مائع جس قوت سے' ا ب کی اوپر والی پہلی پرت کے ہر سالمہ پر عمل کرتا ہے وہ ک ثہ ق$_1$ کے مساوی ہے اور دوسرے' تیسرے ...... ن ویں پرت تک قوتیں بالترتیب ک ثہ ق$_2$' ک ثہ ق$_3$ ...... ک ثہ ق$_ن$ کے مساوی ہیں۔ جب ا ب کے اوپر اور عین نیچے کے مائع کے درمیان چھوٹا سا نقل مکان فہ واقع ہو تو سالمات کی ہر پرت میں بھی یکساں فاصلہ فہ کا نقل مکان اس قوت کے مقابلہ میں واقع ہوگا جو ا ب کی طرف اُن کو کھینچتی ہو۔

مائع جس قوت سے پہلی پرت کے تمام سالمات کو جذب کرتا ہے وہ ک ع ثہ ق$_1$ کے مساوی ہے۔ لہذا فہ نقل مکان کی وجہ سے جو کام ہوا = ک ع ثہ ق$_1$ فہ

اسی طرح دوسری پرت کے لئے کام = ک ع ثہ ق$_2$ فہ

لہذا مجموعی کام جو تمام پرتوں کی کشش کو مغلوب کرنے میں کیا گیا

= ک ع ثہ ق فہ + ک ع ثہ ق فہ + ........ + ک ع ثہ ق فہ

= ک ن ع ثہ فہ { (ق₁ + ق₂ + ق₃ + ........ قن) / ن }

= ثہ² ص فہ ق = گ فہ = تہ فہ

∴ گ = تہ ........................ (۶۶)

لہذا مساوات (۶۵) اور (۶۶) سے مخ اور تہ کے درمیان ہمیں ایک راست تعلق حاصل ہو جاتا ہے۔ لیکن اس نظریہ میں مائع کے سالمات کی حرکت کا کوئی لحاظ نہیں رکھا گیا، اس کی وجہ یہ ہے کہ لاپلاس کا یہ نظریہ اس وقت پیش کیا گیا تھا جبکہ گیسوں اور مائعات کے نظریہ تحرک کی بنیاد قائم نہیں ہوئی تھی۔

ہمیں اب اس بات کا علم ہے کہ جیسے تپش بڑھتی ہے، سالمات کی رفتار بھی بڑھنے لگتی ہے لہذا گ کی قیمت کم ہونے لگتی ہے۔ یعنی اسکا مطلب یہ ہے کہ مائع کی تمدیدی طاقت کم ہونے لگتی ہے۔

اب فانڈر وال کی مساوات پر غور کرو جس سے کسی گیس یا مائع کے دباؤ د اور حجم ح کے درمیان تعلق ظاہر ہوتا ہے :-

(د + ا / ح²) (ح - ب) = لا ت ........................ (۶۷)

جہاں ا، ب اور لا مستقل ہیں اور ت مطلق درجوں میں تپش ہے۔

حرارت کی کتابوں سے یہ ظاہر ہے کہ اس مساوات میں ا / ح² اس قوت کشش کو تعبیر کرتا ہے جو ایک مربع سمر رقبہ کے مستوی پر مقابل کے رخ کے سالمات لگاتے ہیں۔ پس جب کوئی شے مائع کی حالت میں ہوتی ہے تو ا / ح² کی قیمت وہی ہوتی ہے جو گ کی ہے۔

اگر اوپر کی مساوات کسی شے کے ایک گرام پر صادق آتی ہے تو ا / ح اس شے کی کثافت ثہ ہو جاتی ہے۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ گ = ا / ح² سے

یا ت۲ کے متناسب ہے۔
پانی کے لئے تجربہ سے، گ ٔ کی قیمت بھی $\frac{1}{ح^2}$ کے رتبہ کی حاصل ہوئی ہے۔
اس سے لاپلاس کے نظریہ کی تصدیق عجیب طرح سے ہوتی ہے۔

سطحی تناؤ :۔ شکل ۴۳ میں مستوی ا ب کے اوپر کے مائع کو، ا ب کے نیچے کے مائع سے اس طرح علیحدہ کریں کہ درمیانی فاصلہ ص سے زیادہ ہو جائے تو مائع کی ۲ دو نئی سطحیں حاصل ہوں گی۔ چونکہ کسی مائع کا سطحی تناؤ اس کام کے مساوی ہے جو مائع کی سطح میں اکائی رقبہ کا اضافہ کرنے کے لئے درکار ہوتا ہے لہذا ا ب کے ہر اکائی رقبہ کے لئے کام جو کرنا ہوگا وہ زیر بحث ۲ دو سطحوں کی وجہ سے مائع کے سطحی تناؤ کا دوگنا ہوگا۔

ہم یہاں یہ فرض کر لیتے ہیں کہ قوت کشش اس وقت تک مستقل رہتی ہے جب تک کہ سالمہ، سطح ا ب سے فاصلہ ص طے نہیں کرتا اور اس کے بعد وہ بالکل صفر ہو جاتی ہے۔

یہ اگرچہ کہ غیر تشفی بخش مفروضہ ہے لیکن اس سے ہمیں بہت سے قیمتی معلومات حاصل ہوں گے۔

جب ا ب کے اوپر کا مائع، اس مستوی کے علی القوائم ہٹایا جاتا ہے تو سالمات کے پرت یکے بعد دیگرے ا ب کے نیچے کے مائع کی سالمی کششی قوت کے حد سے باہر گزرتے ہیں، حتی کہ تمام پرتیں اس حد کے باہر ہو جاتے ہیں جبکہ نقل مکان ص ہوتا ہے۔ لہذا، ص نقل مکان کے دوران میں، ا ب کے نیچے کے مائع سے، سالمات کے جن پرتوں پر قوت کشش عمل کرتی ہے، ان پرتوں کی اوسط تعداد $\frac{ن}{۲}$ ہوگی۔

جہاں ن سالمات کے پرتوں کی وہ مجموعی تعداد ہے جس میں ص پہلے کی طرح تقسیم کیا جاتا ہے لہذا مساوات (۲۶) کے حاصل کرنے میں جو طریق عمل اختیار کیا گیا تھا اسی طرح یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ کام جو کیا جاتا ہے وہ

($\frac{گ ع}{۲} \times ص$) کے مساوی ہے۔
لیکن یہ کام جیسا کہ اوپر بیان کیا گیا ہے مائع کے سطحی تناؤ کا دوگنا ہوتا ہے۔

$$\therefore ۲س = \frac{گ ع ص}{۲}$$

یعنی $س = \frac{گ ع ص}{۴}$ ................... (۶۸)

اس مساوات سے ص کی کم از کم ممکن قیمت حاصل ہوتی ہے جو سالمی کشش کا نصف قطر ہے۔ پانی کے لئے صفر درجہ مئی پر س = ۷۶ $\frac{ڈائین}{سمر}$ =

اور گ ع = $۲۶ر۱۰ \times ۱۰^{۱۰}$ $\frac{ڈائین}{مربع سمر}$

لہٰذا پانی کے لئے ص کی کم از کم قیمت $۲ر۴ \times ۱۰^{-۸}$ سمر حاصل ہوتی ہے ینگ نے ص کی کمترین قیمت دریافت کرنے کے لئے اس طریقہ کو استعمال کیا تھا۔

اوپر جو مساوات (۶۸) حاصل کی گئی ہے یہ کچھ زیادہ اطمینان کے قابل نہیں ہے۔ بعد میں یہ فرض کرنے کے بعد کہ دو سالمات ایک دوسرے کو ایسی قوت سے جذب کرتے ہیں جو ان کے مرکزوں کے درمیانی فاصلہ کی ن ویں طاقت سے تناسب معکوس رکھتی ہے س اور گ ع کے درمیان حسب ذیل تعلق دریافت کیا گیا:-

$$\frac{س}{گ ع} = \frac{۳}{۱۶} \cdot \frac{(ن - ۴)}{(ن - ۵)} \cdot ف$$

جہاں ف = سالمی قطر

اس مساوات سے ظاہر ہے کہ ن کی قیمت ۵ سے زیادہ ہونی چاہئے۔
اکثر مائعات کے لئے (تجربہ سے تصدیق کے بعد) یہ دریافت کیا گیا ہے کہ

$$\frac{ف}{۴} = \frac{س}{گ ع}$$

اس مساوات سے ن کی قیمت ۸ ہونی چاہیئے ۔ لہذا اس سے ظاہر ہے کہ سالمی کششی قوت فاصلہ کی ۸ ویں طاقت سے تناسب معکوس رکھتی ہے۔

**مائع کی سطح سے نکل کر باہر جانے والے سالمہ کی رفتار :۔**

ایک ایسے سالمہ کے لئے جو مائع کی سطح کے نیچے ص فاصلہ پر ہو اس بات کا امکان ہے کہ سطح کو پہنچنے تک یہ دوسرے سالمات کے ساتھ متعدد دفعہ متصادم ہو۔ ہر تصادم کے ساتھ سالمہ کی رفتار میں تبدیلی واقع ہوتی ہے ۔ اس لئے مائع کی سطح کے نیچے کسی سالمہ کی رفتار کا تعین ناممکن ہے اور یہ بھی یقین کے ساتھ نہیں کہا جاسکتا کہ آیا اس کی کوئی خاص رفتار سطح کے باہر اس کو لے جائے گی یا نہیں ۔

اگر کوئی سالمہ مائع کی سطح کو انتصابا ًس رفتار سے چھوڑتا ہو تو وہ اس صورت میں باہر بچ نکلے گا جبکہ اس کی توانائی بالفعل اس کام سے زیادہ ہو جو اس کو مائع کے سالمی کشش کی حد سے باہر لے جانے کے لئے درکار ہوتا ہے ۔

ہم دیکھ چکے ہیں کہ ع سالمات کو مائع کی سطح سے اوپر کی فضا میں لے جانے کے لئے گ ع کام درکار ہوتا ہے جہاں ع مائع کے اکائی حجم میں سالمات کی تعداد ہے۔

چونکہ ثہ = ک ع لہذا ک کمیت کے ہر سالمہ کو لے جانے میں کام جو کرنا ہوتا ہے

$$= \frac{گ ع}{ع} = \frac{ک گ ع}{ثہ}$$

لہذا ایک سالمہ باہر نکل جائے گا اگر

$\frac{1}{2}$ ک $ر^2$ > $\frac{\text{ک گ ع}}{\text{ث}}$

یعنی اگر $ر^2$ > $\frac{\text{۲ گ ع}}{\text{ث}}$

پانی کے لئے صفر درجہ مئی پر چونکہ ث کی قیمت ۱ ہوتی ہے اور گ ع =
= $1.26 \times 10^{10}$ $\frac{\text{ڈائین}}{\text{مربع سمر}}$

لہذا ر کی قیمت $1.45 \times 10^{5}$ $\frac{\text{سمر}}{\text{ثانیہ}}$ سے زیادہ ہونی چاہیئے۔
لیکن بخار کی حالت میں پانی کے سالمہ کی اوسط رفتار صفر درجہ مئی پر
= $6 \times 10^{4}$ سمر فی ثانیہ

لہذا اس سے ظاہر ہے کہ ایک سالمہ مائع کی سطح کے باہر نہیں نکل سکتا جب تک کہ اس کی رفتار اس کے ہمسایہ سالمات کی اوسط رفتار سے زیادہ نہ ہو۔

## Chapter VII.


(۱) Properties of Matter "Wagstaff" P237, (1924)

(۲) „ „ „ P233, (1924)

(۳) General Physics for Students "Edser," P305 (1926)

(۴) Properties of Matter "McEwen" P214 (1923)

(۵) Properties of Matter "Poynting & Thomson", P152 (1922)

(۶) „ „ „ P154, (1922)

(۷) Wiedemann's Annalen, 30 P209

(۸) Pogg Annalen, 119, 176 (1863) or
Advanced Practical Physics "Worsnop & Flint" P125 (1927)

(۹) Advanced Practical Physics "Worsnop & Flint" P143, (1927)

(۱۰) „ „ „ P142, (1927)

(۱۱) Phil Mag; 30, 386, (1890)

(۱۲) Phil Mag. 44, 369 (1897)

(۱۳) Phil. Mag. Feb. & April (1916)

(۱۴) Proc Phys. Soc. 36, 73 (1923)

(۱۵) „ „ 44, 511, (1932)

(۱۶) „ „ 45 88 (1933)

(۱۷) Phil, Mag. 4,358 (1927)

(۱۸) Properties of Matter "Newman & Searle" P171 (1928)

(۱۹) Wiedemann's Annalen, 27, 448 (1886)

(۲۰) Properties of Matter "Poynting & Thomson", P167 (1922)

(۲۱) Electricity and Magnetism "J. H Jeans" P81 (1925)

(۲۲) General Physics for students "Edser" P289, P351 (1926)

# آٹھواں باب

## لزوجت

مائع اگر کسی نالی میں سے بہہ رہا ہو تو اس کے مختلف پرت مختلف رفتاروں کے ساتھ ایک دوسرے پر سے پھسلتے ہوئے حرکت کرتے ہیں۔ ظاہر ہے کہ اوپر کے پرت کی رفتار، نچلے پرتوں کی رفتار سے اس وجہ سے زیادہ ہوگی کہ نچلے پرت نالی کی سطح سے چپٹے ہوئے ہوتے ہیں۔ نالی کی نچلی سطح پر مائع کی رفتار اسی لئے صفر تصور کی جاتی ہے۔ کناروں پر بھی درمیانی حصوں کی بہ نسبت مائع کی رفتار بہت کم ہوا کرتی ہے۔

اگر کسی شعری نلی میں سے مائع بہہ رہا ہو تو نلی کی سطح کے قریب رفتار بہت کم اور محور پر بہت زیادہ ہوتی ہے۔ ایسی صورت میں مائع کے پرتوں کی رفتاریں، ان کے درمیانی فاصلوں اور مائع کی لزوجت کے لحاظ سے تبدیلی ہوتی رہتی ہے۔

ٹھوس اشیاء میں استواری کے معیار سے بحث کی گئی تھی لیکن مائعات اور گیسوں میں استواری کے معیار کے بجائے "لزوجت" سے بحث کی جاتی ہے میکسول کے کہنے کے مطابق قدر لزوجت اس قوت کو کہتے ہیں جس کی وجہ سے یکائی رقبہ والی دو ایسی سطحوں کے درمیان جو ایک دوسرے سے یکائی فاصلہ پر ہوں یکائی تفاوت رفتار پیدا ہوتی ہے۔

نلی

۲ ← ۱ ↕

نلی

شکل ۱۔۱

چنانچہ لزوجت لہ $= \dfrac{\dfrac{\text{قوت}}{\text{رقبہ}}}{\dfrac{\text{تفاوت رفتار}}{\text{سطحوں کا درمیانی فاصلہ}}} = \dfrac{\dfrac{\text{ق}}{\text{۲}}}{\dfrac{\text{س}}{\text{لا}}} = \dfrac{\text{ق لا}}{\text{۲ س}}$

اس سے لہ کی تعریف کی جا سکتی ہے۔

(ا) شعری نلی میں سے مائع کا بہنا :۔ مائع کو ہم چونکہ بچکا نہیں سکتے لہذا کسی نلی میں جتنے حجم کا مائع داخل ہوگا اتنا ہی اس میں سے خارج بھی ہوگا۔

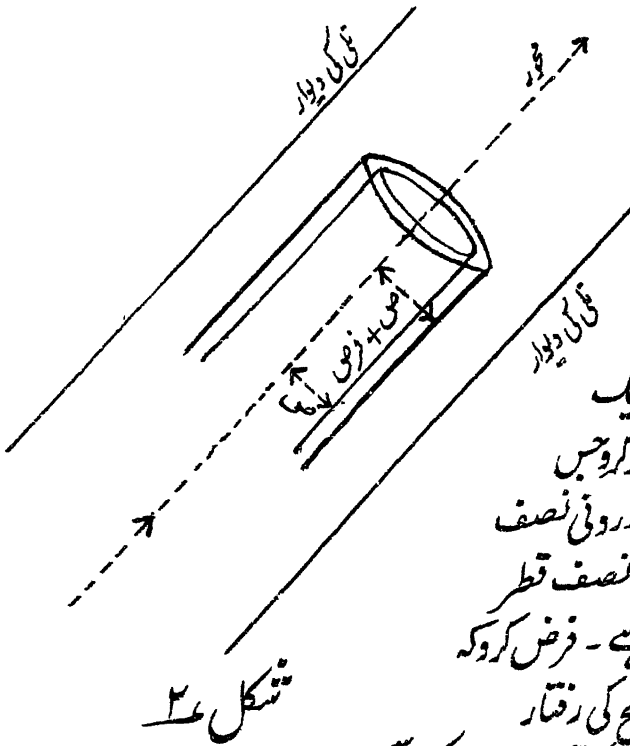
نلی کی دیوار

محور

ص + فرص

ص

نلی کی دیوار

شکل ۲ے

شکل ۲ے میں ایک شعری نلی بڑے پیمانہ پر دکھائی گئی ہے جس میں مائع بہہ رہا ہے۔ اس مائع کے ایک ایسے اسطوانہ پر غور کرو جس کا طول یکائی اور اندرونی نصف قطر ص اور بیرونی نصف قطر ص + فرص ہے۔ فرض کرو کہ مائع کی اندرونی سطح کی رفتار س + فرس (محور کے قریب ہونے کی وجہ سے) اور بیرونی سطح کی س ہے۔

میکسول کے کلیہ کی رو سے اس اسطوانہ کی اندرونی سطح پر مماسی قوت $=$ ۲ π ص لہ $\dfrac{\text{فرس}}{\text{فرص}}$ $=$ ص کا کوئی تفاعل $=$ ف (ص)

اور مماسی قوت اس اسطوانہ کی بیرونی سطح پر = ف (ص + فرص) =

= ف (ص) + فرص فَ (ص)

لہذا حاصل قوت مائع کے اسطوانہ پر = ف (ص + فرص) - ف (ص)

= فرص فَ (ص)

$$= \text{فرص } ۲\pi \text{ لہ } \frac{\text{فر}}{\text{فرص}} \left( \frac{\text{ص فرس}}{\text{فرص}} \right)$$

فرض کرو کہ نلی کا طول = ل اور اسکے دونوں سروں کا فرق دباؤ = د

اس صورت میں دباؤ فی اکائی طول = $\frac{\text{د}}{\text{ل}}$

اس اسطوانہ پر دباؤ کی وجہ سے حاصل قوت = ۲ $\pi$ ص فرص $\frac{\text{د}}{\text{ل}}$

اب چونکہ مائع کی حرکت یکساں ہے اسوجہ سے کہ وہ پچکایا نہیں جا رہا ہے۔

$$\therefore ۲\pi \text{ ص فرص } \frac{\text{د}}{\text{ل}} + \text{فرص } ۲\pi \text{ لہ } \frac{\text{فر}}{\text{فرص}} \left( \frac{\text{ص فرس}}{\text{فرص}} \right) = \text{صفر}$$

$$\text{یعنی لہ } \frac{\text{فر}}{\text{فرص}} \left( \frac{\text{ص فرس}}{\text{فرص}} \right) = - \frac{\text{د}}{\text{ل}} \text{ ص}$$

$$\therefore \text{لہ فر} \left( \frac{\text{ص فرس}}{\text{فرص}} \right) = - \frac{\text{د}}{\text{ل}} \text{ ص فرص}$$

اس کو تکملانے سے

$$\text{لہ } \frac{\text{ص فرس}}{\text{فرص}} = - \frac{\text{د}}{\text{ل}} \cdot \frac{\text{ص}^۲}{۲} + \text{گ}$$

جہاں گ = مستقل

$$\text{یعنی لہ فرس} = - \frac{\text{د}}{\text{ل}} \frac{\text{ص}}{۲} \text{ فرص} + \text{گ } \frac{\text{فرص}}{\text{ص}}$$

اس کو دوبارہ تکملانے سے

$$\text{لہ س} = - \frac{\text{د}}{\text{ل}} \frac{\text{ص}^۲}{۴} + \text{گ لوگ ص} + \text{گَو}$$

جہاں گَو = دوسرا مستقل

اب جبکہ ص = صفر یعنی محور پر رفتار سا جیسا کہ ضابطہ میں اندراج سے حاصل ہوتا ہے — ∞ کے مساوی نہیں ہے (بلکہ صرف اعظم ہے) اس لئے گ' کو صفر ہونا چاہیئے۔

$$\therefore \text{لہ}\,\text{سا} = -\frac{\text{د}}{\text{ل}}\cdot\frac{\text{ص}^2}{4} + \text{گ}'$$

اب جبکہ ص = ف = نلی کا نصف قطر

تو سا = صفر (کیونکہ نلی کی دیوار پر رفتار صفر ہے)

ان کا اندراج کرنے سے :—

$$\text{گ}' = \frac{\text{د}}{\text{ل}}\cdot\frac{\text{ف}^2}{4}$$

$$\therefore \text{لہ}\,\text{سا} = \frac{\text{د}}{4\,\text{ل}}\left(\text{ف}^2 - \text{ص}^2\right)$$

$$\text{یعنی}\ \text{سا} = \frac{\text{د}}{4\,\text{ل}\,\text{لہ}}\left(\text{ف}^2 - \text{ص}^2\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

مائع کا وہ حجم جو فی ثانیہ خارج ہوا = حہ = رفتار × رقبہ

$$= \int_{\text{صفر}}^{\text{ف}} \text{سا}\left(2\pi\,\text{ص}\,\text{ڈص}\right) = \int_{\text{صفر}}^{\text{ف}} \frac{\text{د}}{4\,\text{ل}\,\text{لہ}}\left(\text{ف}^2 - \text{ص}^2\right) 2\pi\,\text{ص}\,\text{ڈص}$$

$$= \frac{\text{د}\,\pi\,\text{ف}^4}{8\,\text{لہ}\,\text{ل}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

اس ضابطہ کو پوائسیل نے سنہ ۱۸۴۰ء میں حاصل کیا تھا۔

**تجربی تفصیلات** :— شکل ۳ میں ا ب ایک شعری نلی ہے جو ایک اسطوانہ نما برتن میں قائم کردی گئی ہے۔ برتن میں پانی کی بلندی مستقل رکھی جاتی ہے تاکہ نلی کے سرے ب پر دباؤ مستقل رہے۔
اس بلندی کو اور نیز شعری نلی کو بدل بدل کر مشاہدات لئے جاتے ہیں۔

ن میں پانی کی وہ مقدار جو ایک خاص وقفہ کے بعد جمع ہوتی ہے، تول لی جاتی ہے اور اس طرح فی ثانیہ جمع ہونے والے پانی کا وزن دریافت ہو جاتا ہے۔ چونکہ پانی کی کثافت (جو ایک ہے) ہمیں معلوم ہے لہذا فی ثانیہ جس حجم کا پانی جمع ہوا یا نلی سے خارج ہوا معلوم ہو جاتا ہے۔

شکل ۳

اگر د، ف اور ل کی قیمتیں معلوم ہوں تو ہم لہ معلوم کر سکتے ہیں۔

ا پر صرف کرہ ہوائی کا دباؤ ہے اور ب پر کرہ ہوائی کا دباؤ + ب ج ثہ جہاں ب = پانی کے اسطوانہ کی بلندی، سطح سے ب تک اور ثہ = پانی کی کثافت

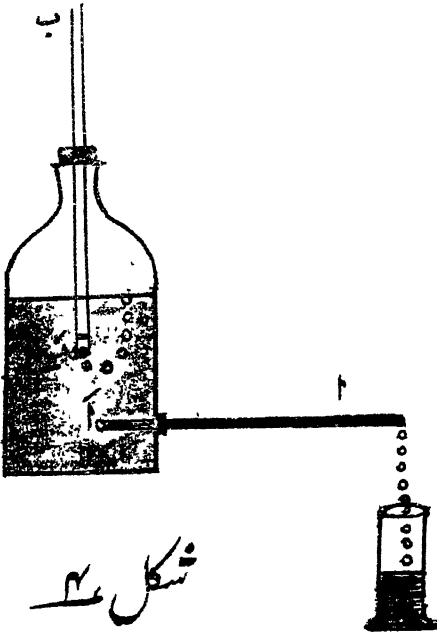
∴ فرق دباؤ = ب ج ثہ = ب ج چونکہ پانی کے لئے ثہ = ا

$$\therefore \text{حہ} = \frac{\text{ب ج } \pi \text{ ف}^4}{8 \text{ لہ ل}}$$

اس سے پانی کیلئے لزوجت معلوم کر سکتے ہیں۔

لزوجت کو "ڈائین فی مربع سمر فی رفتاری ڈھال" یا زیادہ سہولت کے لئے "پوائیسوں" میں لکھا جاتا ہے۔ اس اصطلاح کو سب سے پہلے ڈیلی اور پارسنے ۱۹۱۳ء میں پیش کیا تھا۔

اگر کوئی مائع لیا جائے تو $\frac{\text{ب ج ثہ } \pi \text{ ف}^4}{8 \text{ لہ ل}} = \frac{\text{م}}{\text{ثہ}}$، جہاں م = فی ثانیہ جمع شدہ مائع کی کمیت۔

اسی تجربہ کو شکل ۴۸ کی ترتیب کے مطابق بھی کیا جا سکتا ہے۔

ب بَ ایک معمولی شیشہ کی نلی ہے جو ایک بوتل میں شکل ۴۸ کے مطابق کاک اور موم یا لاک وغیرہ سے جوڑ دی جاتی ہے۔ نچلا سرا بَ مائع میں ڈوبا ہوا ہوتا ہے۔ ا اَ ایک شعری نلی ہے جس میں سے مائع جب باہر نکلتا ہے تو بوتل میں چونکہ ہوا بند ہے، ایک خاص وقت کے بعد نلی کے سرے بَ سے ہوا کے بلبلے نکلنے لگتے ہیں۔



شکل ۴۸

یعنی اس کا مطلب یہ ہوگا کہ بَ پر کرہ ہوائی کا دباؤ ہے جو وہاں مستقل ہوتا ہے۔ اَ پر کے دباؤ کو ہم معلوم کر سکتے ہیں اور یہ، بَ پر کے کرہ ہوائی کے دباؤ + ب ج ثہ کے مساوی ہے جہاں ب سے اَ اور بَ کی درمیانی بلندی مراد ہے جس کو متحرک خوردبین کے ذریعہ معلوم کر لیا جا سکتا ہے۔

اس طرح کے عمل سے یہ فائدہ ہے کہ اَ پر دباؤ مستقل رہتا ہے اور مائع کی زیادہ مقدار لینے کی ضرورت نہیں رہتی۔ اس کو میریٹ کی بوتل سے موسوم کیا جاتا ہے۔

اس تجربہ میں ضروری ہے کہ شعری نلی کے تراش عمودی کا رقبہ حتی الامکان یکساں ہو۔ نلی کے نصف قطر کی چوتھی طاقت ضابطۂ لزوجت میں استعمال ہونے کی وجہ سے نہایت احتیاط کے ساتھ نلی کے نصف قطر کی

قیمت دریافت کرنی ہوگی۔ اس کے لئے نلی کو پارے سے بھر کر ڈوری کے طول کو نہایت صحت کے ساتھ دریافت کر لینا چاہیئے۔ پھر پارے کو تول کر اس کی معلوم کثافت سے اُس کا حجم دریافت کرنا ہوگا۔ پارے کے اس حجم کو اس کی ڈوری کے طول سے تقسیم کرنے سے نلی کے تراش عمودی کا رقبہ معلوم ہو جائے گا۔ اس طرح نصف قطر کی صحیح قیمت معلوم ہو جائے گی۔

چونکہ مائع کی لزوجت، اس کی تپش کے ساتھ فوراً متغیر ہونے لگتی ہے اس لئے دوران تجربہ میں تپش کو مستقل رکھنا بھی ضروری ہے۔

صحیح ضابطہ :— شعری نلی کے سرے ب پر دباؤ وہ نہیں ہے جو ب کے اوپر کے حصہ پر ہوتا ہے۔ اس کی وجہ یہ ہے کہ اوپر والے مائع کا حصہ، لزوجت کی قوتوں کے باوجود، مائع کو صرف شعری نلی میں، داخل ہی نہیں کرتا بلکہ مائع میں رفتار، یعنی توانائی بالحرکت بھی پیدا کرتا ہے۔ اوپر والے مائع کا حصہ مائع کو متحرک رکھنے کے لئے کام بھی کرتا رہتا ہے، اس لئے دباؤ د، ب ج ثہ کے مساوی نہ ہوگا بلکہ اس سے کم ہوگا کیونکہ مائع کے داخل کرنے اور اس میں توانائی بالحرکت پیدا ہونے سے دباؤ بٹ کر کم ہو جاتا ہے۔

لہذا کام اکائی وقت میں = دباؤ × حہ = ب ج ثہ حہ، بشرطیکہ مائع ساکن ہوتا۔ لیکن یہ کام، مائع کو، لزوجت والی قوتوں کی مزاحمت کے باوجود نلی میں داخل کرنے اور اس میں توانائی بالحرکت پیدا کرنے میں، صرف ہوتا ہے۔

اور صحیح کام جو اکائی وقت میں ہمیں چاہیئے = د حہ

جہاں د = صحیح دباؤ

اس لئے یکائی وقت میں کام میں فرق = ب ج ثہ حہ − د حہ

= وہ کام جو یکائی وقت میں توانائی بالحرکت پیدا کرنے میں صرف ہوا

$$= \frac{1}{2}\, ثہ \int_{صفر}^{ق} ر^{2} \times ر\ 2\ \pi\ ص\ فر ص$$

مساوات (۱) اور (۲) کی مدد سے $\text{م} = \frac{۲\,\text{حہ}}{\pi\,\text{ف}^{۴}}(\text{ف}^{۲} - \text{ص}^{۲})$

لہٰذا وہ کام جو یکائی وقت میں توانائی بالحرکت پیدا کرنے میں صرف ہوا

$$= \frac{۱}{۲}\,\text{ث} \int_{\text{صفر}}^{\text{ف}} \left\{ \frac{۲\,\text{حہ}}{\pi\,\text{ف}^{۴}}(\text{ف}^{۲} - \text{ص}^{۲}) \right\}^{۳} ۲\pi\,\text{ص}\,\text{د}\text{ص}$$

$$= \frac{\text{ث}\,\text{حہ}^{۳}}{\pi^{۲}\,\text{ف}^{۴}}$$

$$\therefore \text{ب ج ث حہ} - \text{د حہ} = \frac{\text{ث}\,\text{حہ}^{۳}}{\pi^{۲}\,\text{ف}^{۴}}$$

یعنی $\text{ب ج ث} - \text{د} = \frac{\text{ث}\,\text{حہ}^{۲}}{\pi^{۲}\,\text{ف}^{۴}}$

یعنی $\text{ج ث}\left(\text{ب} - \frac{\text{حہ}^{۲}}{\text{ج}\,\pi^{۲}\,\text{ف}^{۴}}\right) = \text{د}$

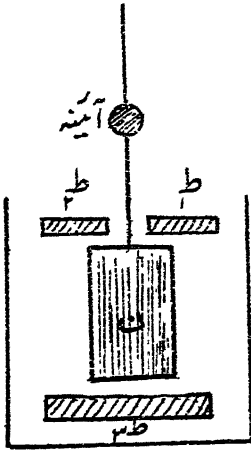
اس مساوات سے ظاہر ہے کہ د، ب ج ث کے مساوی نہیں ہے بلکہ اس سے کم ہے، یعنی بلندی ب، اصل سے کسی قدر کم ہے لہٰذا اس تجربہ میں بلندی ب (جو خوردبین سے حاصل ہوتی ہے) میں سے $\frac{\text{حہ}^{۲}}{\text{ج}\,\pi^{۲}\,\text{ف}^{۴}}$ کو تفریق کرنا چاہیئے۔

چنانچہ صحیح بلندی $= \text{ب} - \frac{\text{حہ}^{۲}}{\text{ج}\,\pi^{۲}\,\text{ف}^{۴}}$

$$= \text{ب} - \frac{\text{م}^{۲}}{\text{ج}\,\text{ث}^{۲}\,\pi^{۲}\,\text{ف}^{۴}}$$

یہ ولبرفورس، ہیگن باق اور کائیٹے کی تصیح کہلاتی ہے۔[1]

لہٰذا کسی مائع کے لئے صحیح ضابطہ:—

$$\frac{\text{م}}{\text{ث}} = \frac{\pi\,\text{ج ث}\,\text{ف}^{۴}\left(\text{ب} - \frac{\text{م}^{۲}}{\text{ج}\,\text{ث}^{۲}\,\pi^{۲}\,\text{ف}^{۴}}\right)}{۸\,\text{لہ}\,\text{ل}} \quad \ldots\ldots (۳)$$

شکل ۵

(۲) گردشی اسطوانہ کا طریقہ :- شکل ۵ میں ن ایک پیتل کا ٹھوس اسطوانہ ہے اور ن۱ اسطوانہ نما برتن ہے۔

ن کو فاسفر برانز کے تار کے ذریعہ لٹکایا گیا ہے ۔ ن اور ن۱ کے درمیانی خصہ میں وہ مائع ڈالا جاتا ہے جس کی لزوجت دریافت کرنی ہوتی ہے۔

بیرونی اسطوانہ ن۱ کو موٹر کے ذریعہ گھمایا جاتا ہے چنانچہ مائع کے پرت بھی دائری وضع میں گھومتے ہیں جوں جوں ہم اسطوانہ ن کی سطح سے قریب ہوتے جائیں گے ان دائری پرتوں کی رفتار بھی بتدریج گھٹتی جائے گی۔ جب ن۱ کو گھمایا جاتا ہے تو ن بھی ایک خاص زاویہ میں گھوم جاتا ہے۔ اس کو آئینہ کے ذریعہ معلوم کیا جا سکتا ہے۔

ط۱، ط۲ اور ط۳ محافظ حلقے ہیں جو ن کے اوپر اور نیچے گھومنے والے مائع کے اثر کو ساقط کر دیتے ہیں۔ یہاں مائع کی حرکت دائری ہے لیکن شعری نلی میں مائع خط مستقیم میں حرکت کرتا ہے۔

$$ل = \frac{ق لا}{۲ \pi}$$

فرض کرو کہ ن ویں پرت کی زاوئی رفتار $\omega$ ہے اور نصف قطر ص اور (ن + ۱) ویں پرت کی زاوئی رفتار $\omega$ + فر$\omega$ اور نصف قطر ص + فر ص ہے اس صورت میں دونوں کے زاوئی رفتاروں میں فرق = فر$\omega$

اور دونوں پرتوں کے درمیان فاصلہ لا = فر ص

اور دونوں میں تفاوت رفتار سا = ص فر $\omega$

$$\therefore \text{قوت ق} = \frac{\text{له ۲ ص فر}\,\omega}{\text{فر ص}} =$$

$$= \frac{\text{له ۲}\,\pi\,\text{ص ل ص فر}\,\omega}{\text{فر ص}}$$

جہاں ل = اندرونی اسطوانہ ن کا طول مائع کی سطح سے اس کے نچلے حصہ تک۔

(جفت = قوت × درمیانی فاصلہ)

∴ جفت جو اس اسطوانہ ن پر عمل کرتا ہے = گ ع (فرض کرو)

$$= \frac{\text{له ۲}\,\pi\,\text{ص ل ص فر}\,\omega\,\text{ص}}{\text{فر ص}}$$

$$\text{یعنی}\quad \frac{\text{گ ع فر ص}}{\text{ص}^{۳}} = ۲\,\pi\,\text{له فر}\,\omega\,\text{ل}$$

$$\text{لہذا پورا جفت} = \int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \frac{\text{گ ع فر ص}}{\text{ص}^{۳}} = \int_{\text{صفر}}^{\bar{\omega}} ۲\,\pi\,\text{له ل فر}\,\omega$$

جہاں ا = اندرونی اسطوانہ کا نصف قطر، ب = بیرونی اسطوانہ کا نصف قطر

اور $\bar{\omega}$ = بیرونی اسطوانہ کی زاویٔ رفتار

$$\therefore \text{گ ع}\left[-\frac{۱}{۲\,\text{ص}^{۲}}\right]_{\text{ا}}^{\text{ب}} = ۲\,\pi\,\text{له ل}\,\bar{\omega}$$

$$\text{یعنی}\quad \frac{۱}{\text{ب}^{۲}} + \frac{۱}{\text{ا}^{۲}} = \frac{۴\,\pi\,\text{له}\,\bar{\omega}\,\text{ل}}{\text{گ ع}}$$

$$\therefore \text{گ ع} = ۴\,\pi\,\text{له}\,\bar{\omega}\,\text{ل}\,.\,\frac{\text{ا}^{۲}\,\text{ب}^{۲}}{\text{ب}^{۲}-\text{ا}^{۲}} = \text{ٹ ط} \quad \ldots\ldots\ldots (۴)$$

جہاں ٹ = پیچیدگی کا جفت فی اکائی زاویہ

اور ط = زاویۂ انصراف

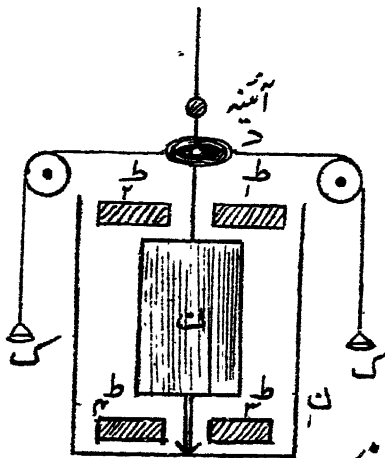
اس ضابطہ میں اگر ثہ معلوم ہو جائے تو لہ معلوم ہو سکتا ہے۔

ہمیں معلوم ہے کہ اندرونی اسطوانہ کا وقت دوران و =

$= ۲\pi\sqrt{\frac{مج}{ثہ}}$ جہاں مج = جمود کا معیار اثر اندرونی اسطوانہ کا اُسکے محور کے گرد۔

ثہ اس ضابطہ سے معلوم ہو جاتا ہے۔

اس آلہ سے پانی، تیل وغیرہ کی لزوجیت معلوم کی جا سکتی ہے۔

ایسے مائعات مثلاً ارنڈی کا تیل، گلیسرین وغیرہ جن کی لزوجت بہت زیادہ ہوتی ہے دئے جائیں تو شکل ۶ میں بتایا ہوا آلہ استعمال کیا جاتا ہے، اس لئے کہ پہلے طریقہ میں (مائع زیادہ لزج ہونے کی وجہ سے) زاویہ ط کے کافی بڑھ جانے کا احتمال ہے۔

اس شکل میں د ایک چرخی ہے جس کے اطراف ایک ڈوری لپیٹی جاتی ہے اور اسکے دونوں سروں سے دو ترازو کے پلڑے باندھ دئے جاتے ہیں، اس تجربہ میں بھی بیرونی اسطوانہ، پہلے کی طرح موٹر کے ذریعہ گھمایا جاتا ہے اور دونوں پلڑوں میں ایسی مناسب کمیتیں ک رکھی جاتی ہیں کہ اندرونی اسطوانہ میں کوئی حرکت یا انصراف نہ ہو، یعنی یہ اپنی اصلی حالت پر جبکہ بیرونی اسطوانہ گھوم رہا ہو قائم رہے۔

شکل ۶



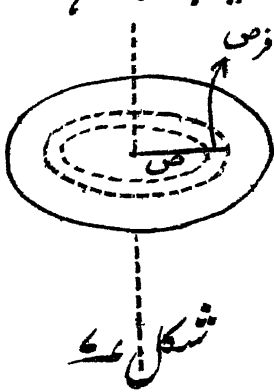
اس صورت میں جفت گ ع = ۲ ک ج ف جہاں ف = چرخی کا نصف قطر اور ک ج = کسی ایک پلڑے کا وزن

$$\therefore \text{۲ ک ج ف} = \text{۴}\pi\ \text{لہ}\ \omega\ \text{ل} \cdot \frac{\text{ا}^{\text{۲}}\ \text{ب}^{\text{۲}}}{\text{ب}^{\text{۲}} - \text{ا}^{\text{۲}}}$$

پس لہ کی قیمت معلوم کی جا سکتی ہے۔

اس میں بھی محافظ حلقے استعمال کئے جاتے ہیں ورنہ سروں کا اثر زائل کرنے کے لئے دو تجربے کرنے کی ضرورت ہوگی۔ ک، ل اور ω کو بدلکر درج کرنے اور اس طرح حاصل کردہ دونوں مساواتوں کو تفریق کرنے سے سروں کے اثر کا مستقل ساقط کیا جا سکتا ہے۔

(۳) **گردشی قرص کا طریقہ** (۲) :- فرض کرو کہ بڑے قطر کا ایک دائری قرص، مستقل رفتار سے، ایسے انتصابی محور کے گرد گردش کر رہا ہے جو قرص کے مرکز میں سے گزرتا ہے اور قرص کے مستوی کے علی القوائم بھی ہے۔ اس قرص کے ٹھیک اوپر فرض کرو کہ ایک دوسرا دائری قرص، نہایت پتلے تار سے لٹکایا جاتا ہے اور اس تار کے ساتھ ایک مستوی آئینہ جوڑا جاتا ہے۔

شکل ۱۷

اوپر کا قرص اس طرح رکھا جاتا ہے کہ دونوں قرص ایک دوسرے کے متوازی رہتے ہیں اور تار نچلے قرص کے محور سے منطبق رہتا ہے۔ اب اگر دونوں قرصوں کے درمیاں ایسا کوئی مائع بھر دیا جائے جس کی لزوجت مطلوب ہو تو نچلے قرص کی گردش کی وجہ سے متحرک مائع کا تقاضا یہ ہوگا کہ اوپر کے قرص کو اس کے محور کے گرد گھمانے لگے۔

فرض کرو کہ نچلے قرص کی زاویائی رفتار ω ہے۔ تب اس پر کے کسی نقطہ کی (جو مرکزِ قرص سے ص فاصلہ پر ہو) رفتار ω ص کے مساوی ہوگی۔ اوپر کے قرص کو ہم مرکزی چھوٹے چھوٹے دھجیوں میں تقسیم کرو (دیکھو شکل ۱۷)

اور ان میں سے ایک دھجی کی، جو مرکز سے ص فاصلہ پر ہے، موٹائی فرص
کے مساوی تصور کرو۔ اس صورت میں دھجی کا رقبہ ۲ π ص فرص ہوگا۔
میکسول کے کلیہ سے، اوپر والے قرص کے اس چھوٹے سے رقبہ پر عمل کرنے
والی مماسی قوت

$$= \frac{\text{لہ}\ 2\pi\ \text{ص فرص ص}\ W}{\text{ف}}$$

(جہاں ف دونوں قرصوں کا درمیانی فاصلہ ہے)

$$\therefore \text{جفت جو محور کے گرد عمل کریگا} = \frac{\text{لہ}\ 2\pi\ \text{ص فرص ص}\ W\ \text{ص}}{\text{ف}}$$

لہٰذا دیگر دھجیوں کی باعث جو مجموعی جفت عمل کرے گا =

$$\int_{\text{صفر}}^{\text{ط}} \frac{\text{لہ}\ 2\pi\ W\ \text{ص}^3\ \text{فرص}}{\text{ف}} = \frac{\text{لہ}\ \pi\ W\ \text{ط}^4}{2\ \text{ف}}$$

جہاں ط = اوپر والے قرص کا نصف قطر
لہٰذا اوپر کا قرص اگر عہ زاویہ گھوم جائے تو تھامنے والا
جفت = ثہ عہ   جہاں ثہ = پیچیدگی کا جفت فی اکائی زاویہ

$$\therefore \text{ثہ عہ} = \frac{\text{لہ}\ \pi\ W\ \text{ط}^4}{2\ \text{ف}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

اگر اس قرص کو اہتزاز میں لاکر اسکا وقت دوران دریافت کر لیا جائے
اور اس کے جمود کا معیار اثر معلوم ہو تو ثہ کی قیمت معلوم کی جا سکتی ہے اور اس
طرح مائع کے لیے لہ کی قیمت دریافت کی جا سکتی ہے۔
اس طریقہ کا اطلاق کسی گیس کے لیے بھی ہو سکتا ہے۔

(۴) قرص کو اہتزاز میں لانے سے: ۔ کوئی جسم کسی لزج مائع میں اہتزاز
کرے تو اس کی حرکت میں واسطہ کی اندرونی رگڑ کی وجہ سے رکاوٹ پیدا
ہونے لگے گی۔ لزوجیت کی رقوم میں اس اثر کا حسابی طریقہ سے دریافت

کرنا، آسان نہیں ہے -

او - ای - میئر نے ثابت کیا ہے کہ اگر ایک پتلے قرص کو اس تار کی مروڑ کے زیر اثر جس سے کہ یہ قرص بندھا ہوا ہوتا ہے، کسی مائع یا گیس میں اہتزاز کرنے دیا جائے تو

$$\text{له} = \frac{16\,\text{مج}^2}{\pi\,\text{ثہ}\,\text{و}\,(\text{ط}^4 + 2\,\text{ط}^3\,\text{ف})^2} \cdot \left\{ \left(\frac{\text{فہ}_1 - \text{فہ}}{\pi}\right) + \frac{(\text{فہ}_1 - \text{فہ})^2}{\pi^2} + \cdots\cdots \right\}$$

جہاں مج = قرص اور اسکے سہاروں کے جمود کا معیار اثر

ط = قرص کا نصف قطر

ف = قرص کی موٹائی

و = وقت دوران جبکہ قرص خلا (یا ہوا) میں لٹکایا گیا ہو

فہ = لوکارثمی تنزل (اساس "ق" یہ) . مائع میں چھوٹے اہتزاز کیلئے -

فہ₁ = " " " " " ہوا " "

ثہ = مائع کی کثافت

(۵) اسٹوک کے کلیہ سے :- ایک چھوٹا کرہ کسی واسطہ (مائع یا گیس) میں، بالکل خفیف یکساں رفتار سے حرکت کرے تو اس کی حرکت کو روکنے والی (یا مزاحم) قوت = ۶ π له ص س جہاں له = واسطہ کی لزوجیت، ص = کرہ کا نصف قطر، [handwritten insertion: π۶ = مستقل (غیر)]

اور س = کرہ کی یکساں رفتار -

اس ضابطہ کو سب سے پہلے سر جارج اسٹوک نے پیش کیا -

جب کرہ کسی مائع یا گیس میں گرتا ہے تو ابتدا میں اس کی رفتار کم ہوتی ہے یعنی اس وقت واسطہ کی مزاحم قوت (جو لزوجیت کی وجہ سے ہوتی ہے) زیادہ ہوتی ہے - پھر رفتار بڑھتی جاتی ہے حتی کہ مزاحم قوت کرہ کے موثر وزن کے

مساوی ہو جاتی ہے اور اس کے وقوع کے بعد کرہ یکساں رفتار سے گرنے لگتا ہے۔ اس یکساں رفتار کو "فاصل رفتار" سے تعبیر کیا جاتا ہے۔

کرہ کا موثر وزن $= \frac{4}{3}\pi\, \text{ص}^3\, (\text{ث} - \text{ثہ})\, \text{ج}$

جہاں ث = کرہ کی کثافت

ثہ = واسطہ کی کثافت

ص = کرہ کا نصف قطر

تعادل کیلئے $6\pi\, \text{لہ}\, \text{ص}\, \text{س} = \frac{4}{3}\pi\, \text{ص}^3 (\text{ث} - \text{ثہ})\, \text{ج}$

یعنی $\text{لہ} = \dfrac{\frac{2}{9}\, \text{ص}^2 (\text{ث} - \text{ثہ})\, \text{ج}}{\text{س}}$

اگر کرہ کی کمیت = ک تو $\dfrac{\text{ک}}{\frac{4}{3}\pi\, \text{ص}^3} = \text{ث}$

یعنی $\text{ص}^3 = \dfrac{3\,\text{ک}}{4\pi\, \text{ث}}$

$\therefore\ \text{ص}^2 = \left(\dfrac{3\,\text{ک}}{4\pi\, \text{ث}}\right)^{\frac{2}{3}}$

لہذا واسطہ کی لزوجت $\text{لہ} = \left\{ \frac{2}{9}\, \text{ج} \left(\dfrac{3\,\text{ک}}{4\pi\, \text{ث}}\right)^{\frac{2}{3}} . \dfrac{(\text{ث} - \text{ثہ})}{\text{س}} \right\}$

اگر کرہ کی کمیت اور اس کی رفتار و کثافت معلوم ہو جائے تو آسانی سے واسطہ کی لزوجیت دریافت کی جا سکتی ہے۔

کوئی لزج مائع مثلاً ارنڈی کا تیل یا گلیسرین وغیرہ لیکر شیشہ کے اسطوانہ میں رکھ دیا جاتا ہے اور پارہ کے نہایت چھوٹے چھوٹے قطرے (جو کروی وضع کے تصور کئے جا سکتے ہیں) مائع میں سے گرائے جاتے ہیں۔

لا

ما

شکل ۸

اسطوانے کی دیوار کے درمیانی حصہ میں لا اور ما

دو نشانات مقرر کرلئے جاتے ہیں اور ان کا درمیانی فاصلہ پیمانہ سے ناپ لیا جاتا ہے۔ چلرکنی گھڑی کی مدد سے لا ما فاصلہ طے کرنے کے لئے پارہ کا قطرہ جو وقت لیتا ہے وہ دریافت کر لیا جاتا ہے اس طرح پارہ کے قطرہ کی رفتار معلوم ہو جاتی ہے جس کو یکساں اس وجہ سے مان لیا جا سکتا ہے کہ لا اور ما نقطے اسطوانہ کے درمیانی حصہ میں واقع ہیں۔ پارہ کی کثافت معلوم ہے۔ کرہ کا وزن کسی حساس ترازو کی مدد سے دریافت کر لیا جاتا ہے اور مائع کی کثافت ثہ کثافت اضافی کی بوتل سے معلوم کر لی جا سکتی ہے۔

تجربہ میں پارہ کے قطروں کو بہت چھوٹے لینا چاہیئے ورنہ نظریہ صحیح نہ ہوگا۔ گرتے وقت قطرے اگر بڑے ہوں تو ان کی شکل کروی نہیں بلکہ ناقص نما ہوگی اور قطروں کے اطراف جو مائع ہوگا اس میں تلاطم یا ہیجان پیدا ہو جائیگا۔ تجربہ میں چونکہ ک کی قیمت بالکل چھوٹی ہونی چاہیئے (تاکہ نتائج صحیح حاصل ہوں) اس لئے ک کو ۰.۰۱ گرام سے بھی کم لینا چاہیئے لیکن اتنا کم وزن معمولی ترازو سے زیادہ صحت کے ساتھ نہیں دریافت کیا جا سکتا اس میں فیصد خطا کے زیادہ ہو جانے کا احتمال رہتا ہے اس لئے تجربہ میں ایک بڑا قطرہ تقریباً ۰.۱ گرام کا لیا جاتا ہے اور ایک حساس ترازو میں تول کر اسکا صحیح وزن $ک_۰$ گرام معلوم کر لیا جاتا ہے۔ اسکے بعد اس قطرہ کو تقریباً مساوی جسامت والے دس پارہ قطروں میں تقسیم کر دیا جاتا ہے۔ فرض کرو کہ ان کی کمیتیں $ک_۱$، $ک_۲$، $ک_۳$ ......... وغیرہ ہیں اور ان کی یکساں رفتاریں ما اور لا کے درمیان بالترتیب $س_۱$، $س_۲$، $س_۳$ .......... وغیرہ ہیں۔

تب پہلے قطرہ کے لئے لہ $= \frac{۲}{۹} ج \left( \frac{۳ ک_۱}{۴ \pi ث} \right)^{\frac{۲}{۳}} \left\{ \frac{ث - ثہ}{س_۱} \right\}$

$= \frac{ع (ک_۱)^{\frac{۲}{۳}}}{س_۱}$ جہاں ع = مستقل =

$$= \frac{۲}{۹} ج \left(\frac{۳}{۴\pi ث}\right)^{\frac{۲}{۳}} (ث - ثہ)$$

اسی طرح دوسرے قطرہ کے لئے $ل_۲ = \frac{ع (ک_۲)^{\frac{۲}{۳}}}{س_۲}$

اور تیسرے قطرہ کے لئے $ل_۳ = \frac{ع (ک_۳)^{\frac{۲}{۳}}}{س_۳}$

علیٰ ہذا ن قطروں تک ...............

چونکہ لزوجیت ایک خاص تپش پر مستقل رہتی ہے اسلئے

$ل_۱ = ل_۲ = ل_۳ = $ ........ ن اعداد تک

یعنی $\frac{(ک_۱)^{\frac{۲}{۳}}}{س_۱} = \frac{(ک_۲)^{\frac{۲}{۳}}}{س_۲} = \frac{(ک_۳)^{\frac{۲}{۳}}}{س_۳} = $ ..... ن اعداد تک

ہم جانتے ہیں کہ اگر $\frac{ا_۱}{ب_۱} = \frac{ا_۲}{ب_۲} = \frac{ا_۳}{ب_۳}$ ......... ن عدد تک

تب $\frac{ا_۱}{ب_۱} + \frac{ا_۲}{ب_۲} + \frac{ا_۳}{ب_۳} + $ ........ ن عدد تک =

$$= ن \left(\frac{ا_۱ + ا_۲ + ا_۳ + ا_۴ + \text{........ ن عدد تک}}{ب_۱ + ب_۲ + ب_۳ + \text{........ ن عدد تک}}\right)$$

کیونکہ $(ب_۱ + ب_۲ + ب_۳ + \text{.... ن عدد تک})\left(\frac{ا_۱}{ب_۱} + \frac{ا_۲}{ب_۲} + \frac{ا_۳}{ب_۳} + \text{.... ن عدد تک}\right)$

$= (ا_۱ + ا_۱ + ا_۱ + \text{.... ن مرتبہ}) + (ا_۲ + ا_۲ + ا_۲ + ا_۲ + \text{..... ن مرتبہ}) +$

$+ (ا_۳ + ا_۳ + ا_۳ + \text{..... ن مرتبہ}) + (ا_۴ + ا_۴ + ا_۴ + \text{...... ن مرتبہ}) +$

$(\text{..........}) + (\text{..........})$ ........ ن عدد تک

$$= ن \left( ا_1 + ا_2 + ا_3 + ا_4 + \ldots\ldots\ldots \text{ن عدد تک} \right)$$

اسی طرح $\quad لہ_1 + لہ_2 + لہ_3 + \ldots\ldots = عہ \frac{(ک_1)^{\frac{2}{3}}}{س_1} + عہ \frac{(ک_2)^{\frac{2}{3}}}{س_2} + \ldots\ldots$

$$= عہ \left[ \frac{(ک_1)^{\frac{2}{3}}}{س_1} + \frac{(ک_2)^{\frac{2}{3}}}{س_2} + \frac{(ک_3)^{\frac{2}{3}}}{س_3} + \ldots\ldots \text{ن قطروں تک} \right]$$

$$= عہ ن \left[ \frac{(ک_1)^{\frac{2}{3}} + (ک_2)^{\frac{2}{3}} + (ک_3)^{\frac{2}{3}} + \ldots\ldots \text{ن قطروں تک}}{س_1 + س_2 + س_3 + \ldots\ldots \text{ن قطروں تک}} \right]$$

$$= عہ ن \left\{ \frac{\Sigma (ک_1)^{\frac{2}{3}}}{\Sigma س_1} \right\}$$

$$\therefore \frac{لہ_1 + لہ_2 + لہ_3 + \ldots\ldots \text{ن قطروں تک}}{ن} = لہ = \text{اوسط قیمت لزوجت کی}$$

$$= عہ \left\{ \frac{\Sigma ک_1^{\frac{2}{3}}}{\Sigma س_1} \right\} \qquad \therefore لہ^{\frac{3}{2}} = عہ^{\frac{3}{2}} \cdot \left[ \frac{\Sigma ک_1}{\Sigma س_1^{\frac{3}{2}}} \right]$$

لیکن $\Sigma ک_1 = ئ =$ سب قطروں کی کمیت = بڑے قطرے کی کمیت

$$\therefore لہ^{\frac{3}{2}} = \frac{عہ^{\frac{3}{2}} (ئ)}{\Sigma س_1^{\frac{3}{2}}} \quad \text{یعنی} \quad لہ = \frac{عہ\, ئ^{\frac{2}{3}}}{\left[ \Sigma س_1^{\frac{3}{2}} \right]^{\frac{2}{3}}}$$

$$\therefore لہ = \frac{\frac{2}{9} ج (ث - ثہ) \left( \frac{3\, ئ}{4\pi ث} \right)^{\frac{2}{3}}}{\left\{ \Sigma س_1^{\frac{3}{2}} \right\}^{\frac{2}{3}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

اس طریقہ سے جونس نے ۱۸۹۴ء میں گلیسرین کی لزوجت دریافت کی تھی۔

**مائعات کی لزوجت پر تپش کا اثر:-** تپش میں اضافہ ہو تو مائعات کی لزوجت تیزی کے ساتھ گھٹنے لگتی ہے۔ پوائیسل (۴) پہلا شخص تھا

جس نے تپش اور لزوجت کے درمیان تعلق دریافت کیا۔ اسکا ضابطہ حسب ذیل ہے:-

$$لت = \frac{لہ}{۱ + عہ ت + بہ ت^۲}$$

جہاں لت = لزوجت ت° م پر اور لہ = لزوجت صفر° مئی پر اور عہ اور بہ مستقل ہیں۔

کاق نے دریافت کیا کہ پارہ کی لزوجت -۴ر۱۲° م اور +۴۰۳° م کے درمیان حسب ذیل ضابطہ سے حاصل کی جاسکتی ہے[۳]:-

$$لت = ۰۱۶۹۶۹ر۰ - ۶۶۰۵۲......ر۰ ت + ۷۰۸۴۲......ر۰ ت^۲$$

پوئیسی کے مطابق پارہ کی لزوجت ۱۰° م پر = ۰۱۵۷۷ر۰ پوائس

اکثر سائنس دانوں نے متعدد ضابطے تجویز کئے۔ کم تپشوں کے لئے میئر نے یہ ضابطہ تجویز کیا[۴]

$$لت = \frac{لہ}{۱ + عہ ت}$$

سلاٹ[۵] نے بھی متعدد ضابطے تجویز کئے جن میں سے ایک ہماری اغراض کے لئے حسب ذیل ہے:-

$$لت = \frac{ج}{(۱ + ب ت)^ن}$$

جہاں ج، ب اور ن مستقل ہیں جو مائع کی نوعیت پر منحصر ہوتے ہیں۔ اس ضابطہ کو تھارپ اور راجر نے تجربہ سے صحیح پایا اور عملی کاموں میں یہ کارآمد ثابت ہوا ہے۔ تھارپ اور راجر نے ان مستقلوں کی قیمتیں بہت سے مائعات کے لئے دریافت کی تھیں جن میں سے چند حسب ذیل ہیں[۶]:-

| مائع | ج | ب | ن |
|---|---|---|---|
| پانی | ۰۱۷۹۴۴ر۰ | ۰۲۳۱۲۱ر۰ | ۵۴۲۳ر۱ |
| برومین | ۰۱۲۵۳۵ر۰ | ۰۰۸۹۳۵ر۰ | ۴۰۷۷ر۱ |
| کلوروفارم | ۰۰۷۰۰۶ر۰ | ۰۰۶۳۱۶ر۰ | ۸۱۹۶ر۱ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| کاربن بائیسلفائیڈ | ۰٫۰۰۴۲۹۴ | ۰٫۰۰۵۰۲۱ | ۱٫۶۳۲۸ |
| ایتھر | ۰٫۰۰۲۸۶۴ | ۰٫۰۰۷۳۳۲ | ۱٫۴۶۴۴ |
| بنزین | ۰٫۰۰۹۰۵۵ | ۰٫۰۱۱۹۶۳ | ۱٫۵۵۵۴ |
| میتھیل الکوہل | ۰٫۰۰۸۰۸۳ | ۰٫۰۰۶۱۰۰ | ۲٫۶۷۹۳ |
| ایتھیل الکوہل | ۰٫۰۱۷۷۵۳ | ۰٫۰۰۴۷۷۰ | ۴٫۳۷۳۱ |

**ازتکاز کا اثر مائع کی لزوجیت پر :—** جب کسی مائع میں کوئی شے حل کی جاتی ہے تو محلول کی لزوجیت، خالص مائع کی لزوجیت سے زیادہ بھی ہوسکتی ہے یا کم بھی، لہذا آمیزوں یا محلولوں کے لئے کوئی عام کلیہ اب تک نہیں دریافت کیا گیا ہے۔

**دباؤ کا اثر مائع کی لزوجیت پر :—** (۷)

لزج مائعات کی لزوجیت پر دباؤ کا اثر بالکل کم ہوتا ہے۔ روئنٹگن نے یہ دریافت کیا کہ پانی کی لزوجیت دباؤ کے اضافہ سے کم ہوجاتی ہے۔
کاربن ڈائی آکسائیڈ، ایتھر اور بنزین وغیرہ کے لئے وار برگ نے یہ ثابت کیا کہ لزوجیت، دباؤ کے اضافہ سے بڑھتی ہے اور اس کے لئے حسب ذیل ضابطہ اس نے پیش کیا :—

لہ‌د = لہ‌۰ (۱ + عہ د) جہاں لہ‌د = دباؤ د پر لزوجیت
لہ‌۰ = کرہ ہوائی کے دباؤ پر لزوجیت
اور عہ = کوئی مستقل

عام طور پر کئی سو کرۂ ہوائی کے دباؤ پر اکثر مائعات کی لزوجیت میں اضافہ ہوتا ہے۔

**مائعات کی لزوجیت پر ترکیب کا اثر :—** گارتن میستر نے حسب ذیل ضابطہ ایسے مرکبات کے لئے اخذ کیا جن میں تمام تپشوں پر کاربن کے یکساں تعداد کے جواہر موجود ہوں (۸) $\frac{\text{لہ}}{\text{م}}$ = مستقل

جہاں م = مائع کا سالمی وزن

تھارپ اور راجیر[9] نے "سالمی لزوجیت" کی اصطلاح وضع کی، انھوں نے
له اور ح کے حاصل ضرب کو مائع کی "سالمی لزوجیت" سے تعبیر کیا۔
جہاں ح = سالمی حجم۔ انہوں نے یہ بھی دریافت کیا کہ ( $CH_2$ )
گروپ کے لئے ( له ح ) کی قیمت عملی طور پر مستقل رہتی ہے۔

ڈنسٹن نے حسب ذیل ایک اہم ضابطہ دریافت کیا:[10]

لوگ له = ا م + ب

جہاں ا = ایک مشترک مستقل

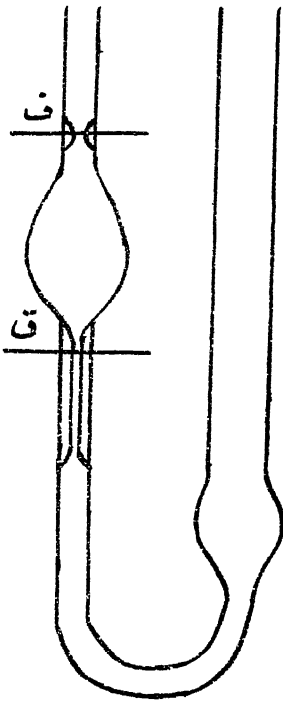
اور ب بھی ایک مستقل ہے جو زیر غور سلسلہ پر منحصر ہوتا ہے۔

**وقت کا اثر مائع کی لزوجیت پر:**[11] مارڈلس نے یہ دریافت کیا کہ بعض محلولوں مثلاً سلولوز اسٹیٹ ( cellulose acetate ) بنزائل الکوہل وغیرہ کی لزوجیت، وقت کے گزرنے پر بڑھتی جاتی ہے۔

## لزوجیت پیما (مائعات کی اضافی لزوجیتوں کی دریافت کیلئے):

بعض دفعہ کسی خاص مائع کی لزوجیت، کسی دوسرے معیاری مائع مثلاً خالص پانی کی لزوجیت کے رقوم میں مستقل تپش پر دریافت کرنے سے بہت سہولت ہوتی ہے۔

اس غرض کے لئے عموماً شعری نلی کا طریقہ اختیار کیا جاتا ہے اور وہ آلہ جو تقریباً ہر جگہ استعمال کیا جاتا ہے اوسٹوالڈ کا لزوجیت پیما ہے جس کی معمولی ساخت کو شکل ۹ میں دکھایا گیا ہے۔

داہنی ساق میں مائع کا ایک مستقل حجم رکھا جاتا ہے، اور بائیں ساق میں نشان ف کے اوپر کھینچ کر اس کو لایا جاتا ہے۔ اس کے بعد پھر مائع کو واپس بہنے دیا جاتا ہے اور ف سے ق تک گرنے میں جتنا وقفہ ہوتا

شکل ۹

ہے اسکو ایک چلر کنی گھڑی کی مدد سے دریافت کرلیا جاتا ہے۔ مائع کے بہنے کی وجہ اوسط دباؤ کی قیمت ب ج ثہ تصور کی جاسکتی ہے۔ جہاں ب = مائع کی اوسط بلندی اور ثہ = مائع کی کثافت

فرض کرو کہ یکساں بلندی ب کے تحت دونوں نشانوں ف اور ق کے درمیان گرنے میں لہ لزوجیت کے مائع کے لئے جو وقفہ و اور لہَ لزوجیت کے معیاری مائع کے لئے جو وقفہ وَ درکار ہوتا ہے دریافت کرلیا جاتا ہے۔ پوائیسل کے ضابطہ سے :-

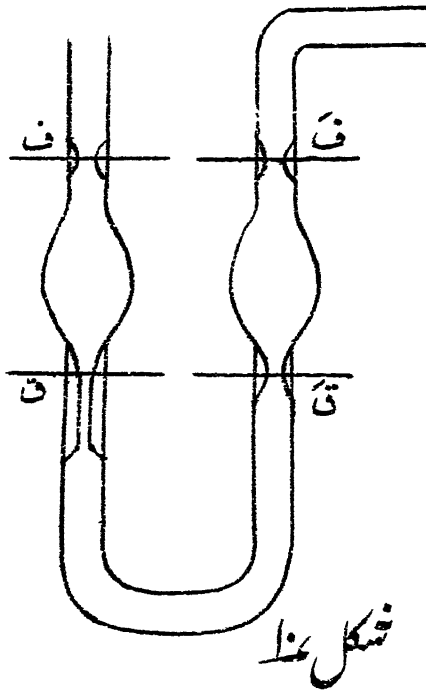
$$\frac{لہَ}{لہ} = \frac{ثہَ\ وَ}{ثہ\ و} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۷)$$

جہاں ثہَ = معیاری مائع کی کثافت

لہذا معیاری مائع کی رقوم میں کسی دوسرے مائع کی مطلوبہ لزوجیت دریافت کی جاسکتی ہے۔

مائع کی لزوجیت اور کثافت میں نسبت "حرکی لزوجیت" کہلاتی ہے۔ اس آلہ سے دونوں مائعات کی حرکی لزوجیتوں میں نسبت، آسانی کے ساتھ، ف اور ق کے نشانوں کے درمیان مائع کے گرنے کے اوقات کی نسبتوں کے رقوم میں دریافت کی جاسکتی ہے۔

مائع کی کثافت کو جاننے کی (جو اوسٹوالڈ کے لزوجیت پیما میں ضروری ہے) یوبلاڈ اور بنگھیم[۱۲] کے لزوجیت پیما میں ضرورت باقی نہیں رہتی۔ یوبلاڈ کا

آلہ شکل عـ۱ میں دکھلایا گیا ہے۔ اس آلہ میں مائع بیرونی ہوا کے دباؤ سے بہنے لگتا ہے۔

دونوں چوغے ایک ہی ناپ اور گنجائش کے ہوتے ہیں اور ایک ہی بلندی پر ایک دوسرے کے متصل رکھے جاتے ہیں۔

ف فَ ق قَ

شکل عـ۱

لزوجت پیما میں مائع کو کھینچکر اتنا بھرا جاتا ہے کہ اس کی سطح فَ اور قَ پر رہتی ہے۔ پھر ہوا کے دباؤ سے اس کو اوپر چڑھایا جاتا ہے اور فَ اور قَ کے نشانوں کے درمیان مائع کے چڑھنے کا وقت دریافت کرلیا جاتا ہے۔ فرض کرو کہ لہ لزوجت کے مائع کے لئے وقت اور دباؤ کی قیمتیں بالترتیب و اور د ہیں اور معیاری مائع کے لئے جس کی لزوجت لَہ ہے متناظر وقت اور دباؤ وَ اور دَ ہیں تب

$$\frac{لَہ}{لہ} = \frac{دَ\ وَ}{د\ و} \quad ......................... (۸)$$

اس امر کا خیال رکھنا ضروری ہے کہ توانائی بالفعل کی رقم یہاں نظر انداز کردی گئی ہے۔ بنگھیم نے اس آلہ کے ذریعہ مطلق لزوجت کی قیمت دریافت کی تھی، اس نے آلہ کے ابعاد کا حساب پہلے ہی سے لگا لیا تھا۔

اوپر جس لزوجت پیما کا ذکر کیا جاچکا ہے اس میں اساسی مفروضہ یہ ہے کہ

مائع کی اوسط بلندی مستقل رہتی ہے جس کے متعلق یہ فرض کیا جاتا ہے کہ یہ آلہ میں ایک مستقل حجم کا مائع بھرنے سے حاصل ہوتی ہے۔ اگر تپش کی وسعت بہت چھوٹی نہ ہو تو لزوجت پیما اور شیشہ کے آلہ کے پھیلاؤ کو مستقل حجم کی پیمائش میں نظر انداز نہیں کیا جا سکتا لہذا اوسط بلندی مستقل نہیں رہ سکتی۔ مائعات کے سطحی تناؤ کی مختلف قیمتوں کی وجہ سے بھی اوسط بلندی میں فرق ہونے لگتا ہے۔ متعدد سائنسدانوں نے ان خطاؤں کو ساقط کرنے کی مختلف ترکیبیں اختیار کی ہیں۔ ولیم اور واشبرن[۱۴] نے آلہ کی شکل میں ایسی تبدیلیاں کی ہیں کہ نہ صرف مذکورہ بالا خطاؤں کی تصحیح ہو جاتی ہے بلکہ چند چھوٹے چھوٹے نقائص بھی مثلاً صاف کرنے والے مائعات اور پانی کے عمل سے نلی کے اندرونی قطر میں تبدیلی کا واقع ہونا اور حل شدہ شیشہ سے پانی کا خالص پن باقی نہ رہنا وغیرہ، دور ہو جاتے ہیں۔

انھوں نے آلہ کو کوارٹز سے بنایا، اور اس کے ابعاد مناسب رکھے آلے کی اس پوری ترتیب کو ایک تھرموسٹیٹ (مستقل تپش کے حمام) میں داخل کر دیا جاتا ہے، اور دونوں ساقوں کو تبخیر سے بچانے کے لیے (اگر کوئی طیران پزیر مائع استعمال کیا جائے) ایک دوسرے کے ساتھ جوڑ دیا جاتا ہے۔ اضافی لزوجت دریافت کرنے کا طریقۂ عمل وہی ہے جو اوسٹوالڈ کے لزوجت پیما میں بیان کیا جا چکا ہے۔

بعد میں ڈکلا نے یہ رائے دی کہ بہت ہی کم لزوجت کے مائعات کے لیے شعری نلی کو نکال کر آلہ میں ایسے مسام دار مادے کو رکھنا چاہیئے کہ جس کے مسامات نہ تو دائری ہوں اور نہ تراش عمودی میں بالکل سیدھے رہیں، اور اسی طریقۂ عمل سے کام لیکر جو اوسٹوالڈ نے اختیار کیا تھا، کسی مائع کی اضافی لزوجت دریافت کی جا سکتی ہے۔ ان چیزوں کا تفصیلی بیان موجودہ حالت میں زیادہ ضروری نہیں معلوم ہوتا لہذا یہاں اس کو چھوڑ دیا جاتا ہے۔

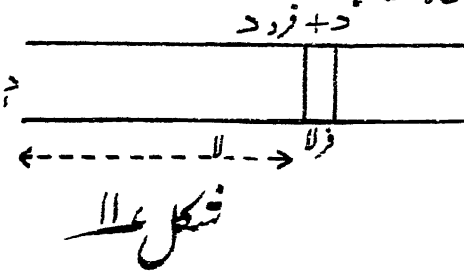
**گیسوں اور بخارات کی لزوجیت:** — پوائسیل کے ضابطہ کو حاصل کرنے کے دوران میں یہ فرض کیا گیا تھا کہ شعری نلی کے کسی تراش میں سے گزرنے والے مائع کا حجم مستقل رہتا ہے یعنی دباؤ کے باوجود کثافت وہی رہتی ہے۔ اس میں کوئی شک نہیں کہ مائعیات کے لئے یہ مفروضہ صحیح ہے لیکن گیسوں کی صورت میں چونکہ دباؤ کی تبدیلی کے ساتھ کثافت میں بھی تبدیلی واقع ہوتی ہے اس لئے یہ ضابطہ نہیں استعمال کیا جاسکتا۔

حقیقت میں گیس کی وہ کمیت، جو نلی کے کسی تراش میں سے ایک دئے ہوئے وقت میں گزرتی ہے مستقل ہوتی ہے۔

د + فرد د

د۱ — د۲

فرلا

← - - - - - لا - - →

شکل ۱۱

ایک شعری نلی پر جو شکل ۱۱ میں دکھائی گئی ہے غور کرو۔ فرض کرو کہ اسکا طول ل اور اسکے دونوں سروں پر دباؤ علی الترتیب د۱ اور د۲ ہے۔ نلی میں گیس کی ایک چھوٹی مقدار ایسی لو جس کی موٹائی فرلا اور نلی کے ایک سرے سے فاصلہ لا پر واقع ہو، اس چھوٹے سے ٹکڑے کے دونوں سروں پر فرض کرو کہ دباو بالترتیب د اور د + فرد ہے، نیز یہ بھی فرض کیا جائے کہ گیس کا یہ ٹکڑا اتنا چھوٹا ہے کہ گیس کی کثافت اس کے درمیان مستقل تصور کی جاسکتی ہے۔

اس ٹکڑے کے دونوں سروں کے درمیان دباؤ میں فرق = — فرد

پوائسیل کے ضابطہ سے، گیس کا وہ حجم جو فی ثانیہ اس ٹکڑے میں سے گزرتا ہے:—

$$حہ = -\frac{\pi\, ف^{4}\, فرد}{8\, لہ\, فرلا}$$

یعنی $\text{ثہ لہ حہ فرلا} = - \text{ثہ فرد}\ \pi\ \text{ف}^{4}$

جہاں ثہ = اس ٹکڑے کے درمیان گیس کی کثافت (جس کو مستقل فرض کیا گیا ہے۔)

$$\therefore \text{م لہ فرلا} = - \text{ثہ}\ \pi\ \text{ف}^{4}\ \text{فرد}$$

جہاں م = گیس کی وہ کمیت جو فی ثانیہ اس ٹکڑے میں سے گزرتی ہے۔

کلیہ بائیل کی رو سے:—

$$\frac{\text{د مر}}{\text{ثہ}} = \text{لا ت}$$

یعنی $\text{د} = \text{گ ثہ}$ جہاں

- مر = سالمی وزن
- ت = تپش مطلق
- لا = گیس کا مستقل فی گرام سالمہ
- گ = ایک مستقل

$$\therefore \text{م لہ فرلا} = - \frac{\pi\ \text{ف}^{4}\ \text{د فرد}}{8\ \text{گ}}$$

∴ کُل نلی کے لئے:—

$$\text{م لہ} \int_{\text{صفر}}^{\text{ل}} \text{فرلا} = - \frac{\pi\ \text{ف}^{4}}{8\ \text{گ}} \int_{\text{د}_1}^{\text{د}_2} \text{د فرد}$$

$$\therefore \text{م گ} = \frac{\pi\ \text{ف}^{4}}{16\ \text{ل لہ}} \left(\text{د}_1^{2} - \text{د}_2^{2}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

فرض کرو کہ $\text{حہ}_1$ = گیس کا وہ حجم جو $\text{د}_1$ دباؤ پر فی ثانیہ نلی کے اندر داخل ہوتا ہے

∴ نلی میں فی ثانیہ جو کمیت داخل ہوگی $= \text{م} = \frac{\text{حہ}_1\ \text{د}_1}{\text{گ}} = \text{حہ}_1\ \text{ثہ}_1$

$$\therefore \text{م گ} = \text{حہ}_1\ \text{د}_1$$

چونکہ فی ثانیہ جو گیس کی کمیت نلی میں داخل ہوتی ہے، وہ مساوی ہے اس گیس کی کمیت کے جو کہ نلی سے فی ثانیہ خارج ہوتی ہے

$$\therefore \text{م} = \text{حہ}_2\ \text{ثہ}_2 = \frac{\text{حہ}_2\ \text{د}_2}{\text{گ}}$$

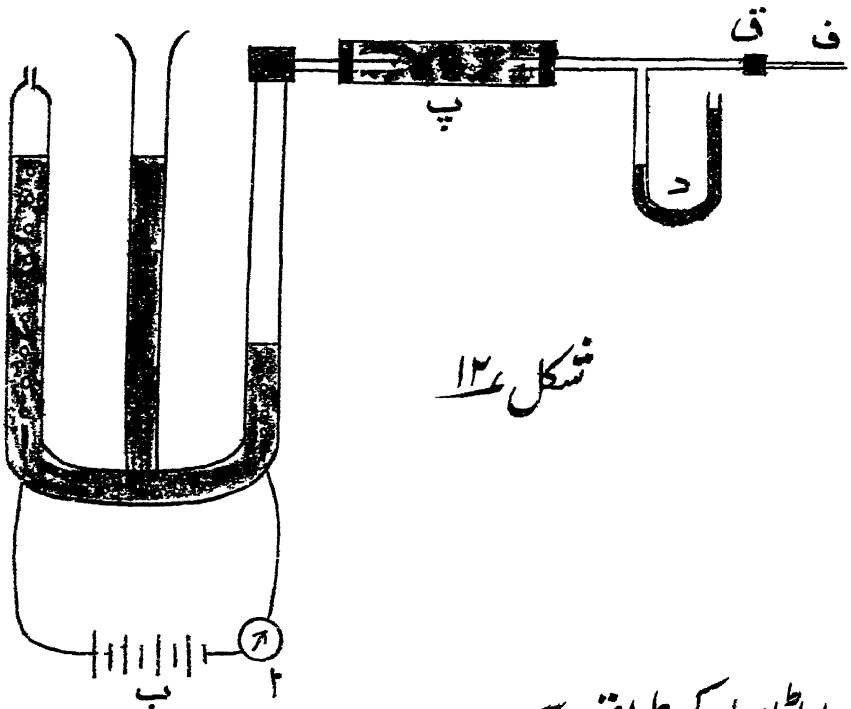
جہاں $ح_۲$ = گیس کا وہ حجم جو $د_۲$ دباؤ پر فی ثانیہ نلی میں داخل ہوتا ہے۔

$$\therefore م گ = ح_۲ د_۲ = ح_۱ د_۱$$

$$\therefore ح_۲ د_۲ = ح_۱ د_۱ = \frac{\pi ف^۴}{۱۶ ل لہ}(د_۱^۲ - د_۲^۲) \quad \ldots\ldots\ldots (۱۰)$$

یہ کسی گیس کے لئے "میئر" کا ضابطہ کہلاتا ہے۔

مساوات (۹) سے $م = \frac{م}{لا ت} \cdot \frac{\pi ف^۴}{۱۶ ل لہ}(د_۱^۲ - د_۲^۲)$

مساوات (۱۰) کو ڈاکٹر لیفلڈ نے ہائڈروجن اور آکسیجن کی لزوجت بالراست دریافت کرنے کے لئے استعمال کیا تھا[۱۴]۔ اسکا طریقہ حسب ذیل ہے:۔

شکل ۱۲

اوسٹوالڈ کے طریقہ سے:۔

شکل ۱۲ میں ہائیڈروجن اور آکسیجن معمولی کیمیائی آبی اوسٹوالڈ سے

حاصل کئے جاتے ہیں، آکسیجن کو آزادانہ ہوا میں نکل جانے دیا جاتا ہے اور ہائڈروجن کو جس کی لزوجیت دریافت کرنی ہے ایک خشک کرنے والی نلی پ میں گزارنے کے بعد ایک شعری نلی ف ق میں سے گزرنے دیا جاتا ہے۔ ہائڈروجن جس دباؤ د۲ پر شعری نلی میں داخل ہوتی ہے اس کو داب پیما د کی مدد سے دریافت کر لیا جاتا ہے، جس دباؤ د۱ پر گیس شعری نلی میں سے نکلتی ہے ظاہر ہے کہ وہ کرہ ہوائی کا دباؤ ہوگا۔ برقی رو جو گزاری جاتی ہے اس کو ام پیما ا سے پڑھ لیا جاتا ہے۔ فیرڈے کے کلیہ برق پاشی کی رو سے، ہائڈروجن کی وہ کمیت جو فی ثانیہ حاصل ہوتی ہے، بذریعہ حساب دریافت کی جا سکتی ہے۔

کلیہ بائیل اور شارل کی رو سے $\frac{د_۱ حہ_۱}{ت_۱} = \frac{د حہ}{ت}$ ......... (۱۱)

جہاں ت۱ = گیس کی تپش مطلق

د = طبعی دباؤ

ت = طبعی تپش

حہ = طبعی دباؤ اور تپش پر فی ثانیہ حاصل ہونے والی گیس کا حجم

فیرڈے کے کلیہ برق پاشی کی رو سے

فی ثانیہ خارج ہونے والی گیس کی کمیت = ع × س

جہاں ع = ہائڈروجن کا برقی کیمیائی معادل

س = رو ایمپیروں میں

لیکن ہمیں یہ معلوم ہے کہ طبعی تپش اور دباؤ پر ایک گرام ہائڈروجن کا حجم =

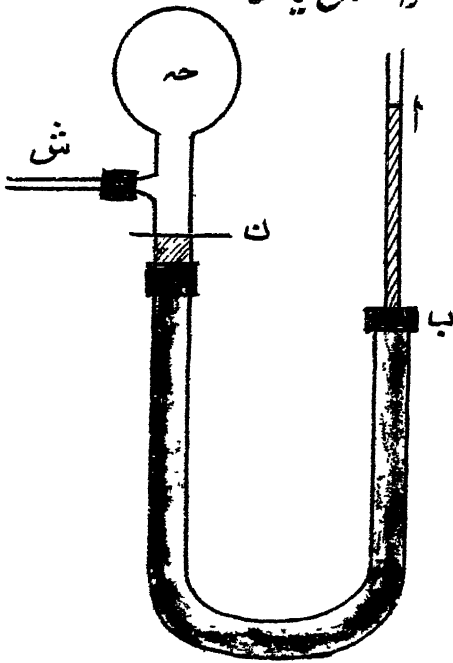
= ۱۱۱۲۰ مکعب سمر

لہٰذا ع س گرام ہائڈروجن کا حجم طبعی تپش اور دباؤ پر =

= ۱۱۱۲۰ × ع س مکعب سمر، اور یہ مقدار = حہ

∴ مساوات (۱۱) سے $د_۱ حہ_۱ = \frac{د ت_۱}{ت}$ (۱۱۱۲۰ × ع س) ....... (۱۲)

لہذا اس مساوات سے ح حہ کی قیمت معلوم ہو جاتی ہے اور ح۱ اور ح۲ کی قیمتیں تو پہلے ہی سے معلوم ہیں اسلئے مساوات (۱۰) سے لہ کی قیمت ہائڈروجن کے لئے دریافت کی جا سکتی ہے۔

**اے اینڈرسن کا طریقہ :** — اس طریقہ کو بعض دفعہ "مستقل حجم کے طریقہ سے" بھی موسوم کیا جاتا ہے سنہ ۱۹۲۱ء میں پروفیسر اینڈرسن (۱۵) نے گیسوں کی لزوجیت کی دریافت کے لئے اسکو استعمال کیا تھا۔

شکل ۱۳

آلہ کی ترتیب شکل ۱۳ میں دکھائی گئی ہے۔ یہ ایک اُلٹی صراحی حہ پر مشتمل ہے جس کی گردن ربر کی نلی کے ذریعہ ایک شیشہ کی نلی ا ب کے ساتھ جوڑ دی جاتی ہے۔ نلی ا ب اور صراحی حہ میں پارہ ایک خاص بلندی تک جس کو ا اور ن سے تعبیر کیا گیا ہے بھر دیا جاتا ہے۔ صراحی کے جوڑنے کے نیچے ایک شعری نلی ش بھی جوڑ دی جاتی ہے جس کے دوسرے سرے پر ربر کی نلی لگائی جاتی ہے، اس ربر کی نلی کو حسب ضرورت چٹکی سے بند کر دیا جاتا ہے۔ اس پورے آلہ کو لوہے کے ایک استادہ کے ساتھ لگا دیا جاتا ہے اور بازو ا ب کو ایک حساس ترتیب کی مدد سے اوپر یا نیچے ہٹایا جا سکتا ہے۔

تجربہ میں گیس کا وہ حجم دریافت کر لیا جاتا ہے جو صراحی کے اندر (مع شعری نلی کے) کسی خاص نشان ن تک بھری ہوئی ہوتی ہے - پھر ۲ ب کو ترتیب دے کر پارہ نشان ن کے نیچے لایا جاتا ہے - اسکے بعد شعری نلی کے سرے پر جو چھوٹی ربر کی نلی ہوتی ہے اس کو بند کر کے اور ۲ ب کو اوپر اُٹھا کر گیس سکیڑی جاتی ہے تا کہ پارہ کی سطح پھر ن تک آجائے - چند دقیقوں کے بعد جب اسکا یقین ہو جاتا ہے کہ گیس کی تپش کمرے کی تپش پر آگئی ہے، پارہ کی ڈوری کی سطح کا فرق لکھ لیا جاتا ہے - شق کے پاس والی چھوٹی ربر کی نلی کو پھر ایک معلوم وقفہ تک کھلا رکھ کر (جیسے جیسے گیس شعری نلی میں سے باہر نکلتی جاتی ہے) پارہ کی سطح کو مسلسل اس طرح ترتیب دیا جاتا ہے کہ وہ ہمیشہ نشان ن پر قائم رہے - اس طرح گیس، صراحی میں ہمیشہ مستقل حجم کے تحت رہتی ہے - اس وقفہ کے اختتام پر پارہ کی سطح کا فرق پھر لکھ لیا جاتا ہے - گیس کے مستقل حجم حہ، اور وقفہ و کے دوران میں بالترتیب دونوں دباؤ دَ اور دً سے، اور نیز بارپیما کی بلندی د کے مشاہدات سے، گیس کی لزوجیت دریافت کی جاتی ہے - اگر فی ثانیہ نلی میں داخل ہونے والی گیس کا حجم $\text{ح}_{۱}$ اور اسکا دباؤ $\text{د}_{۱}$ ہو تو $\text{ح}_{۱}\,\text{د}_{۱} = \text{د}\,\frac{\text{فرحہ}}{\text{فرو}}$

کلیہ بائیل اور شارل کی رو سے گیس کے داخلہ کے وقت اگر حجم اور دباؤ کی قیمتیں حہ اور د ہوں تو د حہ = مستقل

$$\therefore\ \text{د}\,\frac{\text{فرحہ}}{\text{فرو}} + \text{حہ}\,\frac{\text{فرد}}{\text{فرو}} = \text{صفر}$$

$$\therefore\ \text{د}\,\frac{\text{فرحہ}}{\text{فرو}} = -\text{حہ}\,\frac{\text{فرد}}{\text{فرو}} = \text{ح}_{۱}\,\text{د}_{۱}$$

لہذا مساوات (۱۰) سے $(\text{د}_{۱}^{۲} - \text{د}_{۲}^{۲})\,\frac{\pi\,\text{ف}^{۴}}{۱۶\,\text{ل}\,\text{لہ}} =$

$$= -\text{حہ}\,\frac{\text{فرد}}{\text{فرو}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (۱۳)$$

جہاں $\frac{فر د}{فر و}$ داخلہ کے اختتام پہ شرح تغیر دباؤ ہے اور حہ گیس کا مستقل حجم ہے۔

تجربہ میں $د_۲$ کرہ ہوائی کا دباؤ ہے اور $د_۱$ کی قیمتیں و ثانیوں کے دوران میں دَ اور دً ہیں۔

مساوات (۱۳) سے :-

$$\frac{\pi ف^۴}{۱۶ ال لہ حہ}\int_{صفر}^{و} فر و = \frac{۱}{۲ د_۲}\int_{دَ}^{دً}\left(\frac{۱}{د_۱ + د_۲} - \frac{۱}{د_۱ - د_۲}\right) فر د$$

$$= \frac{۱}{۲ د_۲}\left[لوک \frac{د_۱ + د_۲}{د_۱ - د_۲}\right]_{دَ}^{دً}$$

$$\therefore \frac{\pi ف^۴ و}{۱۶ ال لہ حہ} = \frac{۱}{۲ د_۲}\left[لوک \frac{دً + د_۲}{دً - د_۲} - لوک \frac{دَ + د_۲}{دَ - د_۲}\right]$$

اب چونکہ $د_۲ = د =$ کرۂ ہوائی کا دباؤ

$$\therefore لہ = \frac{\pi ف^۴ د و}{۸ ل حہ لوک \left[\left(\frac{دً + د}{دً - د}\right)\cdot\left(\frac{دَ - د}{دَ + د}\right)\right]} \quad \text{......(۱۴)}$$

$\frac{\pi ف^۴}{۸ ل حہ}$ آلہ کے لئے مستقل ہے، اگر اس کی قیمت ایک مرتبہ دریافت کرلی جائے تو پھر اسکے دریافت کرنے کی ضرورت نہیں باقی رہتی۔ اس طریقہ سے گیسوں کی لزوجت مختلف تپشوں پر ایڈورڈ نے دریافت کی تھی۔

لہ کی قیمت "مستقل دباؤ کے طریقہ" سے بھی دریافت کی جاسکتی ہے یعنی اسکا مطلب یہ ہے کہ پارہ کی ڈوری کو کسی خاص فرق بلندی پر رکھ کر دباؤ کے فرق کو مستقل رکھنے سے یہ قیمت دریافت ہوسکتی ہے۔ نقطہ ںَ کو صراحی کی گردن کے نیچے لیا جاسکتا ہے اور کسی حجم مثلاً حہ کے دقفہ کو جون کے ابتدائی

اور آخری مقاموں کے درمیانی طول کے متناظر ہو لکھ لیا جاتا ہے۔
فرض کرو کہ صراحی کے اندر مجموعی دباؤ دَ ہے تو مساوات (۱۰) سے:۔

$$ح = \frac{(دَ^{2} - دِ^{2})\ \pi\ ف^{4}}{16\ ل\ لہ\ دَ} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

تجربہ میں پارہ کی سطحوں کو ہمیشہ ایک دوسرے کے درمیان ایک خاص فاصلہ پر رکھنا دشوار ہوتا ہے۔

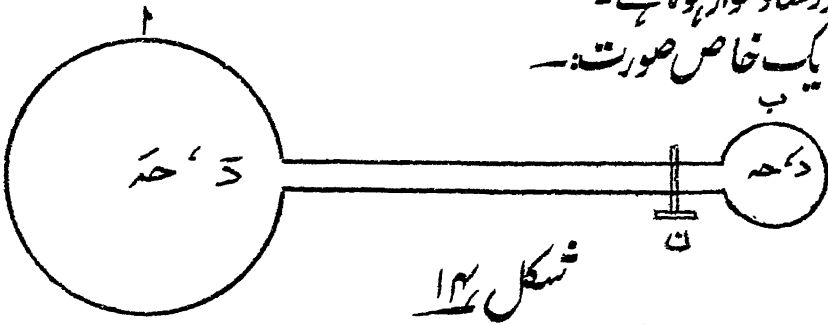
ایک خاص صورت:۔

ا

دَ، حَ

ب

د، ح

ن

شکل ۱۴۱

شکل ۱۴۱ میں گیس کے دو برتن ا اور ب ایک شعری نلی کے ذریعہ ملائے گئے ہیں۔ فرض کرو کہ ا میں ابتدائی دباؤ $د_{1}$ اور حجم حَ اور ب میں ابتدائی دباؤ $د_{2}$ اور حجم ح ہے، جب ٹونٹی ن کھولی جاتی ہے تو و وقفہ کے بعد فرض کرو کہ ا میں دباؤ دَ اور حجم حَ اور ب میں دباؤ د اور حجم ح علی الترتیب ہوجاتا ہے۔

مساوات (۹) سے

$$م = \frac{م}{لا\ ت} \cdot \frac{\pi\ ف^{4}}{16\ ل\ لہ} (دَ^{2} - دِ^{2})$$

لیکن اگر ث گیس کی کثافت ہو تو

$$م = \frac{فر}{فو}(ح\ ث) = \frac{فر}{فو}\left(\frac{ح\ د\ م}{لا\ ت}\right) =$$

$$= \frac{ح\ م}{لا\ ت} \cdot \frac{فر\ د}{فر\ و}$$

$$\therefore \frac{\text{حہ مر}}{\text{لات}} \cdot \frac{\text{فرد}}{\text{فرو}} = \frac{\text{مر}}{\text{لات}} \cdot \frac{\pi\ \text{ف}^{4}}{16\ \text{ل لہ}} \left(\text{دَ}^{2} - \text{د}^{2}\right)$$

$$\therefore \frac{\text{حہ فرد}}{\left(\text{دَ}^{2} - \text{د}^{2}\right)} = \frac{\pi\ \text{ف}^{4}}{16\ \text{ل لہ}} \cdot \text{فرو}$$

چونکہ ۱ میں دباؤ دَ گر رہا ہے اور ب میں دباؤ د بڑھ رہا ہے اس وجہ سے دَ اور د دونوں یہاں متغیر ہونے والی مقداریں ہیں، اس لئے اس جملہ کو آسانی سے تکملایا نہیں جاسکتا۔

کلیہ بائیل سے $\text{دَ حہَ} + \text{د حہ} = \text{د}_1\text{حہَ} + \text{د}_2\text{حہ} =$ مستقل $=$ عہ فرض کرو

$$\therefore \text{دَ} = \frac{\text{د}_1\text{حہَ} + \text{د}_2\text{حہ} - \text{د حہ}}{\text{حہَ}} = \frac{\text{عہ} - \text{د حہ}}{\text{حہَ}}$$

$$\therefore \frac{\text{حہ فرد}}{\left(\frac{\text{عہ} - \text{د حہ}}{\text{حہَ}}\right)^{2} - \text{د}^{2}} = \frac{\pi\ \text{ف}^{4}}{16\ \text{ل لہ}} \cdot \text{فرو}$$

و وقفہ کے لئے ۱ اور ب میں اوسط دباؤ کی حد فرض کرو $\text{د}_3$ سے $\text{د}_4$ تک ہوگی

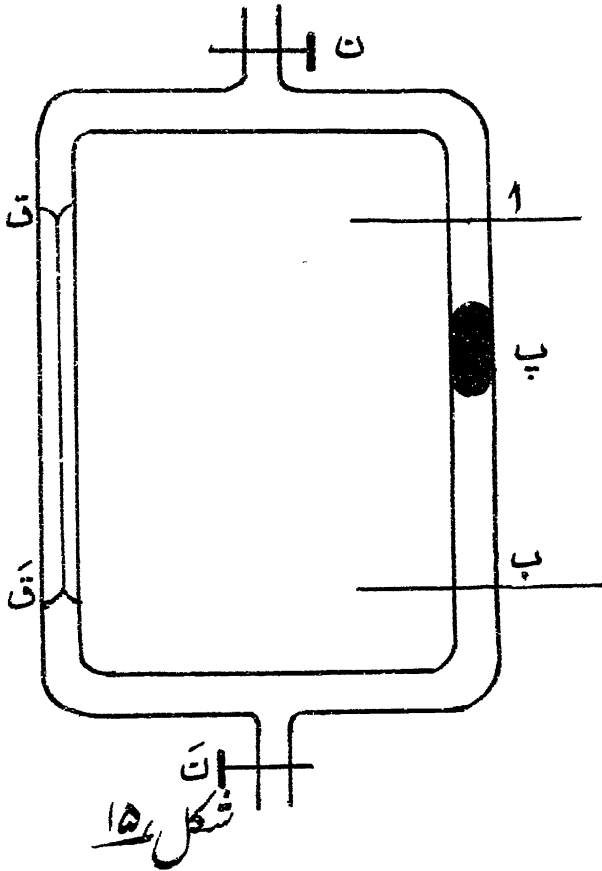
$$\therefore \int_{\text{د}_3}^{\text{د}_4} \frac{\text{حہَ}^{2}\ \text{حہ فرد}}{\text{عہ}^{2} + \text{د}^{2}\text{حہ}^{2} - 2\ \text{عہ د حہ} - \text{حہَ}^{2}\ \text{د}^{2}} = \frac{\pi\ \text{ف}^{4}}{16\ \text{ل لہ}} \int_{\text{صفر}}^{\text{و}} \text{فرو}$$

اسکو تکملانے سے:-

$$\left[\frac{\text{حہَ حہ}}{2\ \text{عہ}} \text{لوک} \frac{\text{حہ} + \text{حہَ}}{\text{حہ} - \text{حہَ}} + \frac{\text{حہَ حہ}}{2\ \text{عہ}} \text{لوک} \frac{\left\{(\text{حہ} - \text{حہَ})\text{د}_4 - \text{عہ}\right\}\left\{(\text{حہ} + \text{حہَ})\text{د}_3 - \text{عہ}\right\}}{\left\{(\text{حہ} + \text{حہَ})\text{د}_4 - \text{عہ}\right\}\left\{(\text{حہ} - \text{حہَ})\text{د}_3 - \text{عہ}\right\}}\right] = \frac{\pi\ \text{ف}^{4}\ \text{و}}{16\ \text{ل لہ}}$$

اس مساوات سے گیس کیلئے لہ کی قیمت حاصل کی جاسکتی ہے۔

رینکن کا لزوجت پیما :۔ پروفیسر اے ' او ' رینکن (۱۶) نے سنہ ۱۹۱۰ء میں مختلف گیسوں کی لزوجت دریافت کرنے کے لئے ایک لزوجت پیما تجویز کیا۔ عملی کام کے لئے یہ لزوجت پیما نہایت سادہ سی چیز ہے لیکن اسکا نظریہ کسی قدر مشکل ہے۔ خصوصاً کمیاب گیسوں مثلاً کرپٹن ، نیین ، وغیرہ کی لزوجت کی دریافت میں یہ بیحد کارآمد ہے۔

شکل ۱۵ میں اس لزوجت پیما کو دکھایا گیا ہے۔ اس میں دو بالکل پاک صاف شیشہ کی نلیاں ہوتی ہیں جن میں سے ہر ایک کا تقریباً طول ۵۰ سمر ہوتا ہے۔ ان میں سے ایک ق قَ ' بالکل پتلی شعری نلی ہوتی ہے جس کا قطر تقریباً ۰٫۲ ممر کا ہوتا ہے اور موٹی نلی کا اندرونی قطر تقریباً ۳ ممر کا ہوتا ہے۔

شکل ۱۵

موٹی نلی پر ا اور ب دو نشانات کئے جاتے ہیں جو اسکے ہر ایک سرے سے تقریباً دس سمر کے فاصلہ پر ہوتے ہیں، نلیوں کو یا تو بالکل بند کردیا جاتا ہے یا ربر کی نلیوں سے ان کو جوڑ کر ایک تختہ سے باندھ دیا

جاتا ہے جو انقباضی ستوی میں گھوم سکتا ہے۔ پ پارہ کا ایک نمائندہ ہے جسکا طول تقریباً ۵ ر ا سم ہے۔ جب پارہ کا یہ نمائندہ آہستہ آہستہ نیچے اترتا ہے تو اس کو نیچے کی گیس شعری نلی میں داخل ہونے پر مجبور ہوتی ہے، اور پھر نمائندے کی اوپر کی فضا میں پھیل جاتی ہے۔ کسی خاص وقت میں نمائندہ کی دُم، نشان ا پر سے اور سر نشان ب سے گزرتا ہے۔

فرض کرو کہ گیس کا مجموعی حجم = ح اور کسی وقفہ و پر پارہ کے نیچے اور اوپر گیس کا دباؤ اور حجم علی الترتیب $د_1$، $ح_1$ اور $د_2$، $ح_2$ ہے۔

اس صورت میں میئیر کے کلیہ سے:-

$$م = \frac{م}{لا\,ت} \cdot \frac{\pi\, ف^4}{16\, ل\, لہ}\left(د_1^2 - د_2^2\right)$$

جہاں م = شعری نلی میں فی ثانیہ داخل ہونے والی یا اس میں سے خارج ہونے والی گیس کی کمیت،

$$\therefore م = \frac{فر}{فرو}\left(ح_2\, ثہ_2\right) = \frac{فر}{فرو}\left(\frac{ح_2\, د_2\, م}{لا\,ت}\right)$$ جہاں $ثہ_2$ = گیس کی کثافت

$$\therefore \frac{م}{لا\,ت} \cdot \frac{فر}{فرو}\left(د_2\, ح_2\right) =$$

$$= \frac{م}{لا\,ت} \cdot \frac{\pi\, ف^4}{8\, ل\, لہ}\left(د_1 - د_2\right) \cdot \frac{\left(د_1 + د_2\right)}{2}$$

$$\therefore فر\left(د_2\, ح_2\right) = \frac{گ\, فرو}{2}\left(د_1 - د_2\right)\left(د_1 + د_2\right)$$

جہاں $گ = \frac{\pi\, ف^4}{8\, ل\, لہ}$

$$\therefore د_2\, فرح_2 + ح_2\, فرد_2 = \frac{گ\, فرو}{2}\left(د_1 - د_2\right)\left(د_1 + د_2\right)$$

جب پارہ کا نمایندہ یکساں طریقہ سے نیچے اُترتا ہے تو نمایندہ کے وزن کی وجہ دباؤ د اور وہ دباؤ جو اوپر سے اُسے دباتا ہے، نمایندہ کے نیچے کے دباؤ کو تعادل میں رکھتا ہے۔

∴ د۱ = د۲ + د = د۲ + م ج / بہ  جہاں م = پارہ کے نمایندہ کی کمیت اور بہ = اسکے تراش عمودی کا رقبہ

∴ د۲ فرحہ۲ + حہ۲ فرد۲ = گ فرو / ۲ (د۱ + د۲) د ......... (۱۶)

فرض کرو کہ نلی کے اندر جبکہ وہ افقی ہو، یکساں دباؤ = ع

اب چونکہ ح = حہ۱ + حہ۲ اسلئے کلیہ بائیل سے:—

ع ح = د۱ حہ۱ + د۲ حہ۲ = (د۲ + د)(ح − حہ۲) + د۲ حہ۲

∴ د۲ = ع − د + د حہ۲ / ح

اب مساوات (۱۶) میں د۱ اور د۲ کی قیمتیں لکھنے سے:—

(ع − د + د حہ۲ / ح) فرحہ۲ + حہ۲ د فرحہ۲ / ح =

= گ فرو / ۲ (۲ع − د + ۲د حہ۲ / ح) د

یعنی (ع + ۲د حہ۲ / ح − د) فرحہ۲ =

= گ د / ۲ (۲ع − د + ۲د حہ۲ / ح) فرو

فرض کرو کہ لا = ۲ع − د + ۲د حہ۲ / ح

∴ فرلا = ۲د / ح فرحہ۲  یعنی فرحہ۲ = ح / ۲د . فرلا

∴ ح / د (لا − ع) فرلا = گ د لا فرو ......... (۱۷)

فرض کرو کہ و ثانیوں میں حہ۲، حہ۲ میں تغیر ہو جاتا ہے

تب $\bar{\text{لا}} = ۲\text{ع} - \text{د} + \frac{۲\,\text{د}\,\text{حہ}'^{۲}}{\text{ح}}$

مساوات (۱۷) کو حدود لا اور لاَ کے درمیان و ثانیوں میں تکملانے سے:۔

$$\frac{\text{ح}}{\text{د}}\left(\text{لا} - \text{ع}\ \text{لوک}_{\text{و}}\ \text{لا}\right)^{\bar{\text{لا}}}_{\text{لا}} = \text{گ}\ \text{د}\ \text{و}$$

اس مساوات میں لاَ اور لا کی قیمتیں لکھنے سے:۔

$$۲\left(\text{حہ}' - \text{حہ}_{۲}\right) - \frac{\text{ع}\,\text{ح}}{\text{د}}\ \text{لوک}_{\text{و}}\left[\frac{۱ - \frac{\text{د}}{۲\text{ع}}\left(۱ - \frac{۲\,\text{حہ}'^{۲}}{\text{ح}}\right)}{۱ - \frac{\text{د}}{۲\text{ع}}\left(۱ - \frac{۲\,\text{حہ}_{۲}^{۲}}{\text{ح}}\right)}\right] = \text{گ}\ \text{د}\ \text{و}$$

اگر باہر نکلنے والی گیس کا حجم اس نظام کے ساتھ باقرینہ ہو اور حہ کے مساوی ہو، یعنی ا اور ب نشانوں کے درمیان گیس کا حجم اگر حہ کے مساوی ہو جو وقت و میں پارہ کے نمایندہ سے باہر نکالی جاتی ہے تو

$$\text{حہ}' - \text{حہ}_{۲} = \text{حہ} \qquad \text{اور}\quad \text{حہ}' + \text{حہ}_{۲} = \text{ح}$$

$$\therefore\ ۲\,\text{حہ}' = \text{ح} + \text{حہ} \qquad \text{اور}\quad ۲\,\text{حہ}_{۲} = \text{ح} - \text{حہ}$$

اور اوپر کی مساوات یوں لکھی جا سکتی ہے:۔

$$۲\,\text{حہ} - \frac{\text{ع}\,\text{ح}}{\text{د}}\ \text{لوک}_{\text{و}}\left[\frac{۱ + \frac{\text{د}\,\text{حہ}}{۲\text{ع}\,\text{ح}}}{۱ - \frac{\text{د}\,\text{حہ}}{۲\text{ع}\,\text{ح}}}\right] = \text{گ}\ \text{د}\ \text{و}$$

اب چونکہ $\frac{\text{د}\,\text{حہ}}{۲\text{ع}\,\text{ح}}$ بہت چھوٹی مقدار ہے اسلئے لوک$_{\text{و}}$ کے سلسلہ کو کھیلانے میں اسکے اونچے قوت نما والی رقوم کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔

$$\therefore\ ۲\,\text{حہ} - \frac{\text{ع}\,\text{ح}}{\text{د}}\left[\left\{\frac{\text{د}\,\text{حہ}}{۲\text{ع}\,\text{ح}} - \frac{۱}{۲}\cdot\frac{\text{د}^{۲}\text{حہ}^{۲}}{۴\text{ع}^{۲}\text{ح}^{۲}} \cdots\cdots\right\} - \left\{-\frac{\text{د}\,\text{حہ}}{۲\text{ع}\,\text{ح}} - \frac{۱}{۲}\cdot\frac{\text{د}^{۲}\text{حہ}^{۲}}{۴\text{ع}^{۲}\text{ح}^{۲}} \cdots\cdots\right\}\right] = \text{گ}\ \text{د}\ \text{و}$$

یعنے ۲حہ ـ $\frac{ح^6}{د}$ ۔ $\frac{د حہ^2}{ح^6{}^2}$ = گ دو

∴ حہ = $\frac{\pi\, ف^4 دو}{8\, ل لہ}$ = $\frac{\pi\, ف^4 م ج و}{8\, ل لہ بہ}$ ........... (۱۸)

یہاں ہم نے پارہ کی کمیت مَ کی وجہ سے جو دباؤ پڑتا ہے اسکو $\frac{مَ ج}{بہ}$ لیا تھا ۔ لیکن سطحی تناؤ کی باعث اور پارہ کے نمایندہ کے دونوں سروں کے انحنا کی وجہ سے جبکہ نمایندہ حرکت میں ہو، نمایندہ کے دونوں رخوں پر موثر فرق دباؤ

د = $\frac{(مَ - فہ) ج}{بہ}$ جہاں فہ ایک بہت چھوٹی مقدار ہے اور تجربہ کے لئے مستقل ہے ۔ یہاں یہ امر قابل لحاظ ہے کہ مَ کی قیمت میں ایک بالکل چھوٹی مقدار کی کمی ہو گئی ہے ۔ اسکا مطلب یہ ہے کہ پارہ کا نمایندہ نلی کے دیواروں کے ساتھ، گرنے کے دوران میں کسی قدر چمٹ جاتا ہے ۔

حہ کی قیمت تجربہ میں کچھ تھوڑی سی متغیر ہوتی ہے، اسکی وجہ نمایندہ کی حرکت ہے لیکن $\frac{دو}{حہ}$ کی قیمت تجربہ میں ہمیشہ مستقل رہتی ہے ۔

∴ $\frac{دو}{حہ}$ = گہ = مستقل

ہم نے پہلے یہ فرض کیا ہے کہ حہ، نشانات ا اور ب کے درمیان گیس کا حجم ہے لیکن حقیقت یہ ہے کہ ان دونوں نشانات کے درمیان نمایندہ کی موجودگی سے

حہ = حا ـ $\frac{مَ}{نۂ}$ جہاں حا = ا اور ب کے درمیان صحیح حجم، اسکی قیمت ا اور ب کے درمیان پارہ بھر کر تولنے سے دریافت کی جاسکتی ہے ۔

اور نۂ = پارہ کی کثافت

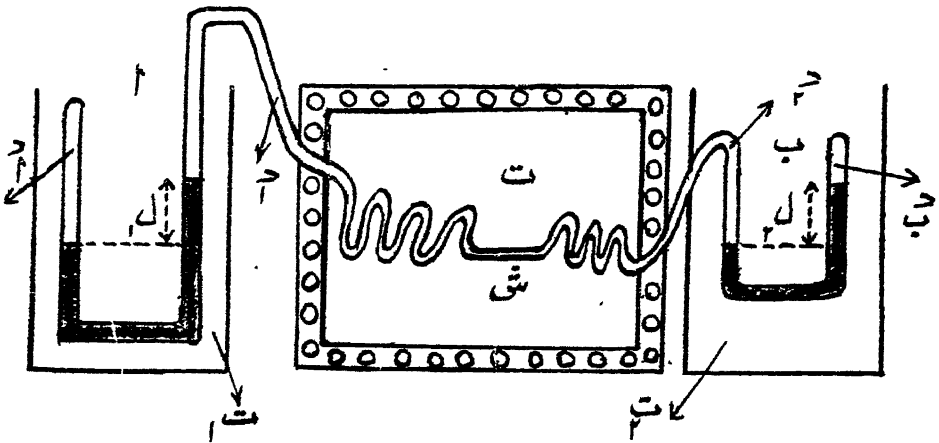
∴ گہ (حا ـ $\frac{مَ}{نۂ}$) = $\frac{(مَ - فہ) ج و}{بہ}$

یعنی (مَ ـ فہ) = $\frac{گہ\ بہ}{ج\ و}$ (حا ـ $\frac{مَ}{نۂ}$)

یہ مَ اور ( حا – $\frac{\text{م}}{\text{ش}}$ ) کے درمیان خطی تعلق کو ظاہر کرتا ہے۔ اسلئے مَ اور و کی مختلف قیمتیں لیکر منحنی مرتسم کرنے سے ایک خط مستقیم حاصل ہوتا ہے جس کے میلان سے $\frac{\text{گہ بہ}}{\text{ج}}$ حاصل ہوتا ہے اوراس کی مدد سے گہ کی قیمت نکالی جاسکتی ہے۔ لہذا گیس کے لئے لہ کی صحیح قیمت مساوات (۱۸) سے دریافت کی جاسکتی ہے۔ اس خط کے مقطوعہ سے ( $\frac{\text{حا} - \frac{\text{م}}{\text{ش}}}{\text{و}}$ محور پر ) فہ کی قیمت حاصل ہوجاتی ہے۔

اس طریقہ سے پروفیسر رینکن نے متعدد گیسوں کی لزوجت دریافت کی اور یہ ثابت کیا کہ دباؤ کے ساتھ اسکا کوئی تعلق نہیں ہے۔

۱۹۲۸ء میں ایڈورڈ نے نیین کی لزوجت صفر° م — ۴۰۰ م کی وسعت کے اندر اسی لزوجت پیما سے دریافت کی۔ اور ولیم نے صفر° م — ۱۰۰۰° م تک اسکی پیمائش کرنے میں کامیابی حاصل کی اور یہ دریافت کیا کہ مختلف تپشوں پر گیسوں کی لزوجت سے متعلق سدرلینڈ کے کلیہ میں کسی قدر فرق ہے۔

**بخارات کی لزوجت:** — پروفیسر رینکن نے ۱۹۱۳ء میں بردمین کے بخار کی لزوجت دریافت کرنے کے لئے آلات جس طرح ترتیب دئے تھے ان

شکل ۱۶۱

کو شکل ۱۶ میں دکھایا گیا ہے۔ جن لا نما نلیوں میں بروین مائع کی حالت میں رکھی گئی تھی، ان کو ا اور ب حماموں میں رکھا گیا ہے اور ان کی تپشیں $ت_۱$ اور $ت_۲$ مستقل رکھی گئی ہیں۔ چونکہ $ت_۱$ تپش $ت_۲$ سے زیادہ ہے، اس لئے بخاری دباؤ $د_۱$، $د_۲$ سے زیادہ ہوگا۔ $د_۱$ اور $د_۲$ دونوں نلیوں میں، علی الترتیب سیر شدہ دباؤ کی قیمتیں اُن خاص تپشوں پر ہیں۔ ب میں بخار ا سے آکر منجمد ہونے لگتا ہے اور لا نما نلی میں $ل_۲$ کی بلندی کے مساوی استوانہ نیچے اُتر آتا ہے۔ ا میں مائع کی سطحوں میں فرق $ل_۱$ ہے۔ شعری نلی ش میں سے جب بخار گزرتا ہے تو یہ آتشدان کی مدد سے ت تپش تک زاید گرم کیا جاتا ہے۔ مرغولہ نما نلیاں (جس طرح کہ شکل میں دکھایا گیا ہے) آتشدان کے اندر اس لیے رکھی جاتی ہیں کہ بخارات ان میں سے گزرتے ہوئے آتشدان کی تپش تک گرم کئے جا سکیں۔

$$د_۱ = د_۰ - ث_۱ ج ل_۱ \quad \text{اور} \quad د_۲ = د_۰ + ث_۲ ج ل_۲$$

جہاں $ث_۱$ = بروین کے بخار کی کثافت $ت_۱$ تپش پر

اور $ث_۲$ = 〃 〃 〃 〃 $ت_۲$ 〃

میئر کے کلیہ سے $$م = \frac{م}{ط ت} = \frac{\pi ف^۴}{۱۶ ا ل لہ}(د_۱^۲ - د_۲^۲)$$

$$\text{اور} \quad د_۱ حہ = \frac{\pi ف^۴}{۱۶ ا ل لہ}(د_۱^۲ - د_۲^۲)$$

جہاں حہ = تپش ت اور دباؤ $د_۱$ پر فی ثانیہ تبخیر پانیوالے بخار کا حجم۔

کلیہ بائیل اور شارل کی رو سے:- $$\frac{د_۱ حہ}{ت} = \frac{د_۰ حہ_۰}{ت_۰}$$

جہاں $د_۰$ اور $ت_۰$ کرہ ہوائی کے دباؤ اور تپش کی قیمتیں علی الترتیب ہیں، اور $حہ_۰$ اس تپش اور دباؤ پر فی ثانیہ تبخیر پانے والے بخار کا حجم ہے۔

$$\therefore لہ = \frac{\pi ف^۴}{۱۶ ا ل}\left(\frac{د_۱^۲ - د_۲^۲}{د_۰ حہ_۰ ت}\right) ت_۰$$

$$= \frac{\pi}{16\ ل} ف^{4} \left( \frac{د_{1}^{2} - د_{2}^{2}}{د_{0}\ م_{0}\ ت} \right) ت_{0}\ ث_{0} \quad ........ (19)$$

جہاں $ث_0$ = کرہ ہوائی کے دباؤ اور تپش پر کثافت اور
$م_0$ = فی ثانیہ تبخیر پانے والے بخار کی کمیت کرہ ہوائی کے دباؤ اور تپش پر جس کی پیمائش گرم لاما نلی کی بلندی کے تغیر کی شرح سے کی جاتی ہے اگر کثافت معلوم ہو۔

لہذا اوپر کی مساوات میں $د_1$ اور $د_2$ کی قیمتیں درج کرنے سے برومین کے بخارات کی لزوجت دریافت کی جا سکتی ہے۔ اس کے بعد ۱۹۲۴ء میں اسمیتھ اور ۱۹۲۹ء میں ٹیسینی نے اس آلہ میں خفیف سی تبدیلیاں کیں[17]۔

اس طریقہ سے فائدہ یہ ہے کہ بغیر کسی علیحدہ داب پیما کے دباؤ کی پیمائش ہو سکتی ہے چونکہ شعری نلی میں سے گزرتے ہوئے بخارات ملطف ہو جاتے ہیں اس لئے کنڈسن نے یہ تجویز کی کہ اوپر کے ضابطہ سے لزوجت کی جو قیمت حاصل ہوتی ہے اس کو $\left(1 + \frac{4\ جـ}{ف}\right)$ سے ضرب دینا ضروری ہے جہاں جـ تصحیحی جز ہے اور جو سالمات کی اوسط آزاد راہ کے متناسب ہے۔

**گیسوں کی لزوجت پر دباؤ کا اثر:**— گیسوں کے نظریہ تحرک سے میکسویل نے یہ ثابت کیا کہ لزوجت پر دباؤ کا کوئی اثر نہیں ہوتا۔ اس نتیجہ کی تصدیق پروفیسر رینکن اور دیگر اشخاص نے، دباؤ کی ایک بڑی وسعت تک کی ہے اور ہر حالت میں اس کو صحیح پایا۔

بہت ہی کم دباؤ پر (مثلاً پارہ کے ۰۱ مم کے نیچے) دباؤ کی کمی سے لزوجت میں کمی واقع ہوتی ہے۔

اور بہت ہی اونچے دباؤ پر بھی میکسویل کا کہنا درست نہیں۔ اس کے متعلق دسویں باب میں بحث کی جائے گی۔

**گیسوں کی لزوجت پر تپش کا اثر:**— عام طور پر تپش کے بڑھنے سے لزوجت

میں اضافہ ہوتا ہے۔

میکسول کا بیان ہے کہ لہ $\propto$ ت$^{\frac{1}{2}}$ جہاں ت = گیس کی تپش مطلق

لیکن بعد میں ق $\propto \frac{1}{\text{ص}^{5}}$ کو کلیہ قوت فرض کرتے ہوئے، اس

نے ایک کلیہ وضع کیا:—

لہ $\propto$ ت

جہاں ق = دو سالمات کے درمیان کششی قوت

ص = سالمات کے درمیان فاصلہ

پروفیسر چیپمن نے بعد میں صرف یہ فرض کرتے ہوئے کہ سالمات کے

درمیان دفع کی قوت ق $\propto \frac{1}{\text{ص}^{\text{ن}}}$ کی شکل کی ہوتی ہے یہ نتیجہ اخذ کیا:—

لہ $\propto$ ت$^{\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{\text{ن}-1}\right)}$ جہاں ن = کوئی صحیح عدد

اسکے بعد سدرلینڈ[8] نے کششی قوت قا کو ف$\left(\frac{1}{\text{ص}}\right)$ کے متناسب

فرض کرتے ہوئے ایک کلیہ حاصل کیا جو حسب ذیل ہے:—

$$\text{لہ} \propto \frac{\text{ت}^{\frac{1}{2}}}{1+\frac{\text{س}}{\text{ت}}} \propto \frac{\text{ت}^{\frac{3}{2}}}{\text{س}+\text{ت}}$$

جہاں س = ایک مستقل، جس کو سدرلینڈ کے مستقل سے موسوم کیا

جاتا ہے۔ یہ ضابطہ تپش کی بڑی بڑی قیمتوں یعنی تقریباً ۱۰۰۰°م تک صحیح ثابت

ہوا ہے۔ لیکن اس سے زائد تپش پر اسکا استعمال درست نہیں ہے۔

۱۹۲۴ء میں جونس نے دونوں کلیات قوت کو (یعنی جذب اور دفع

دونوں کو) میکسول اور چیپمن کی طرح فرض کرتے ہوئے یہ ثابت کیا:—

$$\text{لہ} \propto \frac{\text{ت}}{\text{ت}^{\frac{\text{ن}-\text{گ}}{2(\text{ن}-1)}}+\frac{\text{گ}}{\text{ت}^{\frac{1}{2}}}}$$ جہاں گ = مستقل

سدرلینڈ کا کلیہ یوں لکھا جا سکتا ہے:- $لے = \frac{گہ\ ت^{3/2}}{س + ت}$

جہاں گہ = کوئی دوسرا مستقل

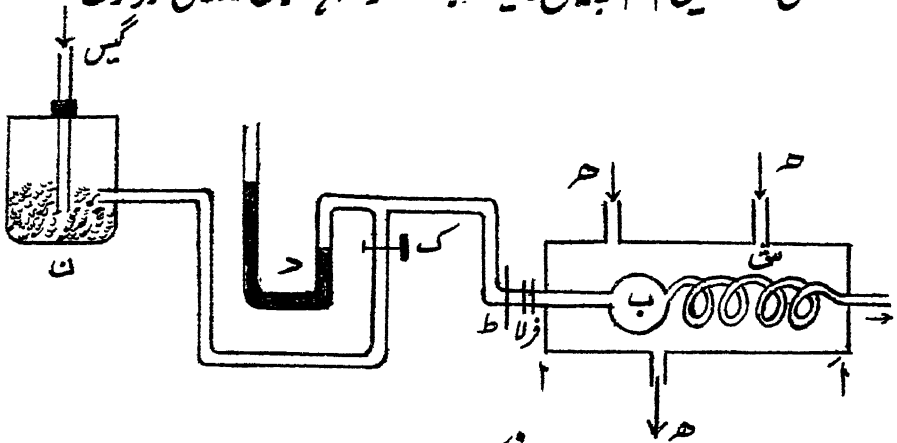
یعنی $\frac{گہ\ ت^{3/2}}{لے_ت} = س + ت$

بطور تجربہ ہم اگر ت کو $\frac{ت^{3/2}}{لے_ت}$ کے مقابلہ میں مرتسم کریں تو ایک خط مستقیم حاصل ہوتی ہے۔ اگر اس خط کو بخارج کیا جائے تو یہ ت محور کو ایک نقطہ پر قطع کرے گی۔ اس نقطہ اور مبدء کے درمیانی فاصلہ سے سدرلینڈ کے مستقل س کی قیمت حاصل ہو جاتی ہے اور اس خط کے ڈھلاؤ سے مستقل گہ کی قیمت معلوم ہو جاتی ہے۔

نظری طور پر سدرلینڈ کا ضابطہ دسویں باب میں حاصل کیا جائے گا۔

## سدرلینڈ کے مستقل (س) کی تجربہ کے ذریعہ دریافت:-

شکل ۱۷ء میں ۲ ۱ پیتیس کا ایک بند اسطوانہ ہے جس کو روئی اور اون سے

شکل ۱۷ء

لپیٹ دیا جاتا ہے۔ اس اسطوانہ کے اندر شیشہ کا ایک بڑا جوفہ ب ہے جس کو شعری نلی ق ق سے احتیاط کے ساتھ جوڑ دیا جاتا ہے۔ شعری نلی مرغولہ نما بنائی جاتی ہے۔ جوفہ کا دوسرا سِرا پارے کے داب پیماد سے ملایا جاتا ہے۔ اس داب پیما میں، خشک کرنے والی ایک بوتل ن کے ذریعہ، ہوا یا گیس ٹونٹی ک کو کھول کر، پمپ سے داخل کی جاتی ہے۔ بھاپ یا سرد پانی، پیتل کے اسطوانہ میں سے گزارا جاتا ہے تاکہ شعری نلی میں سے گزرنے والی گیس کو کسی خاص تپش پر رکھا جا سکے۔ تجربہ کے وقت، داب پیما میں ہوا، پمپ کے ذریعہ داخل کی جاتی ہے اور ٹونٹی ک بند کر دی جاتی ہے۔ پارہ کی سطحوں میں باہمی فرق ہونے سے ہوا پر زائد دباؤ عمل کرتا ہے اور اس کی وجہ سے شعری نلی میں سے ہوا آہستہ آہستہ گزرتی ہے، اور چنانچہ داب پیما کی داہنی جانب پارہ کا اسطوانہ بتدریج بڑھنے لگتا ہے۔ ایک متحرک خوردبین (جس کو شکل میں نہیں دکھایا گیا ہے) میں پارے کے اسطوانہ کی داہنی ساق کو ماسکہ میں لایا جاتا ہے اور چشمہ والے پیمانہ کے کسی خاص نشان کو دیکھ لیا جاتا ہے۔ جب پارے کی ڈوری کا ہلالی سرا داہنی جانب بڑھتے ہوئے اس خاص نشان سے منطبق ہونے لگتا ہے تو ایک چلر کنی گھڑی چلا دی جاتی ہے۔ اس کے بعد متحرک خوردبین کو اس کے پیمانہ پر کچھ فاصلہ (مثلاً "ما" ملی میٹر) اوپر اوٹھایا جاتا ہے، اور پھر جب پارے کی ہلالی سطح اس خاص نشان سے منطبق ہونے لگے تو چلر کنی گھڑی میں وقت کا وقفہ دیکھ لیا جاتا ہے۔ اس طرح زائد دباؤ کی ایک خاص قیمت سے کسی مقررہ دباؤ کی قیمت تک، وقت کے وقفہ کے متعدد مشاہدات حاصل کئے جاتے ہیں اور پھر ان سب وقفوں کا اوسط دریافت کر لیا جاتا ہے۔

دو تجربے کرنا ضروری ہے۔ ایک تجربہ میں، تپش کمرہ کی تپش کے مساوی رکھی جاتی ہے اور دوسرے تجربہ میں زائد دباؤ کی ان ہی قیمتوں کے لئے، بھاپ

کی تپش رکھتی ہوتی ہے یعنے کسی ایک ہی زائد دباؤ د سے زائد دباؤ د تک پہنچنے میں جتنا وقفہ درکار ہوتا ہے، وہ دونوں صورتوں میں دریافت کرلیا جاتا ہے۔ درحقیقت، یہ طریقۂ عمل ریگنن کے لزوجت پیما کی ایک خاص صورت ہے۔ پارہ کی ڈوری سے یہاں گیس ڈھکیلی جاتی ہے لیکن ریگنن کے لزوجت پیما میں، پارے کا نمایندہ گیس کو ڈھکیلتا ہے۔

فرض کرو کہ کمرہ کی تپش ت، ہے جو کہ ہلالی سرے سے ط تک تصور کی جاسکتی ہے۔

اور یہ بھی فرض کرو کہ اس حصہ کا دباؤ د، اور کسی وقت و میں حجم حہ ہے اور نیز بھاپ کی تپش یعنی جوفہ کے اندر گیس کی تپش ت ہے مرغولہ نما شعری نلی کے دوسرے سرے پر دباؤ (د) کرۂ ہوائی کے دباؤ کے مساوی ہوگا۔

اب نلی میں ایک چھوٹی سی دھجی فرلا ط سے لا فاصلہ پر لو۔

لا پر تپش = ت کا کوئی تفاعل = ھ (ت)

∴ فرلا = ھَ (ت) فرت، جہاں ھَ (ت)، ھ (ت) کا تفرقی سر ہے۔

میئر کے ضابطہ سے

$$م = \frac{مہ}{لا\,ت}(د^2 - د_0^2)\frac{\pi ف^4}{16\,ل\,لہ} \quad \cdots\cdots (۲۰)$$

$$لیکن\ م = \frac{فر}{فرو}\left(حہ\, ثہ_{ت_1} + \int_{ت_1}^{ت} ا\, فرلا\, ثہ_ت\right)$$

جہاں ثہ = گیس کی کثافت کمرہ کی تپش ت، پر

اور $ثہ_{ت}$ = 〃 〃 بھاپ 〃 ت 〃

اور ا فرلا = ط کی داہنی جانب اس چھوٹی سی دھجی کا حجم

$$چونکہ \int_{ت_1}^{ت} ا\, فرلا\, ثہ_ت = \int_{ت_1}^{ت} ا\, فرلا \frac{مہ\, د}{لا\, ت} = \frac{ا\, د\, مہ}{لا}\int_{ت_1}^{ت} \frac{فرلا}{ت} =$$

$$= \frac{ا\,د\,م}{لا} \int_{ت_۱}^{ت} \frac{ھ(ت)\,ف\,ت}{ت} =$$

$$= \frac{ا\,د\,م}{لا} \left( ۲(ت) - ۲(ت_۱) \right)$$ فرض کرو

$$\therefore م = \frac{ف\,م}{ف\,و} = \frac{د\,م}{لا} \left[ \frac{ح}{ت_۱} \left\{ ۱ + ا\left( ۲(ت) - ۲(ت_۱) \right) \right\} \right]$$

$$= \frac{د\,م}{لا\,ت_۱} \cdot \frac{ف\,ح}{ف\,و}$$

مساوات (۲۰) سے

$$\frac{د\,م}{لا\,ت_۱} \cdot \frac{ف\,ح}{ف\,و} = \frac{م}{لا\,ت} \left( د^۲ - د_۰^۲ \right) \frac{\pi\,ف^۴}{۱۶\,ل\,له}$$

$$\therefore د\,ف\,ح = \frac{ت_۱}{ت} \left( د^۲ - د_۰^۲ \right) \frac{\pi\,ف^۴}{۱۶\,ل\,له} \cdot ف\,و$$

گیس کے مجموعی حجم ح کے لئے جو و ثانیوں میں گزرتا ہے تکملانے سے :-

$$د\,ح = \frac{ت_۱}{ت} \left( د^۲ - د_۰^۲ \right) \frac{\pi\,ف^۴}{۱۶\,ل\,له} \cdot و$$

$$\therefore له_{ت_۱} = \frac{ت_۱}{ت} \left( د^۲ - د_۰^۲ \right) \cdot \frac{\pi\,ف^۴}{۱۶\,ل\,د\,ح} \cdot و = \frac{ت_۱}{ت} \cdot و\,ب$$

جہاں $ب = \frac{\pi\,ف^۴ \left( د^۲ - د_۰^۲ \right)}{۱۶\,ل\,د\,ح}$ اور $له_{ت_۱} =$ ت تپش پر گیس کی لزوجت۔

تجربہ میں جبکہ کمرہ کی تپش $ت_۱$ ہو تو $ت_۱ = ت$ اور $له_{ت_۱} = له$

فرض کرو کہ وقت $و = و_۱$ تب

$$له_{ت_۱} = و_۱\,ب \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۲۱)$$

تجربہ کے دوسرے حصہ میں جبکہ وہ بھاپ کی تپش ت پر کیا جاتا ہے، چونکہ بڑے جوفہ کے حجم کے مقابلہ میں، بھاپ کے اسطوانہ کی بیرونی نلی کا حجم بالکل چھوٹا ہوتا ہے اسلئے ہم یہ فرض کر لیتے ہیں کہ شعری نلی میں داخل ہونے والی گیس کی تپش، بھاپ کی تپش ت کے مساوی ہے، یعنی پارے کے نمایندہ اور نشان ط کے درمیان گیس ت تپش پر ہے۔

لہذا اس صورت میں $ت_{۱} = ت$ اور وقت = و

$$\therefore ل_{ت} = و\, ب \quad \ldots\ldots\ldots (٢٢)$$

∴ مساوات (٢١) اور (٢٢) سے

$$\frac{ل_{ت}}{ل_{ت_{۱}}} = \frac{و}{و_{۱}} = \left(\frac{گ\, ت^{\frac{3}{2}}}{س + ت}\right) \times \left(\frac{س + ت_{۱}}{گ\, ت_{۱}^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$\therefore \frac{و}{و_{۱}} = \left(\frac{س + ت_{۱}}{س + ت}\right) \cdot \frac{ت^{\frac{3}{2}}}{ت_{۱}^{\frac{3}{2}}} \quad \ldots\ldots\ldots (٢٣)$$

اس مساوات سے سدرلینڈ کے مستقل س کی قیمت معلوم کی جاسکتی ہے۔

**موصلیت حرارت اور کسی گیس کی لزوجت:** — گیسوں کے نظریۂ تحرک سے یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ موصلیت حرارت اور لزوجیت کے درمیان کوئی خاص تعلق ضرور ہے، یعنی

$مہ = لہ \cdot ن_{ح}$ جہاں $ن_{ح}$ = مستقل حجم پر کسی گیس کی حرارت نوعی

اور مہ = گیس کی موصلیت حرارت

گیس کے سالمات کو لچکدار کروں سے تعبیر کرتے ہوئے بعد میں یہ ثابت کیا گیا ہے کہ

$$مہ = ٹہ\, لہ\, ن_{ح}$$

جہاں ٹہ = مستقل = ٢ء٥٠٠ (پروفیسر چیپمین[19] کے مطابق)

اس مساوات کو عملی طور پر جانچا گیا اور ایک جوہری گیسوں کے لئے یہ صحیح ثابت بھی ہو چکی ہے لیکن ایسی گیسوں مثلاً ایتھیلین، کاربن ڈائی آکسیڈ وغیرہ کے لئے تجربی نتائج اور اس ضابطہ میں مطابقت نہیں ہوتی، صرف مطابقت اس وقت ہوتی ہے جبکہ ہم ٹہ = $\frac{١}{٤}$(٩ سہ − ٥) لیں[٢]۔

جہاں سہ = $\frac{\text{گیس کی حرارت نوعی مستقل دباؤ پر}}{\text{گیس کی حرارت نوعی مستقل حجم پر}}$

ذیل میں مختلف تپشوں پر چند گیسوں کی لزوجت کی قیمتیں دی گئی ہیں:—

| گیس | تپش °م | لزوجت س۔گ۔ث اکائیوں میں |
|---|---|---|
| ہوا | صفر | ٠٫٠٠٠١٧١ |
| | ١٥ | ٠٫٠٠٠١٨١ |
| ہائیڈروجن | صفر | ٠٫٠٠٠٠٨٦٤ |
| | ١٠٠ | ٠٫٠٠٠١٠٦ |
| آکسیجن | صفر | ٠٫٠٠٠١٨٧ |
| | ٥٤ | ٠٫٠٠٠٢١٦ |
| نائیٹروجن | صفر | ٠٫٠٠٠١٦٦ |
| | ٥٤ | ٠٫٠٠٠١٩٠ |
| کلورین | صفر | ٠٫٠٠٠١٢٩ |
| | ٢٠ | ٠٫٠٠٠١٤٧ |
| کاربن ڈائی آکسیڈ | صفر | ٠٫٠٠٠١٣٩ |
| | ١٠٠ | ٠٫٠٠٠١٨٧ |
| نائٹرس آکسیڈ | صفر | ٠٫٠٠٠١٣٥ |
| | ١٠٠ | ٠٫٠٠٠١٨٣ |

| | | |
|---|---|---|
| کاربن مان آکسیڈ | صفر | ٠٫٠٠٠١٦٣ |
| | ٢٠ | ٠٫٠٠٠١٨٤ |
| پانی (انجار) | صفر | ٠٫٠٠٠٠٩١ |
| | ١٠٠ | ٠٫٠٠٠١٣٣ |

ذیل کی جدول میں کمیاب گیسوں کے لئے لزوجیتوں کی وہ قیمتیں دی گئی ہیں جن کو پروفیسر رینکن نے دریافت کیا تھا :—

| گیس | تپش °م | لزوجیت س۔گ۔ث اکائیوں میں |
|---|---|---|
| ہیلیم | ٩٫٨ | ٠٫٠٠٠١٩١ |
| نیین | ١٠٫١ | ٠٫٠٠٠٣٠٤ |
| آرگن | ١٢٫٣ | ٠٫٠٠٠٢١٧ |
| کرپٹن | ١٠٫٦ | ٠٫٠٠٠٢٤١ |
| زینن | ١٠٫٩ | ٠٫٠٠٠٢١٨ |

ذیل کی جدول میں سدرلینڈ کے مستقل کی قیمتیں دی گئی ہیں :—

| گیس | سدرلینڈ کا مستقل "س" | سدرلینڈ کا مستقل "گ" |
|---|---|---|
| ہوا | ١٢٠ | ٠٫٠٨٧ |
| ہائیڈروجن | ٧٢ | ٠٫٠٧٧ |
| آکسیجن | ١٢٧ | ٠٫٠٨٩ |
| نائٹروجن | ١١٠ | ٠٫٠٨٥ |
| ہیلیم | ٨٠ | ٠٫٠٦٨ |

| | | |
|---|---|---|
| آرگن | ١٧٠ | ٠٫٠٩٨ |
| کاربن ڈائی آکسیڈ | ٢٤٠ | ٠٫١١٤ |
| کاربن مان آکسیڈ | ١٠٢ | ٠٫٠٨٣ |
| نائٹرس آکسیڈ | ٣١٣ | ٠٫١٣٠ |

ذیل کی جدول میں مہ/لہ نح کی وہ قیمتیں دیگئی ہیں جو تجربہ سے حاصل ہوئیں اوران کا مقابلہ ٹہ کی قیمتوں سے کیا گیا ہے :-

| گیس | مشاہدہ کی ہوئی قیمتیں مہ/لہ نح | ٹہ = ¼ (٩ نہ − ٥) |
|---|---|---|
| ہائیڈروجن | ١٫٨٩ | ١٫٩٠ |
| ہیلیم | ٢٫٣٨ | ٢٫٤٤ |
| کاربن مان آکسیڈ | ١٫٨٨ | ١٫٩١ |
| نائٹروجن | ١٫٩١ | ١٫٩١ |
| ہوا | ١٫٩١ | ١٫٩١ |
| آکسیجن | ١٫٩٣ | ١٫٩٠ |
| کاربن ڈائی آکسیڈ | ١٫٥٢ | ١٫٧٢ |
| ایتھلین | ١٫٥٥ | ١٫٥٥ |

## Chapter VIII.

(۱) Properties of Matter "Poynting & Thomson"; P210 (1922)
A Monograph of Viscometry by "G. Barr"; P17 (1931)
(۲) General Physics E. Edser; P504 (1926)
(۳) Properties of Matter "Newman & Searle", P209 (1928)
(۴) Viscosity of Liquids "E. Hatschek"; P63 (1928)
(۵) ,, ,, ,, P65 (1928)
(۶) Phil. Trans; A, P1 (1894)
(۷) Viscosity of Liquids "E Hatschek"; P79 (1928)
(۸) ,, ,, ,, ,, P99, (1928)
(۹) Phil. Trans; AP397 (1894)
(۱۰) Viscosity of Liquids "Dunstan & Thole" P31 (1914)
(۱۱) Trans Faraday Soc. 18. P3 (1923)
(۱۲) Viscosity of Liquids "E Hatschek"; P29 (1928)
(۱۳) J. Amer. Chem. Soc. 35, P737 (1913)
(۱۴) General Physics "E Edser" P516 (1926)
(۱۵) Phil Mag. 42, P1022 (1921)
(۱۶) Proc, Roy, Soc. A83 P265 (1910)
(۱۷) A Monograph of Viscometry by "G. Barr"; P169 (1931)
(۱۸) Phil. Mag. 36, P507 (1893)
(۱۹) Properties of Matter "Newman & Searle"; P242 (1928)
(۲۰) Text Book of Heat "Saha & Srivastava"; P132 (1931)

# نواں باب

## نفوذ اور ولوجی دباؤ

**نفوذ:** — ایک گہرے برتن کے پیندے میں کسی نمک کے محلول کو ڈالدیا جائے اور احتیاط کے ساتھ پانی سے برتن کو اس طرح بھرا جائے کہ محلول میں رویں نہ پیدا ہوں تو یہ دیکھا گیا ہے کہ محلول برتن کے پیندے میں نہیں رہتا بلکہ پورے برتن میں سالمات کی حرکت کی وجہ سے بتدریج پھیل جاتا ہے —
پوٹاسیم پرمینگنیٹ یا کاپر سلفیٹ، یا کرومک ترشہ کے مرتکز محلول کو کسی خاص گہرائی تک شیشہ کے گہرے برتن میں رکھ کر صاف پانی آہستہ آہستہ اس طرح اس میں ڈالا جائے کہ مائع میں کوئی رویں نہ پیدا ہوں تو ابتدا میں رنگین اور بے رنگ حصہ کے درمیان نمایاں طور پر ایک واضح سطح نظر آتی ہے لیکن کچھ دیر کے بعد اوپر والا حصہ بتدریج رنگین ہونے لگتا ہے اور برتن کے نچلے حصہ والے مائع کا رنگ پہلے کی نسبت پھیکا ہونے لگتا ہے۔ رنگ کی یہ تبدیلی اسوقت تک برابر جاری رہتی ہے جب تک کہ پورے برتن میں مائع کا رنگ ایک نہ ہو جائے۔ اس عمل کو "نفوذ" سے تعبیر کیا جاتا ہے۔ مائعات میں یہ عمل گیسوں کے مقابلہ میں بہت سست ہوتا ہے۔
گیرہیم پہلا شخص تھا جس نے ۱۸۵۱ء میں نفوذ پر تجربے کئے۔ اس نے ایک چوڑے منہ کی بوتل لی اور اس میں زیر تجربہ محلول کو بھر دیا۔ اس بوتل کو ایک اور بڑے برتن میں رکھ کر اتنا پانی اس برتن میں ڈالا گیا کہ پانی کی سطح کھلی بوتل کے اوپر آ گئی۔ چند دنوں کے بعد بوتل کے اندر کے محلول کو یہ دریافت کرنے کی غرض سے جانچا گیا کہ کتنا نمک نفوذ کے ذریعہ بڑے برتن

میں پہنچ گیا ہے۔ اسوقت یہ معلوم ہوا کہ (الف) مختلف نمکوں کے محلولوں کی شرح نفوذ مختلف ہوتی ہے۔ (ب) نمک، شکر، دھاتی ترشوں وغیرہ کے محلول البومن، گوند، جیلیٹن وغیرہ کی بہ نسبت بہت زیادہ تیزی سے نفوذ پذیر ہوتے ہیں۔ (ج) حل شدہ اشیاء کی وہ مقدار جو اکائی وقت میں ایک پرت سے دوسرے پرت تک گزرتی ہے، ان پرتوں کے درمیان جو فرقِ ارتکاز ہوگا اُس کے متناسب ہوتی ہے۔ (د) نفوذ کی شرح تپش کے ساتھ بڑھتی ہے۔ سادہ ریاضی کی شکل میں سنہ ۱۸۵۵ء میں فِک نامی ایک شخص نے ان نتائج کو پیش کیا تھا چنانچہ یہ فِک کے کلیہ سے تعبیر کئے جاتے ہیں۔

① فک کا کلیہ۔ فوریئر کے موصلیت حرارت کے کلیہ کو پیش نظر رکھکر فک نے نفوذ کے کلیہ کو اخذ کیا تھا۔ موصلیت حرارت کا کلیہ یوں بیان کیا جاسکتا ہے:—

$$ح = ھ \frac{فرت}{فرلا} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

جہاں ح حرارت کی وہ مقدار ہے جو اکائی وقت میں ایسی دو متوازی مستویوں کے اکائی رقبہ میں سے گزرتی ہے جن کے درمیان چھوٹا سا "فرلا" فاصلہ ہوتا ہے اور دونوں کی تپش علی الترتیب ت اور ت + فرت ہوتی ہے۔ ھ موصلیت حرارت کی شرح ہے۔

اسی طرح سے نفوذ کا کلیہ بھی لکھا جاسکتا ہے:—

$$حہ = مہ \frac{فرع}{فرلا} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (۲)$$

جہاں حہ کسی نمک کی وہ مقدار ہے جو اکائی وقت میں ایسی دو متوازی مستویوں کے اکائی رقبہ میں سے گزرتی ہے جن کے درمیان بہت ہی چھوٹا فاصلہ "فرلا" ہو اور دونوں کے ارتکاز علی الترتیب ع اور ع + فرع ہوں۔ مہ ایک مستقل ہے جسکو حل پذیر شئے کے لئے نفوذ کی قدر کہتے ہیں۔

محلول میں اکائی رقبوں کے دو مستوی ایسے لو جو ایک دوسرے سے فرلا فاصلہ پر ہوں۔ اس صورت میں پہلی مستوی سے اکائی وقت میں نمک کی درآمد مساوات (۲) سے مہ $\frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}}$ کے مساوی ہے۔ اکائی وقت میں دوسری مستوی سے نمک کی برآمد مساوی ہے فر(مہ $\frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}}$) + $\frac{\text{مہ فرع}}{\text{فرلا}}$ =

$$= \frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\left(\text{مہ}\,\frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}}\right)\text{فرلا} + \text{مہ}\,\frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}}$$

لہذا دونوں مستویوں کی درمیانی فضا میں $\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\left(\text{مہ}\,\frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}}\right)$ فرلا نمک کی مقدار کا اضافہ اکائی وقت میں ہوتا ہے۔ دونوں مستویوں کے درمیان

چونکہ حجم فرلا ہے لہذا نمک کی مقدار میں اضافہ فی اکائی حجم فی اکائی وقت مساوی ہے مہ $\frac{\text{فر}^2\text{ع}}{\text{فرلا}^2}$ اور یہ ارتکاز کی شرح تبدیلی کے مساوی ہے۔ لیکن شرح تبدیلی ارتکاز مساوی ہے $\frac{\text{فرع}}{\text{فرت}}$ جہاں فرت وقت کے وقفہ کی ایک چھوٹی مقدار ہے۔

$$\text{لہذا}\quad \frac{\text{فرع}}{\text{فرت}} = \text{مہ}\,\frac{\text{فر}^2\text{ع}}{\text{فرلا}^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۳)$$

یہ تفرقی مساوات نفوذ کے سوالات کے حل کرنے میں بہت ہی مفید ہے بشرطیکہ ابتدائی حالات دئے جائیں۔

مثلاً $\text{ع}_{\text{صفر}}$ ارتکاز کا ایک ایسا محلول لو جو ایک اسطوانہ نما برتن میں ل طول رکھتا ہے۔ فرض کرو کہ ل طول کا محلل اس پر اوپر کی جانب سے منطبق کیا جاتا ہے۔ مساوات (۳) کو حل کرنے سے ل طول میں کسی نقطہ پر کسی وقت میں ارتکاز ع کی قیمت معلوم کی جا سکتی ہے جبکہ لا کی وسعت کے حدود[۳] لا = صفر سے لا = ل تک لئے جائیں جبکہ ت = صفر ہو اور نیز جبکہ ت = ∞ ہو:—

$$ع = \frac{ع_{صفر}}{ل + ل_۱}\left[ ل_۱ + \frac{۲ل}{\pi} \sum \frac{۱}{ن} و^{-مہ ن^۲ \left(\frac{\pi}{ل}\right)^۲ ت} جیب \frac{ن \pi ل_۱}{ل} \right] \ldots (۴)$$

جبکہ ن = ۱، ۳، ۵، ۷، وغیرہ

**نفوذ کی قدر کی دریافت:۔** مساوات (۴) سے مہ کی قیمت دریافت کی جاسکتی ہے بشرطیکہ وقتاً فوقتاً کسی نقطہ پر ارتکاز کی تبدیلی (مائع کو بحیثیت مجموعی کسی طرح چھیڑنے کے بغیر) معلوم کی جاسکے۔

۱۸۵۶ء میں لارڈ کلون نے ایک انتصابی برتن کے نچلے نصف حصہ میں محلول بھر کر اوپر کے نصف حصہ میں خالص پانی ڈالا۔ مختلف کثافتوں والے شیشہ کے منکے جب محلول میں رکھے گئے تو ابتدا میں وہ پانی اور محلول کے مقام اتصال پر تیرتے رہے لیکن جوں جوں نفوذ کا عمل ہونے لگا وہ علیحدہ ہونے لگے اور ان میں سے جو زیادہ وزن دار تھے نیچے بیٹھنے اور ہلکے اوپر آنے لگے۔ معلوم کثافت کے منکوں کے مقام سے محلول میں نمک کی تقسیم یا کسی نقطہ پر ارتکاز کسی خاص وقت میں معلوم کیا گیا اور اس طرح مہ کی قیمت دریافت کی گئی۔ اس طریقہ میں ایک یہ اعتراض پیدا ہوتا ہے کہ منکوں پر ہوا کے بلبلے پیدا ہو سکتے ہیں جن سے ان کی اوچھال میں تبدیلی ہو سکتی ہے۔

وائنر نے ۱۸۹۳ء محلول کے مختلف نقاط پر انعطاف نماؤں کی پیمائش کر کے مختلف پرتوں کے ارتکاز کو کسی خاص وقفہ کے بعد دریافت کرنے میں کامیابی حاصل کی۔ اس سے پہلے اس نے یہ دریافت کر لیا تھا کہ ارتکاز کے ساتھ ساتھ کس طرح انعطاف نما بدلتا ہے۔ شکر کے محلولوں کی صورت میں تقطیب کے مستوی کے گھماؤ کے ذریعہ ارتکاز کی قیمت دریافت کی گئی تھی۔

۱۸۷۹ء میں فِک کے کلیہ کی تصدیق، زنک سلفیٹ کے محلول کی صورت میں، ملغم جست کی دو تختیوں کے درمیان قوت محرکہ برق کو ناپ کر، ییف و بیبر نے کی تھی۔

اس نے پہلے یہ دریافت کرلیا تھا کہ قوت محرکۂ برق تختیوں سے مس کرنے والے محلول کے ارتکاز کے ساتھ ساتھ کس طرح متغیر ہوتی ہے بعد میں ٹلوڈ نے ۱۹۲۲ء میں اور کلیک نے ۱۹۲۴ء میں، ایک خاص وقفہ کے بعد کسی نقطہ پر نفوذ کے دوران میں ارتکازوں کی قیمتیں نور کی شعاعوں کے خماؤ کے ذریعہ دریافت کی تھیں۔ شعاعوں کا یہ خماؤ گہرائی کے ساتھ کثافت کی تبدیلی کی وجہ سے اس صورت میں پیدا ہوتا ہے جبکہ شعاعیں اوپر کی سطح پر تقریباً مماسی زاویئے بناتی ہوئی واقع ہوں۔(۴)

یہاں اس کو یاد رکھنا چاہیئے کہ نفوذ کی قدر "مہ" کی قیمت نمک اور محلل کی نوعیت کے علاوہ تپش اور محلول کی طاقت پر بھی منحصر ہوتی ہے۔

یہ اوپر بیان کیا جا چکا ہے کہ گیسوں میں نفوذ مائعات کی بہ نسبت بہت زیادہ تیز واقع ہوتا ہے۔ گیسوں کے لئے بھی مائعات کی طرح فک کے کلیہ کی شکل کے ایک کلیہ کا اطلاق کیا جا سکتا ہے۔ دو ایسی گیسوں پر غور کرو جن میں سے پہلی کی کثافت کی ڈھال کسی خاص نقطہ پر $\frac{ف ث}{ف لا}$ ہے۔ ایسی صورت میں پہلی گیس کی کمیت جو افقی مستوی کے اکائی رقبہ میں سے اکائی وقت میں گزرے گی مہ $\frac{ف ث}{ف لا}$ کے مساوی ہوگی جہاں ث پہلی گیس کی کثافت کسی قائم افقی مستوی سے لا بلندی کے اوپر ہے اور مہ اُن دونوں گیسوں کی نوعیت پر منحصر ہے۔ مہ کی پیمائش آسان اس لئے نہیں ہے کہ دونوں گیسوں کی ابتدائی معلوم تقسیم کی ترتیب نہایت دشوار کام ہے۔

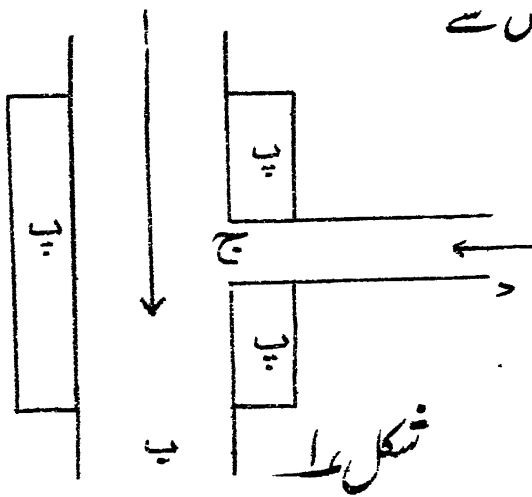
لاشمیٹ اور اوبرمیئر نے ایک لمبا اسطوانہ ایسا استعمال کیا جو ایک قرص سے دو حصوں میں تقسیم ہو جاتا تھا۔ اس کے نچلے حصہ میں زیادہ کثیف گیس رکھی گئی تھی اور اوپر کے حصہ میں ہلکی۔ اس کے بعد قرص یا

دیا فرغمہ کو باحتیاط تمام رویں پیدا کرنے کے بغیر ہٹا دیا گیا اور گیسوں کو باہمی نفوذ پذیر ہونے کا موقع دیا گیا۔ ایک خاص وقت کے بعد قرص کو پھر رکھ دیا گیا اور اسطوانہ کے اوپر کے حصہ میں بھاری گیس کی مقدار معلوم کر لی گئی۔ اس سے مہ کی قیمت دریافت کی گئی۔ ۱۸۸۲ء میں وٹیز نے ڈاماں کے تداخل پیما کے ذریعہ، کسی مقام پر انعطاف نما کی وقتاً فوقتاً پیمائش کر کے گیسوں کا تناسب کاربن مان آکسائڈ اور ہوا کی صورت میں دریافت کیا تھا۔ گیسوں کی صورت میں بھی مائعات کی طرح مہ کی قیمت تپش کے ساتھ بڑھتی ہے۔ گیسوں میں مہ دباؤ سے بھی متاثر ہوتا ہے یعنی گیسوں کے آمیزہ کے مجموعی دباؤ سے مہ کی قیمت تناسب معکوس رکھتی ہے۔

ایسی صورت میں جبکہ نفوذ پذیر گیسوں میں سے ایک کسی مائع کا بخار ہوتا ہے اور گیس اور اس بخار کے مابین نفوذ کی قدر مہ دریافت کرنا ہو تو ایک اسطوانہ نما نلی کے پیندے میں کسی تپش پر کچھ مائع لیا جاتا ہے اور بخارات سے پاک گیس کی تیز رو نلی کے منہ پر سے گزاری جاتی ہے[4]۔ جب کچھ دیر تک یہ رو گزرتی ہے تو بخار کی یکساں کثافت کی ڈھال نلی میں پیدا ہو جاتی ہے۔ بخار کی یہ کثافت کی ڈھال $\frac{د}{ل}$ ہے جہاں د مائع کا اعظم بخاری دباؤ دوران تجربہ کی تپش پر ہے اور ل، نلی کے منہ سے مائع کی سطح تک کا فاصلہ ہے۔ اکائی وقت میں نلی سے باہر بہنے والے بخار کی کمیت، جو اکائی وقت میں تبخیر پانے والے مائع کی مقدار کے مساوی ہوتی ہے (اور جس کی پیمائش آسانی سے کی جا سکتی ہے) مہ $\frac{د}{ل}$ کے مساوی ہوتی ہے۔ لہذا د اور ل کی قیمتیں معلوم ہوں تو مہ کی قیمت دریافت کی جا سکتی ہے۔ اس طریقہ سے اسٹیفان اور ونکلمین نے مہ کی قیمتیں مختلف بخارات اور گیسوں کے لئے دریافت کی ہے۔

ڈینیل[5] نے یہ ثابت کیا کہ سیسہ، جست، ٹین، سونے اور چاندی میں

سے پارے کا نفوذ ہوتا ہے۔ سر رابرٹ آسٹن نے دھاتوں میں سے دھاتوں کے نفوذ پر مسلسل تجربے کئے اور مختلف دھاتوں کے لئے مہ کی قیمتیں سیسہ، ٹین، وغیرہ میں سے، مختلف تپشوں پر دریافت کیں۔

**گیسوں اور بخارات کے مابین نفوذ کے مظاہر کا اطلاق :-** پارہ کے نفوذی پمپ میں، نفوذ کے اس عمل سے مدد لیکر ایک قلیل وقفہ میں زبردست خلا پیدا کیا جا سکتا ہے۔ گائیڈے کے نفوذی پمپ کا اصول شکل ۱۰ میں دکھلایا گیا ہے۔ ہوا سے معرّا پارے کے بخارات نلی میں ا سے ب کی طرف گزرتے ہیں۔

ج د ایک نلی ہے جہاں سے گیس داخل ہوتی ہے۔ گیس پارے کے بخارات میں نفوذ پزیر ہوتی ہے اور بخار کے ساتھ نیچے جاتی ہے۔ پ پانی سے سرد کئے ہوئے خانے ہیں جن کی مدد سے بخارات منجمد ہوتے ہیں۔ گائیڈے نے یہ ثابت کیا کہ گیس کا وہ حجم جو بخارات میں نفوذ پزیر ہوتا ہے، نلی ج د کے طول اور قطر اور نیز گیس کی مہ کی قیمت پر منحصر ہوتا ہے۔ نلی ج د کا قطر، گیس کے سالمات کے اوسط آزاد راستہ کے رتبہ کا ہوتا ہے۔

شکل ۱۰

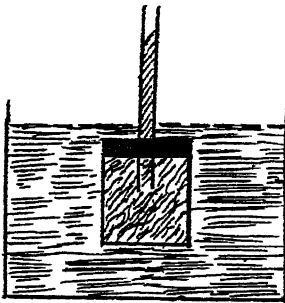
گائیڈے نے مختلف اقسام کے نفوذی پمپ کی ساخت کے متعلق تجاویز پیش کئے ہیں۔ ایسے تمام پمپ $۱۰^{-۷}$ مم پارہ کے دباؤ تک خلا پیدا کر سکتے ہیں۔

گائیڈے اور فولمر کے نفوذی پمپ کے عمل اور ترتیب وغیرہ کے متعلق معلومات ایک خاص فہرست [نشان ۱۳' ای لیپولڈ ناخ فولگر اے جی کولن (۱۹۳۱)] کے ذریعہ دئے گئے ہیں۔

جب کبھی اس سے زیادہ خلا درکار ہوتا ہے تو اس قسم کے متعدد پمپ ہم توازی جوڑ دئے جاتے ہیں۔ نظریہ تحرک کے باب میں سالمی پمپ کا تفصیلی بیان دیا گیا ہے۔

ولوجی دباؤ:۔ گائے کے مثانہ کو جو الکہل سے بھرا ہوا ہو اگر مضبوطی کے ساتھ بند کر کے پانی میں ڈبویا جائے تو پہلے تو وہ پھولنے لگتا ہے اور آخرکار پھٹ جاتا ہے۔ اگر بجائے الکہل کے اس میں پانی بھرا جائے اور الکہل میں اس کو ڈبویا جائے تو پھولنے کے عوض وہ سکڑنے لگتا ہے۔ اس کی وجہ یہ ہے کہ پانی تو مثانہ میں سے گزر جاتا ہے لیکن الکہل نہیں گزر سکتا۔ راؤلٹ نے دریافت کیا کہ جب خوک کا مثانہ بطور جھلی استعمال کیا گیا تو میتھل الکہل، ایتھر کی سمت میں گزر گیا اور ربر کو جب جھلی کی طرح استعمال کیا گیا تو ایتھر الکہل کی سمت میں گزر گیا۔ اس سے ظاہر ہے کہ سمت کا انحصار جھلی کی نوعیت پر ہے۔ ایسی جھلی جو کسی ایک گیس یا مائع کو اپنے میں سے گزرنے دیتی ہے لیکن کسی دوسرے گیس یا مائع کو نہیں گزرنے دیتی نیم نفوذ پزیر جھلی کہلاتی ہے۔ مثلاً گائے کا مثانہ جیسا کہ اوپر ذکر کیا جا چکا ہے نیم نفوذ پزیر جھلی ہے۔

کاپر فیرو سائینڈ کی جھلی بھی اسی طرح نیم نفوذ پزیر ہوتی ہے۔ اس کی وجہ یہ ہے کہ پانی تو اس میں سے گزر جاتا ہے لیکن کاپر سلفیٹ کے سالمات نہیں گزر سکتے۔ پلیڈیم کا ورق بھی نیم نفوذ پزیر ہے کیونکہ ہائیڈروجن تو اس میں سے گزر جاتی ہے لیکن نائیٹروجن نہیں گزر سکتی۔ پانی کی ایک جھلی میں سے امونیا تو گزر جاتی ہے لیکن آکسیجن نہیں گزر سکتی۔ نیم نفوذ پزیر جھلی میں سے

کسی گیس یا مائع کا گزرجانا "دلوج" سے موسوم کیا جاتا ہے۔
سب سے پہلے فقر نے دلوجی کلیات کا مطالعہ کیا۔ ایک مسامدار برتن کو اس نے کیوپرک سلفیٹ کے محلول سے بھر کر پوٹاسیم فیرو سائینڈ کے ہلکائے ہوئے محلول میں ڈبو دیا۔ اس برتن کے دیواروں کے مساموں میں کیوپرک فیرو سائینڈ کی ایک جھلی پیدا ہوئی جس میں سے پانی تو نفوذ پذیر ہوتا تھا لیکن شکر نہیں گزر سکتی تھی۔ اس برتن کو دھو کر شکر کے محلول سے بھر دیا گیا اور اس کے منھ کو ایک ڈاٹ سے بند کرنے کے بعد (ڈاٹ میں سے ایک لمبی نلی حسب شکل ۲ گزاری گئی) جب اس کو خالص پانی میں ڈبو دیا گیا تو انتصابی نلی میں محلول چڑھنے لگا۔ اس سے ظاہر ہوا کہ نیم نفوذ پذیر جھلی میں سے پانی شکر کے محلول کی طرف گزر جاتا ہے۔

شکل ۲

جب اس انتصابی نلی میں مائع ایک خاص بلندی تک پہنچ جاتا ہے تو مسامدار برتن میں مزید پانی نہیں داخل ہوتا۔ نلی میں مائع کے استوانہ کی وجہ سے جو دباؤ پڑتا ہے وہ برتن میں مزید پانی کے داخل ہونے کو روک دیتا ہے۔ یہ اندرونی دباؤ جو پانی کے داخلہ کو مسدود کر دیتا ہے مسامدار برتن میں کے مائع کا "دلوجی دباؤ" کہلاتا ہے۔ لہذا کسی محلول کے دلوجی دباؤ کی پیمائش کرنا ہو تو سب سے پہلے خالص محلل سے اس کے محلول کو نفوذ پذیر جھلی کی مدد سے (جو محلل کو تو گزرنے دیتی ہو لیکن منحل کو نہیں گزرنے دیتی) جدا کرنا چاہیئے اور پھر اس ماسکونی دباؤ کو ناپنا چاہیئے جو محلول کے رخ پر جھلی کے اندر محلل کو داخل ہونے سے باز رکھتا ہے۔

نفرنے یہ دریافت کیا کہ مستقل تپش پر ہلکائے ہوئے محلولوں کے لئے ولوجی دباؤ، محلول کے ارتکاز کے متناسب ہوتا ہے۔

اگر د ولوجی دباؤ ہو اور مستقل تپش ت پر محلول کا ارتکاز ع ہو تو

د ∝ ع اور ساتھ ہی ساتھ د ∝ ت

∴ د ∝ ت . ع

یعنے د = لا ت ع جہاں لا = مستقل

اگر ع = منحل کے گرام سالمات فی لیٹر محلول میں

تو ع = $\frac{ع_1}{ح}$

جہاں $ع_1$ = منحل کے گرام سالمات کی تعداد ح لیٹر محلول میں

∴ د ح = $ع_1$ لا ت ............ (۵)

کسی گیس کیلئے ہم جانتے ہیں کہ د ح = $ع_ب$ . لا ت ...... (۶)

جہاں د = گیس کا دباؤ اور $ع_ب$ = گیس کے گرام سالمات کی تعداد ح لیٹر میں

اور لا = گیس کا مستقل فی گرام سالمہ

لہذا ان دونوں مساواتوں کا مقابلہ کرنے سے فانٹ ھاف نے ہلکائے ہوئے محلولوں کی صورت میں یہ بیان کیا کہ کسی محلول کا ولوجی دباؤ گیس کے اس دباؤ کے مساوی ہے جو کہ منحل کی صورت میں ہوتا ہے جبکہ منحل گیس کی حالت میں ہو اور اتنا ہی حجم گھیرتا ہو جتنا کہ محلول کے لئے اس ہی تپش پر درکار ہے۔

مساوات (۵) سے

د ح = $\frac{ک_1}{ٹ_1}$ . لا ت ............ (۷)

جہاں $ک_1$ = منحل کا وزن گرام میں اور $ٹ_1$ = منحل کا سالمی وزن

لہذا مساوات (۷) سے ظاہر ہے کہ کسی محلول کا ولوجی دباؤ ہمیں حل شدہ

شے کے سالمی وزن کی دریافت میں مدد دیتا ہے۔

**بخاری دباؤ:۔** کسی محلول کا بخاری دباؤ $\text{د}_{۱}$ محلل کے بخاری دباؤ $\text{د}_{\text{ب}}$ سے کم ہوتا ہے۔ $(\text{د}_{\text{ب}} - \text{د}_{۱})$ بخاری دباؤ کا اُتار ہے اور $\left(\frac{\text{د}_{\text{ب}} - \text{د}_{۱}}{\text{د}_{\text{ب}}}\right)$ بخاری دباؤ کا اضافی اُتار ہے۔ راولٹ نے مسلسل تجربے کیے اور مختلف محلولوں اور محللوں کے لئے بخاری دباؤ کے اضافی اُتار کی قیمتوں کی پیمائش کی۔ اس نے یہ ثابت کیا کہ کسی خاص ارتکاز کے لئے یہ تپش کے تابع نہیں ہے۔ لیکن محلول کے ارتکاز کے راست متناسب ہے۔ اس جملہ

$$\frac{\text{د}_{\text{ب}} - \text{د}_{۱}}{\text{د}_{\text{ب}}} \cdot \frac{\text{ل}^{\text{ع}}_{۱}}{\text{ک}_{۱}} \cdot \frac{\text{ک}_{\text{ب}}}{۱۰۰}$$

کو بخاری دباؤ کے سالمی اُتار سے موسوم کیا جاتا ہے۔

جہاں $\text{ک}_{۱}$ سے مراد منحل کے گراموں کی تعداد ہے محلل کے $\text{ک}_{\text{ب}}$ گراموں میں۔ راؤلٹ نے دریافت کیا کہ اگر ہم اس جملہ کو محلل کے سالمی وزن $\text{ل}^{\text{ع}}_{\text{ب}}$ سے تقسیم کریں تو تمام محللوں کے لئے نتیجہ تقریباً ۰٫۰۱۰۴م کے مساوی حاصل ہوتا ہے۔ اس نے یہ بھی دریافت کیا کہ $\left(\frac{\text{د}_{\text{ب}} - \text{د}_{۱}}{\text{د}_{\text{ب}}}\right)$ تقریباً $\frac{\text{ع}_{۱}}{\text{ع}_{\text{ب}}}$ کے مساوی ہے جہاں $\text{ع}_{۱}$ محلول کے ایک خاص حجم میں منحل کے گرام سالمات کی تعداد ہے اور $\text{ع}_{\text{ب}}$ سے مراد اسی حجم کے محلول میں محلل کے گرام سالمات کی تعداد ہے۔

اب ہم ایک آسان طریقہ سے بخاری دباؤ کے اُتار اور ولوجی دباؤ کے درمیان ایک رشتہ حاصل کرنے کی کوشش کریں گے شکل ۳ پر غور کرو۔

۲ ایک لمبی نلی ہے جس میں محلول رکھا جاتا ہے۔ ا کے پیندے میں ایک نیم نفوذ پذیر جھلی لگی ہوئی ہے۔ ب ایک بند برتن ہے (جس میں ہوا نہیں ہے) اور اس میں محلل رکھا جاتا ہے۔ ولوج کی وجہ سے ا میں

شکل ٣

مائع کی سطح ب کی سطح سے بقدر ل
زیادہ ہو گی۔ نیم نفوذ پزیر جھلی کے دونوں
جانب دباؤ میں فرق د ہے اور یہی محلول
کا ولوجی دباؤ ہو گا۔

لہٰذا د مساوی ہے ج ثہ ل
کے، جہاں ثہ محلول کی کثافت ت°
تپش پر ہے۔

لیکن اب محلل کا بخاری دباؤ اگر
ولوجی دباؤ سے زیادہ ہو تو اس بلندی
کو متاثر کرتا ہے اور اسطوانہ کو نیچے
کی طرف ڈھکیلتا ہے

اب بخارات کی ایک چھوٹی سی دھجی پر غور کرو جس کی بلندی فر ل ہے اور
فرض کرو کہ اس پر دباؤ ($\text{د}_\text{ب}$ - فر $\text{د}_\text{ب}$) ہے۔

ایسی صورت میں $-\text{فر}\,\text{د}_\text{ب} = \text{ج}\ \text{ث}\ \text{فر ل}$

جہاں ث = محلل کے بخارات کی کثافت ت° تپش پر

لیکن $\text{د}_\text{ب} = \dfrac{\text{ث لا ت}}{\text{لئ}_\text{ب}}$

∴ ان دونوں مساواتوں سے:-

$$-\text{فر}\,\text{د}_\text{ب} = \frac{\text{ج}\ \text{د}_\text{ب}\ \text{لئ}_\text{ب}}{\text{لا ت}}\,.\,\text{فر ل}$$

یعنی
$$-\frac{\text{فر}\,\text{د}_\text{ب}}{\text{د}_\text{ب}} = \frac{\text{لئ}_\text{ب}\ \text{ج}\ \text{فر ل}}{\text{لا ت}}$$

اس کو تکملانے سے
$$-\int_{\text{د}_\text{ب}}^{\text{د}} \frac{\text{فر}\,\text{د}_\text{ب}}{\text{د}_\text{ب}} = \int_{\text{صفر}}^{\text{ل}} \frac{\text{لئ}\ \text{ج}\ \text{فر ل}}{\text{لا ت}}$$

یعنی $\text{لوک}_{\text{و}} \frac{\text{د}_{\text{ب}}}{\text{د}_{\text{ا}}} = \frac{\text{ئ ج ل}}{\text{لا ت}}$ ............ (۸)

$\therefore \text{د} = \text{ج ث ل} = \frac{\text{ث لا ت}}{\text{ئ}_{\text{ب}}} . \text{لوک}_{\text{و}} \frac{\text{د}_{\text{ب}}}{\text{د}_{\text{ا}}}$ ............ (۹)

اس سے کسی محلول کے دلوجی دباؤ اور بخاری دباؤ کے اُتار کے درمیان ضروری تعلق معلوم ہوجاتا ہے۔

ہلکائے ہوئے محلولوں کے لئے مساوات (۵) کو یوں لکھا جا سکتا ہے:۔

$\text{د ح}_{\text{ب}} = \text{ع}_{\text{ا}} . \text{لا ت}$ جہاں $\text{ح}_{\text{ب}}$ = محلل کا حجم جس میں منحل کے $\text{ع}_{\text{ا}}$ گرام سالمات ہیں۔

$\therefore \text{د} = \frac{\text{ع}_{\text{ا}} . \text{لا ت} . \text{ثب}}{\text{ک}_{\text{ب}}}$

جہاں $\text{ثب}$ = محلل کی کثافت اور $\text{ک}_{\text{ب}}$ = محلل کی کمیت

اب مساوات (۹) سے:۔

$\text{لوک}_{\text{و}} \frac{\text{د}_{\text{ب}}}{\text{د}_{\text{ا}}} = \frac{\text{د ئ}_{\text{ب}}}{\text{ث لا ت}} = \frac{\text{ع}_{\text{ا}} \text{ثب ئ}_{\text{ب}}}{\text{ث ک}_{\text{ب}}} =$

$= \frac{\text{ع}_{\text{ا}}}{\text{ع}_{\text{ب}}} . \frac{\text{ثب}}{\text{ث}}$

لیکن $\text{لوک}_{\text{و}} \frac{\text{د}_{\text{ب}}}{\text{د}_{\text{ا}}} = \text{لوک}_{\text{و}} \left(1 + \frac{\text{د}_{\text{ب}} - \text{د}_{\text{ا}}}{\text{د}_{\text{ا}}}\right)$

$= \left(\frac{\text{د}_{\text{ب}} - \text{د}_{\text{ا}}}{\text{د}_{\text{ا}}}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\text{د}_{\text{ب}} - \text{د}_{\text{ا}}}{\text{د}_{\text{ا}}}\right)^2$ ............

$= \left(\frac{\text{د}_{\text{ب}} - \text{د}_{\text{ا}}}{\text{د}_{\text{ا}}}\right)$

اور کسی بہت ہی ہلکائے ہوئے محلول کیلئے $ث_ب \simeq ثہ$

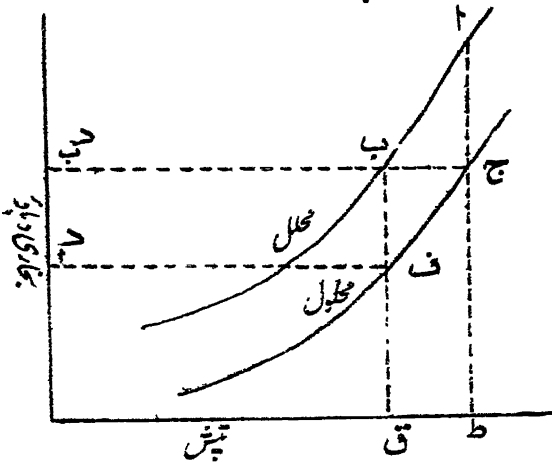
اور $د_ب \simeq د_۱$

$$\therefore \frac{د_ب - د_۱}{د_ب} = \frac{ع_۱}{ع_ب} \quad ........................ (۱۰)$$

اس سے بخاری دباؤ کے اضافی اُتار اور ارتکاز کے درمیان تعلق ظاہر ہوتا ہے اور یہ تپش کے غیر تابع ہے۔

**محلولوں کے نقطۂ جوش اور نقطۂ انجماد:۔**

کوئی مائع اُس وقت جوش کھاتا ہے جبکہ اس کا بخاری دباؤ، بیرونی دباؤ کے مساوی ہوتا ہے۔ ایک غیر طیران پزیر شئے کو محلل میں حل کرنے کا اثر یہ ہوتا ہے کہ بخاری دباؤ کم ہو جاتا ہے۔

لہذا اُبلنے کیلئے محلول کی تپش کو اور زیادہ اونچا کرنا ہوتا ہے تاکہ بخاری دباؤ اور بیرونی دباؤ میں مساوات قائم ہو جائے۔ محلول کے نقطۂ جوش کے اس چڑھاؤ کو حسب ذیل طریقہ سے دریافت کیا جا سکتا ہے۔

شکل ۱۴ میں اوپر والا منحنی ایک محلل کے بخاری دباؤ اور اسکی تپش میں اور نیچے کا منحنی محلول کے بخاری دباؤ اور اسکی تپش میں تعلق بتاتا ہے۔

محلل کے دباؤ $د_ب$ پر محلول کو جوش دینے کے لئے محلول کی تپش کو بقدر ط ق بڑھانے کی ضرورت ہوتی ہے۔

شکل ۱۴

فرض کرو کہ نقطۂ جوش میں یہ اضافہ یا چڑھاؤ ط ق، $\Delta$ ت کے مساوی ہے۔

شکل میں $\text{ا ج} = \text{ب ج} \text{ مس ا ب ج} =$

$$= \Delta \text{ت} \; \frac{\text{ز د}_\text{ب}}{\text{ز ت}}$$

لیکن کلاؤشیس اور کلیپیران کی مساوات (۷) سے ہم جانتے ہیں کہ

$$\frac{\text{ز د}_\text{ب}}{\text{ز ت}} = \frac{\text{مخ د}_\text{ب}}{\text{لا ت}^2} \quad \text{.........} \quad (۱۱)$$

جہاں مخ = محلل کی سالمی حرارت مخفی (بخار کی)

اور ت = محلل کا نقطۂ جوش

$$\therefore \text{ا ج} = \frac{\Delta \text{ت مخ د}_\text{ب}}{\text{لا ت}^2}$$

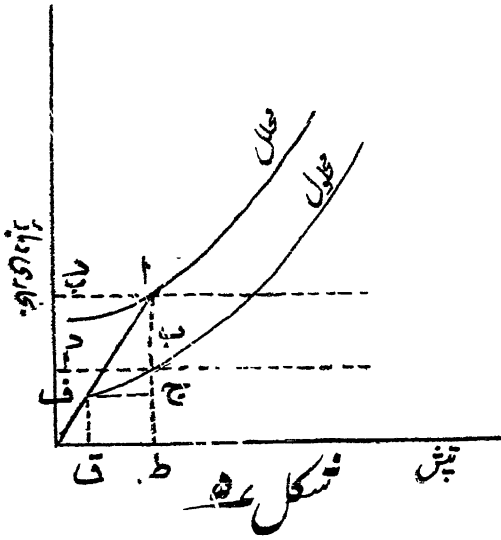
$$\therefore \frac{\text{ا ج}}{\text{ج ط}} = \frac{\Delta \text{ت مخ}}{\text{لا ت}^2} = \frac{\text{ب ف}}{\text{ف ق}} = \frac{\text{د}_\text{ب} - \text{د}_1}{\text{د}_1}$$

$$\therefore \Delta \text{ت} = \frac{\text{د}_\text{ب} - \text{د}_1}{\text{د}_1} \cdot \frac{\text{لا ت}^2}{\text{مخ}} \quad \text{.........} \quad (۱۲)$$

کسی محلول کے نقطۂ جوش کے چڑھاؤ کی یہ ایک عام مساوات ہے۔

اب مساوات (۹) اور (۱۲) سے :-

$$\Delta \text{ت} = \frac{\text{د ل}_\text{ب} \text{ ت}}{\text{ثہ مخ}} \quad \text{.........} \quad (۱۳)$$

اس مساوات سے محلل کا سالمی وزن دریافت کیا جا سکتا ہے۔
اسی طرح کسی محلول کے نقطۂ انجماد کا اُتار خالص محلل کے نقطۂ انجماد کے مقابلہ میں دریافت کیا جا سکتا ہے۔ شکل ۵ میں اوپر کا منحنی ایک محلل کے

بخاری دباؤ اور اس کی تپش
کے درمیان تعلق بتاتا
ہے اور نچلا منحنی محلول کے
لئے تپش اور بخاری دباؤ میں
تعلق ظاہر کرتا ہے۔ محلول
کو محلل کے بخاری دباؤ پر
منجمد کرنے کے لئے محلول
کی تپش میں بقدر ط ق
کمی کرنی ہوگی۔ فرض کرو
کہ یہ کمی بالتشار Δ ت کے مساوی ہے۔ اب شکل ۵۰ میں

$$\text{د}_{\text{ب}} - \text{د}_{\text{ا}} = \text{اب} = \text{اج} - \text{بج}$$

$$= \text{جف مس افج} - \text{جف مس بفج}$$

$$= \Delta\text{ت} \left\{ \frac{\text{فر د}_{\text{ب}}}{\text{فر ت}_{\text{ا}}} - \frac{\text{فر د}_{\text{چ}}}{\text{فر ت}_{۲}} \right\}$$

جہاں $\frac{\text{فر د}_{\text{ب}}}{\text{فر ت}_{\text{ا}}}$ = محلل کے تصعیدی منحنی کا ڈھال

اور $\frac{\text{فر د}_{\text{چ}}}{\text{فر ت}_{۲}}$ = محلل کے تبخیر کے منحنی کا ڈھال

اب کلاؤسیس اور کلیپیران کی مساوات سے:۔

$$\text{د}_{\text{ب}} - \text{د}_{\text{ا}} = \Delta\text{ت} \left\{ \frac{\text{ج د}_{\text{ب}}}{\text{لا ت}^{۲}} - \frac{\text{مخ د}_{\text{ب}}}{\text{لا ت}^{۲}} \right\}$$

$$= \frac{\Delta\text{ت د}_{\text{ب}}}{\text{لا ت}^{۲}} (\text{جہ} - \text{مخ})$$

$$= \frac{\Delta\text{ت د}_{\text{ب}}\ \text{فہ}}{\text{لا ت}^{۲}}$$

جہاں جہ = محلل کیلئے تصعید کی سالمی حرارت مخفی

فہ = محلل کے انجماد کی سالمی حرارت مخفی

ت = محلّل کا نقطۂ انجماد

$$\therefore \Delta \text{ت} = \frac{\text{ل}\,\text{ت}^2}{\text{فہ}} \cdot \frac{\text{دب} - \text{د}_1}{\text{دب}} \quad \dots\dots\dots\dots\dots (\text{۱۴})$$

یہ کسی محلول کے نقطۂ انجماد کے اُتار کی ایک عام مساوات ہے۔

مساوات (۱۰) اور (۱۴) سے

$$\Delta \text{ت} = \frac{\text{ل}\,\text{ت}^2}{\text{فہ}} \cdot \frac{\text{ع}_1}{\text{عب}} \quad \dots\dots\dots\dots\dots (\text{۱۵})$$

بِکمِن ⑧ کے تپش پیما کے ذریعہ مختلف ارتکازوں کے محلولوں کے نقطۂ جوش کا چڑھاؤ اور نقطۂ انجماد کا اُتار دریافت کیا جا سکتا ہے۔ اس طرح مساوات (۱۳) اور (۱۵) کی تصدیق عملی طور پر کی جا سکتی ہے۔

راؤلٹ نے یہ معلوم کیا کہ کسی محلول کیلئے نقطۂ جوش کا چڑھاؤ اور نقطۂ انجماد کا اُتار اس کے ارتکاز کے متناسب ہوتا ہے۔

## Chapter IX.

(۱) Pogg Annalen 94. P59 (1855)
(۲) Properties of Matter by Newman & Searle P288 (1928)
(۳) Proc. Roy. Soc. A 34, P3 (1932)
Proc Phys Soc. 36, P 4 (1924)
(۴) Properties of Matter by Poynting & Thomson P, 197 (1922)
(۵) ,, ,, P. 204 (1922)
(۶) General Physics for Students by E Edser P. 574 (1926)
(۷) Text Book of Heat by M. N, Saha & B N. Srivastava P443 (1931)
(۸) Text Book of Practical Physics by W. Watson, P258 (1926)

# دسواں باب

## نظریۂ تحرک

مادہ کے متعلق، نظریۂ تحرک ان مفروضات پر مبنی ہے کہ مادہ بے حد چھوٹے چھوٹے ذرات پر، جن کو جواہر اور سالمات سے تعبیر کیا جاتا ہے، مشتمل ہے۔ ایک ہی کیمیائی شئے کے سالمات، شکل جسامت اور کمیت وغیرہ میں بالکل یکساں ہوتے ہیں۔ ایک اور مفروضہ یہ بھی ہے کہ ہر شئے کے سالمات مستقل طور پر حرکت کرتے رہتے ہیں اور یہ حرکت، اس شئے کی تپش پر منحصر ہوتی ہے۔ حرکت کی وجہ سے، ان سالمات میں توانائی بالفعل ہوتی ہے۔ ٹھوس اشیا اور مائعات میں، سالمات ایک دوسرے کے بالکل قریب ہوتے ہیں لیکن گیس میں سالمات کے قطر کا مقابلہ کرتے، کسی دو قریبی سالمات کے درمیان اوسط فاصلہ معتدبہ ہوتا ہے۔ گیس کے سالمات آپس میں اکثر ٹکراتے رہتے ہیں اور ہر تصادم کے بعد ان کی رفتار کی سمت اور قیمت دفعتاً بدل جاتی ہے۔ گیسوں اور مائعات میں، سالمات کے درمیان جاذبہ کی قوت عمل کرتی ہے۔ مائعات کی صورت میں چونکہ سالمات قریب قریب ہوتے ہیں اس لئے ان میں گیس کے سالمات کی بہ نسبت، قوت جاذبہ بھی زیادہ ہوتی ہے۔ اگر کسی برتن میں گیس رکھی ہوئی ہو تو اس برتن کے دیواروں پر دباؤ پڑتا ہے۔ اس سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ ان سالمات کے درمیان دفع کی ایک قوت بھی جو ان کو ایک دوسرے سے جدا کرنے کی کوشش کرتی ہے عمل پیرا ہے۔ سالمات کی شکل کی نوعیت کے متعلق چونکہ ہمارے پاس بہت ہی کم ثبوت ہے اس وجہ سے یہ فرض کیا جاتا ہے کہ وہ چھوٹے لچک دار کرّے ہوتے ہیں۔ کرّے فرض کرنے کی

وجہ یہ ہے کہ یہ سادہ ترین ہندسی شکل ہے جو اختیار کی جا سکتی ہے۔ کامل گیس کے نظریہ سے ایسا معلوم ہوتا ہے کہ سالمات صرف ہندسی نقطے ہیں جن کی کمیتیں بہت چھوٹی ہوتی ہیں۔ اس باب میں ہم گیسوں کے (اور کسی حد تک مائعات کے بھی) نظریہ تحرک سے بحث کریں گے۔ ٹھوس کے لئے چونکہ نظریہ تحرک ابھی تک تکمیل کو نہیں پہنچ سکا اس وجہ سے اسکا ذکر اس کتاب میں نہیں کیا جائے گا۔

**کامل گیس کا دباؤ:۔** ایک کامل گیس سے مراد ایسی گیس ہے جسکے سالمات بالکل چھوٹے فرض کئے جاتے ہیں اور آپس میں، یہ ایک دوسرے پر سوائے تصادم کی صورت کے، ناقابل ذکر قوتوں سے عمل کرتے ہیں۔ ایک کامل گیس کو ایسے ایک مکعب میں فرض کرو جس کا ضلع اکائی ہے اور یہ بھی فرض کرو کہ سالمات کا ایک حصہ $ر_۱$ رفتار سے، اس کی ایک سطح کے علی القوائم حرکت کر رہا ہے۔ توانائی اور معیار حرکت کے بقا کے مسئلہ سے یہ ظاہر ہے کہ سالمات سطح سے ٹکرانے کے بعد اسی رفتار سے واپس ہوتے ہیں۔ لہذا ایک سالمہ کے معیار حرکت میں تصادم کے دوران میں تبدیلی، $۲\,م\,ر_۱$ کے مساوی ہوگی جہاں $م$ = سالمہ کی کمیت۔

اس سطح سے ایک سالمہ $\frac{ر_۱}{۲}$ دفعہ فی ثانیہ ٹکراتا ہے لہذا معیار حرکت میں فی ثانیہ تغیر $= ۲\,م\,ر_۱ \times \frac{ر_۱}{۲} = م\,ر_۱^۲$

چونکہ سطح پر جو دباؤ واقع ہوتا ہے وہ فی ثانیہ معیار حرکت کی تبدیلی کے مساوی ہے۔

لہذا ایک سالمہ سے سطح پر جو دباؤ واقع ہوتا ہے وہ $= م\,ر_۱^۲$

$\therefore$ سطح پر تمام سالمات سے جو دباؤ پڑتا ہے $= د = \sum م\,ر_۱^۲$

فرض کرو کہ ع سالمات فی مکعب سمر کیلئے $ر_۱^۲$ کا اوسط $= \overline{ر_۱^۲}$

تب $\overline{ر_۱^۲} = \frac{\sum ر_۱^۲}{ع}$ $\quad \therefore د = م\,ع\,\overline{ر_۱^۲}$

اگر $\overline{\text{سا}_2^2}$ اور $\overline{\text{سا}_3^2}$ دیگر دو عمودی سمتوں میں اوسط مربع رفتاروں کی تعبیر کریں تو چونکہ سالمات برتن کے کسی حصہ میں مجتمع ہونے کا تقاضا نہیں رکھتے اس لئے $\overline{\text{سا}_1^2} = \overline{\text{سا}_2^2} = \overline{\text{سا}_3^2}$ ۔ اگر $\text{سا}^2$ حاصل اوسط مربع رفتار ہو تو

$$\text{سا}^2 = \overline{\text{سا}_1^2} + \overline{\text{سا}_2^2} + \overline{\text{سا}_3^2} \quad \text{یعنی} \quad \overline{\text{سا}_1^2} = \frac{1}{3}\,\text{سا}^2$$

$$\therefore \text{د} = \frac{1}{3}\,\text{م ع}\,\text{سا}^2 \quad \text{لیکن} \quad \text{ع م} = \text{ثہ} \quad \text{یعنی گیس کی کثافت کے}$$

$$\therefore \text{د} = \frac{1}{3}\,\text{ثہ}\,\text{سا}^2 \quad \ldots\ldots\ldots (۱)$$

$$\text{یعنی}\quad \text{د} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}\,\text{ثہ}\,\text{سا}^2 = \frac{2}{3}\,\text{ق} \quad \ldots\ldots\ldots (۲)$$

جہاں ق = توانائی بالفعل فی اکائی حجم

لہذا مساوات (۱) سے ہم گیس کی جذر اوسط مربع رفتار سا کی قیمت دریافت کر سکتے ہیں۔

ہائیڈروجن کے لئے سا کی قیمت صفر درجہ مئی پر ۴۱۰۰ میل فی گھنٹہ دریافت کی گئی ہے۔

گیس کے آسان کلیات :۔ اگر دو گیس ایک ہی دباؤ د پر ہوں تو مساوات (۱) سے

$$\text{د} = \frac{1}{3}\,\text{م}_1\,\text{ع}_1\,\text{سا}_1^2 = \frac{1}{3}\,\text{م}_2\,\text{ع}_2\,\text{سا}_2^2$$

جہاں $\text{م}_1$، $\text{ع}_1$ اور $\text{سا}_1$ پہلی گیس سے اور $\text{م}_2$، $\text{ع}_2$ اور $\text{سا}_2$ دوسری گیس سے متعلق ہیں۔

میکسول نے یہ ثابت کیا کہ ایک ہی تپش پر ایک قسم کی گیس کے سالمات کی اوسط توانائی بالفعل دوسری قسم کی گیس کے سالمات کی اوسط توانائی بالفعل کے مساوی ہوتی ہے یعنی

$$\frac{1}{2}\,\text{م}_1\,\text{سا}_1^2 = \frac{1}{2}\,\text{م}_2\,\text{سا}_2^2$$

$\therefore$ ع = ع۲

اس سے ظاہر ہے کہ دونوں گیسوں میں ایک ہی تپش اور دباؤ پر فی مکعب سمر سالمات کی تعداد مساوی ہے۔ اس کلیہ کو کلیہ ائیوگیڈرو سے تعبیر کیا جاتا ہے۔

اوپر کی مساوات (۱) سے یہ ظاہر ہے کہ د = ⅓ ثہ ر۲۔ اسکا مطلب یہ ہے کہ کسی گیس کا دباؤ اس کی کثافت سے راست اور اسکے حجم سے معکوس تناسب رکھتا ہے بشرطیکہ اس کی تپش مستقل رہے۔ اسکو کلیہ بائیل سے موسوم کیا جاتا ہے۔

ثہ۱، ثہ۲، ثہ۳ وغیرہ مختلف کثافتوں کی متعدد گیسیں جن کی اوسط مربع رفتاریں بالترتیب ر۱۲، ر۲۲، ر۳۲ وغیرہ ہوں ایک ہی حجم کی لے کر اگر ملا دی جائیں تو مجموعی حاصل دباؤ د حسب ذیل ہوگا:-

د = ⅓ ثہ۱ ر۱۲ + ⅓ ثہ۲ ر۲۲ + ........ = د۱ + د۲ + ......

یعنی متعدد گیسوں کے آمیزہ کا دباؤ ان کے علیحدہ علیحدہ دباؤ کے مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے۔

یہ ڈالٹن کا جزئی دباؤ کا کلیہ کہلاتا ہے۔

ایک کامل گیس کے لئے ہم یہ جانتے ہیں کہ اگر اسکا دباؤ د، حجم ح، اور تپش ت درجہ مطلق ہو تو د ح = لا ت

جہاں لا ایک مستقل ہے جسکی قیمت م اور ع کی قیمتوں پر منحصر ہوتی ہے۔ کسی شے کی اتنی کمیت کو جو اس شے کے سالمی وزن کے مساوی ہو عموماً "گرام سالمہ" سے تعبیر کیا جاتا ہے، کسی گیس کا ایک گرام سالمہ جو حجم حہ گھیرتا ہے وہ اس گیس کا سالمی حجم کہلاتا ہے۔

لہٰذا کسی کامل گیس کی مساوات کو ہم یوں بھی لکھ سکتے ہیں:-

د حہ = لا ت جہاں لا ایک مستقل ہے جو گیس کے ایک گرام سالمہ سے متعلق ہے۔

مساوات (۱) سے $د = \frac{۱}{۳} \frac{ك}{ح} ر^{۲}$

یعنی $د ح = \frac{ك}{۳} ر^{۲}$ جہاں ك = سالمی وزن

$\therefore \frac{۱}{۳} ك ر^{۲} = لا ت$ ............ (۳)

اسی طرح $\frac{۱}{۲} م ر^{۲} = \bar{لا} ت$ ............ (۴)

$\therefore \frac{لا}{\bar{لا}} = \frac{ك}{م} = ن$ ............ (۵)

جہاں ن ایوگیڈرو کا مستقل کہلاتا ہے اور اس کی قیمت $= ۶٫۰۶۲ \times ۱۰^{۲۳}$ یعنی گیس کے ایک گرام سالمہ میں سالمات کی تعداد اتنی ہے۔ کسی گیس کے لیے لا کی قیمت $۸٫۲۸ \times ۱۰^{۷}$ کے مساوی ہے۔ یہ حرارت کے معادل جیلی کی اس قیمت سے جو ارگ فی گرام حرارہ کے رقوم میں لکھی جاتی ہے تقریباً دوگنی ہے۔

مساوات (۳) سے $ر^{۲} = \frac{۳ لا ت}{ك}$

$\therefore ر^{۲}$ کی قیمت گیس کی تپش مطلق کے لحاظ سے بدلتی ہے۔

مساوات (۴) اور (۵) سے فی سالمہ گیس کی اوسط توانائی بالفعل $= \frac{۱}{۲} م ر^{۲}$

$= \frac{۳ لا ت}{۲ ن}$

**رفتاروں کی تقسیم کے متعلق میکسویل کا کلیہ**[۱]**:** — کسی گیس کے خواص کا مطالعہ کرنا ہو تو ہم کو رفتاروں کی تقسیم کا کلیہ جاننا ضروری ہے۔ اسکا یہ مطلب ہے کہ کتنے سالمات کوئی خاص رفتار رکھتے ہیں۔ ظاہر ہے کہ تمام سالمات کی رفتاریں یکساں نہیں ہوسکتیں۔ اگر بالفرض کسی خاص لمحہ میں اتفاقیہ طور پر یہ یکساں ہو بھی جائیں تو دوسرے ہی لمحہ میں سالمات کے تصادمات کی وجہ سے ان کی رفتاروں میں بڑی حد تک تبدیلی واقع ہوگی۔ لہذا سالمات

کی رفتاریں صفر سے لیکر لا انتہا ہی تک، مختلف ہو سکتی ہیں۔ کلارک میکسول نے ۱۸۵۹ء میں اسکے متعلق ایک کلیہ پیش کیا جو خالصتاً "احتمال" پر غور کرنے سے، اس نے حاصل کیا تھا۔

فرض کرو کہ گیس کی کچھ مقدار کسی برتن میں مستقل حالات کے تحت رکھی ہوئی ہے۔ اگر سالمات کی تعداد اس میں کافی طور پر زیادہ ہو تو وہ ایک غیر متبدل حالت اختیار کرے گی اور اسکے فی مکعب سمر سالمات کی تعداد ع کی قیمت میں تصادم کی وجہ سے کوئی تبدیلی نہیں واقع ہوگی۔ تمام سمتوں میں مجموعی طور پر سالمات کی اوسط رفتاریں بھی ایک ہی ہوں گی۔ اگر ہر سالمہ کی رفتار کو لا، ما، یا سمتوں میں تحلیل کیا جائے تو فرض کرو س۱، س۲ اور س۳ علی الترتیب اس کے اجزائے تحلیلی ہیں جو ایک دوسرے سے بالکل آزاد ہیں۔

فرض کرو کہ جن سالمات کی رفتاریں س۱ اور س۱ + فرس۱ کے درمیان ہیں ان کی تعبیر ف (س۱) فرس۱ سے کی جاتی ہے جہاں س۱ کے تفاعل یعنی ف (س۱) کی قیمت دریافت طلب ہے۔ اسی طرح ایسے سالمات جن کی رفتاریں س۲ اور س۲ + فرس۲ کے درمیان ہوں فرض کرو کہ ف (س۲) فرس۲ سے اور جن کی رفتاریں س۳ اور س۳ + فرس۳ کے درمیان ہوں ف (س۳) فرس۳ سے تعبیر کئے جاتے ہیں۔

جن سالمات کی رفتاروں کے اجزائے تحلیلی س۱ اور س۱ + فرس۱، س۲ اور س۲ + فرس۲، س۳ اور س۳ + فرس۳ کے درمیان ہوں ان کی دریافت کا احتمال، علیحدہ علیحدہ احتمالات کے حاصل ضرب کے مساوی ہوگا یعنی = ف (س۱) ف (س۲) ف (س۳) فرس۱ فرس۲ فرس۳

فرض کرو کہ حاصل رفتار کی تعبیر س سے ہوتی ہے جس کی وجہ سے

س۲ = (س۱۲ + س۲۲ + س۳۲)۔

رفتار کی ان سمیتوں کی تعداد جن کے سروں کے نقاط فر $س_۱$ فر $س_۲$ فر $س_۳$
حجم کے عنصر میں ہوں گے ع ف ($س_۱$) ف ($س_۲$) ف ($س_۳$)
فر $س_۱$ فر $س_۲$ فر $س_۳$ کے مساوی ہوگی

اس عدد کا انحصار $س$ کی قیمت پر ہونا ضروری ہے ۔ یعنی یہ عدد =
= ع فہ ($س$) فر $س_۱$ فر $س_۲$ فر $س_۳$
جہاں فہ ($س$) = $س$ کے کسی تفاعل کے
∴ ع ف ($س_۱$) ف ($س_۲$) ف ($س_۳$) = ع فہ ($س$)
= ع ھ ($س^۲$) جہاں ھ کسی دوسرے تفاعل کو تعبیر کرتا ہے۔
∴ ف ($س_۱$) ف ($س_۲$) ف ($س_۳$)
= ھ ($س_۱^۲ + س_۲^۲ + س_۳^۲$) .................... (۶)

اب $س$ کی کسی غیر متغیر یا خاص قیمت کے لئے ھ ($س^۲$) کی قیمت مستقل ہوگی۔

یعنی فر { ھ ($س^۲$) } = صفر

یعنی فر { ھ ($س_۱^۲ + س_۲^۲ + س_۳^۲$) } = صفر

∴ $س$ کی ایک غیر متغیر یا خاص قیمت کے لئے :—

فر { ف ($س_۱$) ف ($س_۲$) ف ($س_۳$) } = صفر
یعنی فَ ($س_۱$) فر $س_۱$ ف ($س_۲$) ف ($س_۳$) +
+ فَ ($س_۲$) فر $س_۲$ ف ($س_۱$) ف ($س_۳$) +
+ فَ ($س_۳$) فر $س_۳$ ف ($س_۱$) ف ($س_۲$) = صفر

جہاں فَ ($س_۱$)، فَ ($س_۲$) اور فَ ($س_۳$) علی الترتیب ف ($س_۱$)، ف ($س_۲$) اور ف ($س_۳$) کے تفرقات ہیں۔

اوپر کی پوری مساوات کو ف (س۱) ف (س۲) ف (س۳) سے تقسیم کریں تو

$$\frac{\bar{\text{ف}}(\text{س}_۱)\,\text{فرس}_۱}{\text{ف}(\text{س}_۱)} + \frac{\bar{\text{ف}}(\text{س}_۲)\,\text{فرس}_۲}{\text{ف}(\text{س}_۲)} + \frac{\bar{\text{ف}}(\text{س}_۳)\,\text{فرس}_۳}{\text{ف}(\text{س}_۳)} = \text{صفر} \quad ......(۷)$$

چونکہ س ایک مستقل ہے اسلئے $\text{س}^۲ = \text{س}_۱^۲ + \text{س}_۲^۲ + \text{س}_۳^۲$ کو تفرقانے سے

$$\text{س}_۱\,\text{فرس}_۱ + \text{س}_۲\,\text{فرس}_۲ + \text{س}_۳\,\text{فرس}_۳ = \text{صفر}$$

$$\therefore \text{بہ}\,\text{س}_۱\,\text{فرس}_۱ + \text{بہ}\,\text{س}_۲\,\text{فرس}_۲ + \text{بہ}\,\text{س}_۳\,\text{فرس}_۳ = \text{صفر} \quad ......(۸)$$

جہاں بہ = کوئی مستقل

مساوات (۷) اور (۸) کو ملانے سے :-

$$\left\{\frac{\bar{\text{ف}}(\text{س}_۱)}{\text{ف}(\text{س}_۱)} + \text{بہ}\,\text{س}_۱\right\}\text{فرس}_۱ + \left\{\frac{\bar{\text{ف}}(\text{س}_۲)}{\text{ف}(\text{س}_۲)} + \text{بہ}\,\text{س}_۲\right\}\text{فرس}_۲ +$$

$$+ \left\{\frac{\bar{\text{ف}}(\text{س}_۳)}{\text{ف}(\text{س}_۳)} + \text{بہ}\,\text{س}_۳\right\}\text{فرس}_۳ = \text{صفر} \quad ......(۹)$$

چونکہ رفتار کے اجزائے تحلیلی س۱ س۲ اور س۳ ایک دوسرے کے غیر تابع ہیں لہذا مساوات (۹) میں ہر علیحدہ رقم کی قیمت صفر کے مساوی ہوسکتی ہے

$$\therefore \left\{\frac{\bar{\text{ف}}(\text{س}_۱)}{\text{ف}(\text{س}_۱)} + \text{بہ}\,\text{س}_۱\right\} = \text{صفر}$$

اسی طرح دیگر رقوم بھی صفر کے مساوی ہیں۔

$$\therefore \frac{\bar{\text{ف}}(\text{س}_۱)}{\text{ف}(\text{س}_۱)} = -\,\text{بہ}\,\text{س}_۱$$ اسکو تکملانے سے

$$\text{لوک}_\text{و}\,\text{ف}(\text{س}_۱) = -\,\text{بہ}\frac{\text{س}_۱^۲}{۲} + \text{لوک}_\text{و}\,\text{ا}$$ جہاں ا = کسی مستقل کے

$$\text{یعنی ف}(\text{س}_۱) = \text{ا}\,\text{و}^{-\frac{\text{بہ}\,\text{س}_۱^۲}{۲}} = \text{ا}\,\text{و}^{-\text{ب}\,\text{س}_۱^۲} \quad ......(۱۰)$$

جہاں $ب = \frac{م}{۲ک}$ = ایک مستقل

اسی طرح $ف(س_۲) = ا و^{-ب س_۲^۲}$ اور $ف(س_۳) = ا و^{-ب س_۳^۲}$

$\therefore ف(س_۱) ف(س_۲) ف(س_۳) = ا^۳ و^{-ب(س_۱^۲+س_۲^۲+س_۳^۲)}$ ......... (۱۱)

اب ہم ا اور ب کی قیمتیں دریافت کرنے کی کوشش کرینگے۔ سالمات کی مجموعی تعداد فی مکعب سمر = ع

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} ع ف(س_۱) ف(س_۲) ف(س_۳) فرس_۱ فرس_۲ فرس_۳$$

یعنی $\int_{-\infty}^{+\infty} ا^۳ و^{-ب(س_۱^۲+س_۲^۲+س_۳^۲)} فرس_۱ فرس_۲ فرس_۳ = ۱$

یعنی $ا^۳ \left(\frac{\pi}{ب}\right)^{\frac{۳}{۲}} = ۱$ یعنی $ا = \sqrt{\frac{ب}{\pi}}$ ......... (۱۲)

سالمات برتن کی دیوار کے فی اکائی رقبہ کو فی اکائی وقت میں $س_۱$ رفتار سے جو ٹکراتے ہیں ایک ایسے استوانہ میں موجود ہیں جسکا حجم $س_۱$ ہے ان سالمات کی تعداد فی مکعب سمر جن کی رفتار $س_۱$ اور $س_۱$ + فرس_۱ کے درمیان ہے ع ف ($س_۱$) فرس_۱ کے مساوی ہے یعنی = $ع ا و^{-ب س_۱^۲} فرس_۱$

لہٰذا $س_۱$ حجم میں سالمات کی تعداد فی ثانیہ = $ع ا و^{-ب س_۱^۲} س_۱ فرس_۱$

اگر ایک سالمہ کی کمیت م کے مساوی ہو تو برتن کے دیوار سے فی اکائی رقبہ فی اکائی وقت میں تمام سالمات کے ٹکرانے سے معیار حرکت میں تبدیلی = فی اکائی رقبہ قوت عاملہ کے = دباؤ د کے

لیکن ہر ایک سالمہ کے دیوار سے ٹکرانے سے معیار حرکت میں تبدیلی = ۲ م $س_۱$

$\therefore$ $س_۱$ حجم کے اندر سالمات کی فی ثانیہ معیار حرکت میں مجموعی تبدیلی =

$$= \text{۴ م } س_1 (\text{ع ۲ } و^{-ب س_1^2} \, س_1 \, \text{فر} \, س_1)$$

صرف مثبت رفتار کے جملہ سالمات کے لئے :-

$$د = \int_{\text{صفر}}^{\infty} \text{۴ م ع ۲ } و^{-ب س_1^2} \, س_1^2 \, \text{فر} \, س_1 = \text{۲ م ع ۲ } \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{ب^3}}$$

مساوات (۱۲) سے $د = \frac{\text{ع م}}{\text{۲ ب}}$ ............ (۱۳)

لیکن کامل گیس کی مساوات :- د ح = لا ت

جہاں لا ایک مستقل ہے جو گیس کے ایک گرام سالمہ سے متعلق ہے اور ت گیس کی تپش مطلق ہے۔

یعنی $د = \frac{\text{ثہ لا ت}}{ئ}$ جہاں ثہ = گیس کی کثافت

مساوات (۵) سے $د = \frac{\text{ثہ لا ت}}{\text{م ن}} = \frac{\text{ع لا ت}}{ن}$ ......... (۱۴)

مساوات (۱۳) اور (۱۴) سے $ب = \frac{\text{م ن}}{\text{۲ لا ت}}$ ......... (۱۵)

لہذا ع سالمات میں سے فرع سالمات کی تعداد جن کے رفتار کے اجزائے تحلیلی $س_1$ اور $س_1$ + فر$س_1$، $س_2$ اور $س_2$ + فر$س_2$، $س_3$ اور $س_3$ + فر$س_3$ کے درمیان لا، ما اور یا سمتوں میں علی الترتیب ہوں حسب ذیل ہوگی :-

$$\text{فرع} = \text{ع ف}(س_1) \, \text{ف}(س_2) \, \text{ف}(س_3) \, \text{فر} س_1 \, \text{فر} س_2 \, \text{فر} س_3$$

مساوات (۱۱) سے $\text{فرع} = \text{ع } ا^3 \, و^{-ب(س_1^2 + س_2^2 + س_3^2)} \, \text{فر} س_1 \, \text{فر} س_2 \, \text{فر} س_3$

مساوات (۱۲) اور (۱۵) سے :-

$$\text{فرع} = \text{ع} \left(\frac{\text{م ن}}{\text{۲} \pi \text{ لا ت}}\right)^{\frac{3}{2}} و^{-\frac{\text{م ن}}{\text{۲ لا ت}}(س_1^2 + س_2^2 + س_3^2)} \, \text{فر} س_1 \, \text{فر} س_2 \, \text{فر} س_3$$

$$\text{یعنی } فرع = ع \left|\frac{عہ^{3}}{\pi^{3}}\right.^{\frac{1}{2}} و^{-عہ(ہ_1^2+ہ_2^2+ہ_3^2)} فرہ_1 فرہ_2 فرہ_3 \quad ......(۱۶)$$

$$\text{جہاں } عہ = \frac{ن}{۲لات}$$

اس کو میکسول کے "رفتاروں کی تقسیم کے کلیہ" سے موسوم کیا جاتا ہے۔ یہ کلیہ کچھ اطمینان بخش نہیں ہے اس کی وجہ یہ ہے کہ رفتاروں کے اجزائے تحلیلی کو بغیر کسی ثبوت کے ایک دوسرے سے بالکل آزاد فرض کر لیا گیا ہے۔

**نوٹ** گیسوں کے نظریہ تحرک میں حسب ذیل تکملات اکثر مستعمل ہوتے ہیں اور طلبا کو ان کے حل کرنے کے لئے ہدایت کی جاتی ہے :-

| تکملی | حل | تکملی | حل |
|---|---|---|---|
| (۱) $\int_{صفر}^{\infty} و^{-عہ لا^2} فرلا$ | $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{عہ}}$ | (۴) $\int_{صفر}^{\infty} و^{-عہ لا^2} لا^3 فرلا$ | $\frac{1}{2عہ^2}$ |
| (۲) $\int_{صفر}^{\infty} و^{-عہ لا^2} لا فرلا$ | $\frac{1}{2عہ}$ | (۵) $\int_{صفر}^{\infty} و^{-عہ لا^2} لا^4 فرلا$ | $\frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{عہ^5}}$ |
| (۳) $\int_{صفر}^{\infty} و^{-عہ لا^2} لا^2 فرلا$ | $\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{عہ^3}}$ | (۶) $\int_{صفر}^{\infty} و^{-عہ لا^2} لا^5 فرلا$ | $\frac{1}{عہ^3}$ |

اب ہم تعداد سالمات فی مکعب سمر کے لئے ایک ایسا جملہ حاصل کرنا چاہتے ہیں جن کے رفتاروں کے اجزاء لا محور کے متوازی ہیں اور $ہ_1$ اور $ہ_1$ + فر$ہ_1$ کے درمیان قائم کئے گئے ہیں۔ یعنی ہم صرف اب رفتار $ہ_1$ پر غور کریں گے اور ان سالمات کی تعداد فرع$_1$ معلوم کریں گے جن کی رفتار $ہ_1$ اور $ہ_1$ + فر$ہ_1$

کے درمیان ہے :-

$$\text{فرع}_1 = \text{ع}\sqrt{\frac{\text{عـ}^3\text{م}^3}{\pi^3}}\;\text{و}^{-\text{عم}\,\text{سا}_1^2}\,\text{فرسا}_1\int_{-\infty}^{+\infty}\!\int_{-\infty}^{+\infty}\text{و}^{-\text{عم}\,\text{سا}_2^2}\,\text{و}^{-\text{عم}\,\text{سا}_3^2}\,\text{فرسا}_2\,\text{فرسا}_3$$

$$\text{اب چونکہ}\int_{-\infty}^{+\infty}\text{و}^{-\text{عم}\,\text{سا}_2^2}\,\text{فرسا}_2 = 2\int_{\text{صفر}}^{\infty}\text{و}^{-\text{عم}\,\text{سا}_2^2}\,\text{فرسا}_2 = \frac{2}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\text{عم}}}$$

$$\therefore\ \text{فرع}_1 = \text{ع}\sqrt{\frac{\text{عـ}^3\text{م}^3}{\pi^3}}\;\text{و}^{-\text{عم}\,\text{سا}_1^2}\,\text{فرسا}_1\left(\sqrt{\frac{\pi}{\text{عم}}}\times\sqrt{\frac{\pi}{\text{عم}}}\right)$$

$$= \text{ع}\sqrt{\frac{\text{عم}}{\pi}}\;\text{و}^{-\text{عم}\,\text{سا}_1^2}\,\text{فرسا}_1 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ (۱۷)$$

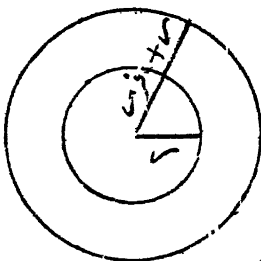
اسی طرح کسی رفتاری جزء تحلیلی $\text{سا}_2$ یا $\text{سا}_3$ پر غور کرنے سے یہی نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔

اب ہم ان سالمات کی تعداد فرع معلوم کرینگے جن کی رفتار سا اور سا + فرسا کے درمیان ہے۔

جہاں سا کی قیمت $(\text{سا}_1^2 + \text{سا}_2^2 + \text{سا}_3^2)$ کے مساوی ہے اور جو کہ ایک مستقل مقدار ہے۔

$$\text{میکسول کے کلیہ سے :- فرع} = \text{ع}\sqrt{\frac{\text{عـ}^3\text{م}^3}{\pi^3}}\;\text{و}^{-\text{عم}\,\text{سا}^2}\,4\pi\,\text{سا}^2\,\text{فرسا}$$

چونکہ $\text{فرسا}_1\,\text{فرسا}_2\,\text{فرسا}_3$ کو اس حجم پر پھیلانے سے، جو سا اور سا + فرسا نصف قطر والے دو کروں کے مابین واقع ہوتا ہے $4\pi\,\text{سا}^2\,\text{فرسا}$ کے مساوی قیمت حاصل ہوتی ہے اسلئے :-

شکل ۱

$$\text{فرع} = 4\text{ع}\sqrt{\frac{\text{عـ}^3\text{م}^3}{\pi}}\;\text{و}^{-\text{عم}\,\text{سا}^2}\,\text{سا}^2\,\text{فرسا}\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ (۱۸)$$

**مختلف نوعیت کی رفتاریں اور آپس میں انکا تعلق :-** میکسول کے کلیہ کو ترسیمی وضع میں بھی پیش کیا جاسکتا ہے۔

اگر س کے مقابلہ میں ہم $\frac{\text{فرع}_{\text{س}}}{\text{ع}}$ کو مرتسم کریں تو ایک منحنی حاصل ہوتا ہے جس کو شکل ۲ میں تقریباً بتایا گیا ہے اس منحنی سے واضح ہے کہ اسکے راس پر سالمات کی تعداد کے لئے "احتمال" اعظم ترین ہے۔

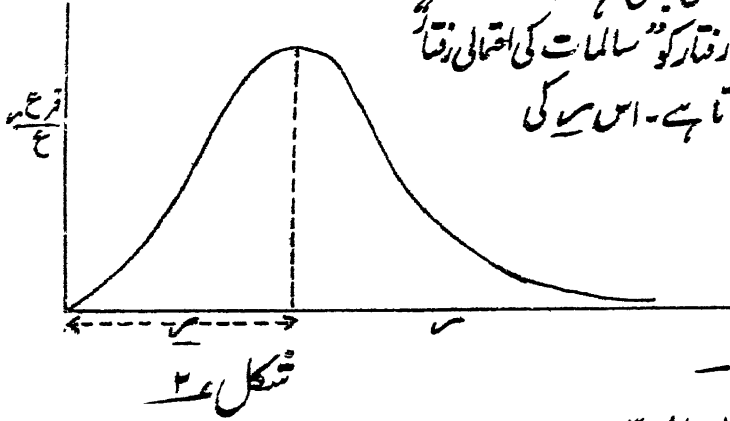
فرض کرو کہ ر اس پر اس کے متناظر رفتار کی تعبیر سا سے کی جاتی ہے۔

اس سا رفتار کو "سالمات کی احتمالی رفتار" سے موسوم کیا جاتا ہے۔ اس سا کی قیمت حسب ذیل طریقہ سے معلوم کی جاسکتی ہے :-

$\frac{\text{فرع}_{\text{س}}}{\text{ع}}$   سا   س

شکل ۲

مساوات (۱۸) سے :-

$$\text{فرع}_{\text{س}} = \text{۴ع} \sqrt{\frac{\text{عہ}^{۳}}{\pi}}\ \text{و}^{-\text{عہ س}^{۲}}\ \text{س}^{۲}\ \text{فرس} = \text{ف(ع)}$$

جہاں ف(ع) ع کے کسی تفاعل کی تعبیر کرتا ہے۔

ف(ع) اعظم ہونے کیلئے $\frac{\text{فرف(ع)}}{\text{فرس}} = \text{صفر}$

یعنی $\frac{\text{فر}}{\text{فرس}}\left(\text{و}^{-\text{عہ س}^{۲}}\ \text{س}^{۲}\right) = \text{صفر}$

$$\therefore -\text{س}^{۲}\ \text{و}^{-\text{عہ س}^{۲}}\ \text{عہ}\ ۲\ \text{س} + \text{و}^{-\text{عہ س}^{۲}}\ ۲\ \text{س} = \text{صفر}$$

یعنی $\text{س}^{۲} = \frac{۱}{\text{عہ}}$

اب جبکہ ف (ع) اعظم ہے تو $\text{ر} = \text{رے}$

$$\therefore \text{رے} = \frac{1}{\sqrt{\text{عہ م}}} \quad \ldots\ldots\ldots (19)$$

فرض کرو کہ ع سالمات گیس کو ہم مختلف حصوں میں تقسیم کر دیتے ہیں اور ان حصوں میں سالمات کی تعداد $\text{ع}_1$، $\text{ع}_2$، $\text{ع}_3$ ...... وغیرہ ہے اور ان کی اوسط رفتاریں علی الترتیب $\text{ر}_1$، $\text{ر}_2$، $\text{ر}_3$ ...... وغیرہ ہیں۔

$$\text{تب } \text{ع} = \text{ع}_1 + \text{ع}_2 + \text{ع}_3 + \ldots\ldots$$

$$\text{اور مجموعی توانائی بالفعل} = \tfrac{1}{2}\text{م}\left\{\text{ع}_1\text{ر}_1^2 + \text{ع}_2\text{ر}_2^2 + \text{ع}_3\text{ر}_3^2 + \ldots\ldots\right\}$$

$$\therefore \text{اوسط توانائی بالفعل فی ذرہ} = \tfrac{1}{2}\text{م}\left\{\frac{\text{ع}_1\text{ر}_1^2 + \text{ع}_2\text{ر}_2^2 + \text{ع}_3\text{ر}_3^2 + \ldots\ldots}{\text{ع}}\right\}$$

$$= \tfrac{1}{2}\,\text{م}\,\bar{\text{ر}}^2$$

$$\text{یعنی } \bar{\text{ر}}^2 = \frac{\sum \text{ع}_1\text{ر}_1^2}{\text{ع}}$$

اس $\bar{\text{ر}}$ کو "جذر اوسط مربع رفتار" سے موسوم کیا جاتا ہے۔

$$\therefore \bar{\text{ر}}^2 = \frac{\sum \text{ع}_1\text{ر}_1^2}{\text{ع}} = \int_{\text{صفر}}^{\infty} \frac{\text{ر}^2 \, \text{فر}\,\text{ع}_\text{ر}}{\text{ع}} =$$

$$= 4\sqrt{\frac{\text{عہ}^3\text{م}^3}{\pi}} \int_{\text{صفر}}^{\infty} \text{ء}^{-\text{عہ م ر}^2}\, \text{ر}^4 \, \text{فر ر}$$

$$= 4\sqrt{\frac{\text{عہ}^3\text{م}^3}{\pi}} \cdot \frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{\text{عہ}^5\text{م}^5}} = \frac{3}{2\,\text{عہ م}}$$

$$\therefore \bar{\text{ر}} = \sqrt{\frac{3}{2\,\text{عہ م}}} \quad \ldots\ldots\ldots (20)$$

ان مختلف حصوں کے سالمات کی مجموعی معیار حرکت =

$$= \text{م}\,\text{ع}_1\text{ر}_1 + \text{م}\,\text{ع}_2\text{ر}_2 + \ldots\ldots$$

∴ اوسط معیار حرکت فی ذرہ $= م \left\{ \frac{ع_۱ ر_۱ + ع_۲ ر_۲ + ع_۳ ر_۳ + ......}{ع} \right\}$

$= م \bar{ر}$ فرض کرو

اس $\bar{ر}$ کو "اوسط حسابی رفتار" سے تعبیر کیا جاتا ہے۔

یعنی $\bar{ر} = \frac{\sum ع_۱ ر_۱}{ع} = \int_{صفر}^{\infty} \frac{ر\ فرع_ر}{ع} =$

$= ۴ \sqrt{\frac{عہ^۳ م^۳}{\pi}} \int_{صفر}^{\infty} ر^۳ ہو^{-عہ م ر^۲} فرر = ۴ \sqrt{\frac{عہ^۳ م^۳}{\pi}} \cdot \frac{۱}{۲ عہ^۲ م^۲}$

$∴ \bar{ر} = \frac{۲}{\sqrt{\pi عہ م}}$ ...................................... (۲۱)

مساوات (۲۰) اور (۲۱) سے $\frac{\bar{ر}}{ر} = \sqrt{\frac{۸}{۳\pi}} = ۰٫۹۲$ ...... (۲۲)

اور مساوات (۱۹) اور (۲۰) سے $\frac{\hat{ر}}{ر} = \sqrt{\frac{۲}{۳}}$ ........ (۲۳)

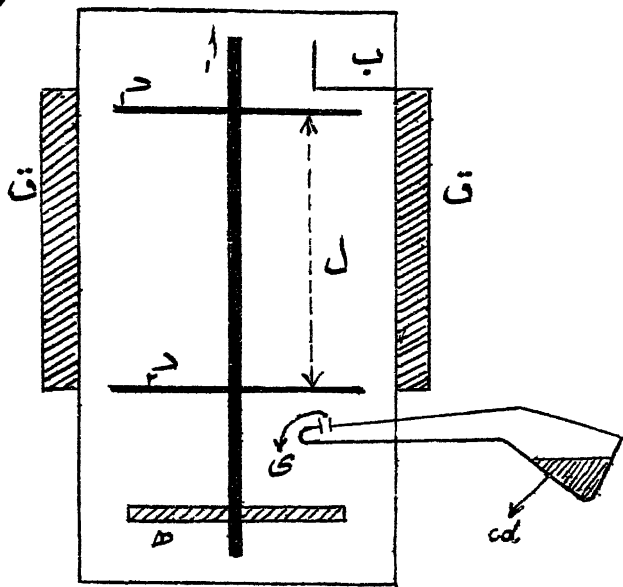
## چند گیسوں کی سالمی رفتاریں(۲):—

| گیس | طبعی دباؤ اور تپش پر ر سمر فی ثانیہ | طبعی دباؤ اور تپش پر $\bar{ر}$ سمر فی ثانیہ |
|---|---|---|
| ہائیڈروجن | $۱۸٫۳۸ \times ۱۰^{۴}$ | $۱۶٫۹۳ \times ۱۰^{۴}$ |
| ہیلیم | $۱۳٫۱۱ \times ۱۰^{۴}$ | $۱۲٫۰۸ \times ۱۰^{۴}$ |
| امونیا | $۶٫۳۳ \times ۱۰^{۴}$ | $۵٫۸۲ \times ۱۰^{۴}$ |
| آبی بخار | $۶٫۱۵ \times ۱۰^{۴}$ | $۵٫۶۵ \times ۱۰^{۴}$ |
| نیین | $۵٫۸۴ \times ۱۰^{۴}$ | $۵٫۳۸ \times ۱۰^{۴}$ |
| کاربن مونا کسائڈ | $۴٫۹۳ \times ۱۰^{۴}$ | $۴٫۵۴ \times ۱۰^{۴}$ |
| نائیٹروجن | $۴٫۹۳ \times ۱۰^{۴}$ | $۴٫۵۴ \times ۱۰^{۴}$ |

| | | |
|---|---|---|
| ہوا | $٤٫٨٥ \times ١٠^{٤}$ | $٤٫٤٧ \times ١٠^{٤}$ |
| آکسیجن | $٤٫٦١ \times ١٠^{٤}$ | $٤٫٢٥ \times ١٠^{٤}$ |
| آرگن | $٤٫١٣ \times ١٠^{٤}$ | $٣٫٨٠ \times ١٠^{٤}$ |
| کاربن ڈائی آکسائڈ | $٣٫٩٣ \times ١٠^{٤}$ | $٣٫٦٢ \times ١٠^{٤}$ |
| کرپٹن | $٢٫٨٦ \times ١٠^{٤}$ | $٢٫٦٣ \times ١٠^{٤}$ |
| زینن | $٢٫٢٨ \times ١٠^{٤}$ | $٢٫١٠ \times ١٠^{٤}$ |
| پارہ کا بخار | $١٫٨٤ \times ١٠^{٤}$ | $١٫٧٠ \times ١٠^{٤}$ |

**میکسول کے کلیہ کا عملی ثبوت :۔** متعدد سائنس دانوں نے رفتاروں کی تقسیم کے متعلق میکسول کے کلیہ کا ثبوت بالواسطہ طریقوں سے حاصل کیا ہے۔ اسٹرن پہلا شخص تھا جس نے چاندی کے جواہر سے تجربہ کرکے بالراست اس کلیہ کو ثابت

شکل ٣ (الف)

شکل ٣

کیا گو آلات میں بعض دشواریوں کے باعث نتائج اتنے اطمینان بخش نہیں نکلے۔ بعد میں کامپٹن، الڈرج اور دیگر اشخاص نے کامیابی کے ساتھ راست طور پر تجربے کئے۔ ۱۹۲۸ء میں الڈرج[۴] ایک امریکن سائنس دان نے جو آلات استعمال کئے تھے انکا تذکرہ یہاں خالی از دلچسپی نہ ہوگا۔ شکل ۳ میں ان کو دکھایا گیا ہے۔

دو دائری وضع کے قرص د۱ اور د۲ ایک خلادار برتن کے اندر ایک ہی دھری ا، پر رکھے ہوئے ہیں۔

ھ ایک زیادہ وزنی قرص ہے جو اُسی دھری پر رکھا ہوا ہے اور ایک امالی موٹر کے گھومنے والے چکّر کی طرح کام دیتا ہے۔ د۱ اور د۲ قرصوں پر کئی جھریاں بنی ہوئی ہیں جیسا کہ شکل ۳ (الف) میں دکھایا گیا ہے۔ برتن سے باہر نکلی ہوئی ایک نلی میں کیڈ میم (Cd) کو گرم کیا جاتا ہے جو جھری ی میں سے بخار بنکر (جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے) گزر جاتا ہے۔ ب ایک الومینیم کی تختی ہے جو مائع ہوا سے ٹھنڈی رکھی جاتی ہے۔ ق اور ق بیرونی برتن ہیں جن میں مائع ہوا غیر ضروری سالمات کو برتن کے بازوؤں سے نکلکر ب تک پہنچنے سے روکتی ہے۔

تجربہ میں کیڈ میم کے سالمات کی کچھ تعداد ایک خاص رفتار کے ساتھ جھری میں سے گزر کر د۲ کے نیچے رہتی ہے۔ جب موٹر کے ذریعہ د۱ اور د۲ کو گھمایا جاتا ہے تو ان میں سے چند سالمات د۲ کی جھری میں سے گزر جاتے ہیں۔ گزرنے کے دوران میں ان کی رفتاریں جو انتصابی سمت میں ہوتی ہیں د۲ کی رفتار کی وجہ سے (جو افقی سمت میں ہوتی ہے) بدل جاتی ہیں پس وہ د۱ اور د۲ کے درمیان مختلف سمتوں میں ایک خاص رفتار سے حرکت کرنے لگتے ہیں لیکن ان سالمات میں سے ایک خاص حصہ اوپر جاکر د۱ کی جھری میں سے گزر جاتا ہے اور ایک خاص رفتار کے ساتھ ب تک پہنچ کر، وہاں مائع ہوا کی موجودگی سے جو اس کو سرد رکھتی

ہے، منجمد ہونے لگتا ہے۔ ظاہر ہے کہ تختی ب پر ان کے جمع ہونے کی کثافت کا انحصار منجمد ہونے والے سالمات کی تعداد پر ہوگا۔ اگر ب پر زیادہ سالمات کی تعداد منجمد ہوگی تو اس مقام پر زیادہ سیاہی نمایاں ہونے لگے گی۔ تجربہ میں قرصوں کو ابتداً بہت ہی آہستہ گھمایا جاتا ہے اور سالمات کا ایک مطروحہ حاصل کیا جاتا ہے۔ بعد میں قرص تیز رفتار سے گھمائے جاتے ہیں جبکہ تیز حرکت کرنے والے سالمات ابتدائی مطروحہ سے آہستہ حرکت کرنے والے سالمات کی بہ نسبت زیادہ قریب جمع ہونے لگتے ہیں۔ یہ مطروحے مستطیلی جھریوں کی وجہ سے طیفی خطوط کی طرح ہوتے ہیں۔ الڈرج نے ان مطروحوں کی کثافت کو تختی کے مختلف مقامات پر اس کے معیاری کثافت سے مقابلہ کر کے دریافت کیا۔

فرض کرو کہ $\text{د}_1$ اور $\text{د}_2$ کے درمیان سالمات کی تعداد = ع

مساوات (۱۸) سے تعداد سالمات $\text{فرع}_1$ جن کی رفتاریں س اور س + فرس کے درمیان ہیں حسب ذیل ہوگی:—

$$\text{فرع}_1 = 4\,\text{ع}\sqrt{\frac{\text{ه}^3\text{م}^3}{\pi}}\;\text{و}^{-\text{ه}\,\text{م}\,\text{س}^2}\;\text{س}^2\,\text{فرس}$$

لیکن مساوات (۱۹) سے $\text{س}_1 = \frac{1}{\sqrt{\text{ه}\,\text{م}}}$

$$\therefore\ \text{فرع}_1 = \frac{4\,\text{ع}}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\text{س}^2}{\text{س}_1^3}\cdot\text{و}^{-\frac{\text{س}^2}{\text{س}_1^2}}\cdot\text{فرس}$$

ان $\text{فرع}_1$ سالمات میں سے سالمات کی ایک خاص تعداد انتصابی وضع میں $\text{د}_1$ کی طرف جانے کی کوشش کرے گی اور ان کی تعداد =

$$= \text{ف}\left(\frac{4\,\text{ع}}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\text{س}^2}{\text{س}_1^3}\,\text{و}^{-\frac{\text{س}^2}{\text{س}_1^2}}\cdot\text{فرس}\right)$$ جہاں ف = کوئی کسر

∴ تعداد سالمات جو $\text{د}_1$ کی جھری میں سے فی ثانیہ گزرے گی $= \text{ج}\,\text{س}^2\,\text{و}^{-\frac{\text{س}^2}{\text{س}_1^2}}\,\text{س}\,\text{فرس}$

$= ج\, ر^{۳}\, و^{-\frac{م}{ر^{۲}}}\, فر\, ر = فر\,ع$ فرض کرو جہاں ج = کوئی مستقل۔

فرض کرو کہ ابتدائی مطروحہ سے لا فاصلہ پر یا قرص پر کے کسی خاص نشان سے لا فاصلہ پر سالمات جمع ہوتے ہیں۔

تب $لا = ا\, و = \frac{٢ال}{ر}$ جہاں ا = اس قرص کی رفتار اور و = لا فاصلہ طے کرنے کے لئے وقت

فرض کرو کہ $ر = \frac{١}{لہ}$، تب $فر\, ر = -\frac{فر\, لہ}{لہ^{۲}}$

$$\therefore\ لا = \frac{٢ال}{ر} = ٢ال\, لہ$$

$$\therefore\ فر\,ع = -\, ج\, ہ^{۵}\, و^{-\frac{م}{ر^{۲}}}\, فر\, لہ$$

اب مطروحہ کی کثافت $(لا = ٢ال\, لہ)$ پر $ہ^{۵}\, و^{-\frac{م}{ر^{۲}}}$ کے متناسب ہے

لہٰذا ایسے مقام پر لہ کی قیمت حاصل کرنے کے لئے جہاں اعظم مطروحہ یا سیاہی اعظم ہو:—

$$\frac{فر}{فر\, لہ}\left(لہ^{۵}\, و^{-\frac{م}{ر^{۲}}\, لہ^{۲}}\right) = صفر$$

$$یعنی\ ۵\, لہ^{۶} = \frac{۲\, لہ^{۸}}{ر^{۲}}$$

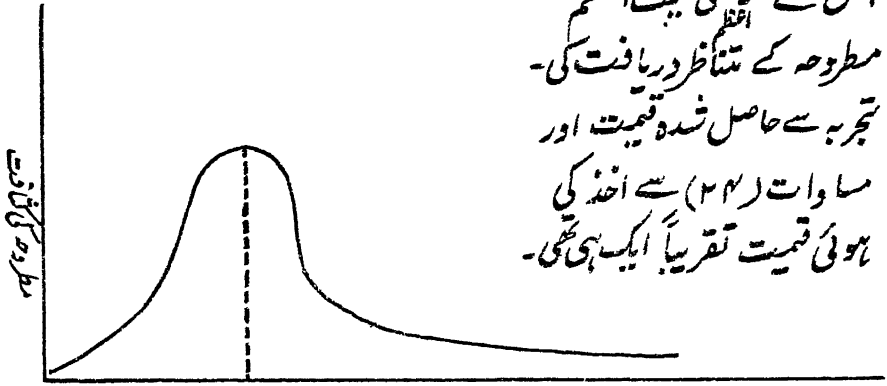
$$\therefore\ لہ = \sqrt{\frac{۲}{۵}}\cdot\frac{۱}{ر} = لہ_{اعظم}$$

لیکن مساوات (۱۹) سے :— $لہ_{اعظم} = \sqrt{\frac{۲\, عہ\, م}{۵}} = \sqrt{\frac{م\, ن}{۵\, کا\, ت}}$

$\therefore$ لا کی قیمت اعظم کثافت کے متناظر $= لا_{اعظم} = ٢ال\, لہ_{اعظم}$

$$\therefore\ لا_{اعظم} = ٢ال\sqrt{\frac{م\, ن}{۵\, کا\, ت}} \quad \text{.................}\quad (۲۴)$$

الڈرج نے ۴۰۰ ھ پر تجربہ کرکے مطروحہ کی کثافت اور (لا = ۱ ل لہ) کے درمیان ایک ترسیم کھینچی اس طرح جو منحنی حاصل ہوا اس کو شکل ۴ میں بتایا گیا ہے اس منحنی سے اس نے $لا_{اعظم}$ کی قیمت اعظم مطروحہ کے متناظر دریافت کی۔ تجربہ سے حاصل شدہ قیمت اور مساوات (۲۴) سے اخذ کی ہوئی قیمت تقریباً ایک ہی تھی۔

شکل ۴

**توانائی کی مساوی تقسیم کا کلیہ** :— ہم اگر کسی سہ ابعادی صورت پر غور کریں اور کوئی سالمہ تینوں انتصابی سمتوں میں سے کسی ایک سمت میں حرکت کرے اور ان سمتوں میں سے کسی ایک سمت کی حرکت دوسری سمتوں کی حرکتوں کے غیر تابع ہو تو یہ کہا جاتا ہے کہ سالمہ میں "تین درجوں" کی آزادی ہے۔ عام صورت میں کسی جسم کی تعریف اس کے مقامی محددوں کی تعداد مثلاً $لا_۱$، $لا_۲$، $لا_۳$ ...... $لا_ن$ وغیرہ پر

اور نیز متعدد رفتاروں $ہ_۱$، $ہ_۲$، ...... $ہ_ن$ وغیرہ پر جو کہ ایک دوسرے کے غیر تابع ہیں منحصر ہوتی ہے۔ ان میں سے ہر ایک محدد کے متناظر توانائی ایک ہی ہوتی ہے۔ یعنی آزادی کے مختلف درجوں میں توانائی مساوی طور پر منقسم ہوتی ہے۔ اس کلیہ کو مساوی تقسیم توانائی کے کلیہ سے موسوم کیا جاتا ہے۔ میکسول نے ۱۸۵۹ء میں پہلی دفعہ اسکو بیان کیا تھا۔

کسی گیس کے ایک گرام سالمہ پر غور کرو جہاں کہ جملہ سالمات کی تعداد ن ہے۔ مساوات (۱۸) سے فرع سالمات کی تعداد، جن کی رفتاریں سا اور سا + فر سا کے درمیان ہوں حسب ذیل ہوگی :-

$$\text{فرع} = 4\pi\,\text{ن}\sqrt{\frac{\text{عہ}^3\,\text{م}^3}{\pi^3}}\;\text{و}^{-\text{عہ م سا}^2}\;\text{سا}^2\,\text{فر سا}$$

ان فرع سالمات کی توانائی بالفعل $= \frac{1}{2}\,\text{م فرع}\,.\,\text{سا}^2$

∴ مجموعی توانائی بالفعل گیس کے اس گرام سالمہ کی $= \int_{\text{صفر}}^{\infty} \frac{1}{2}\,\text{م فرع سا}^2$

$$= \int_{\text{صفر}}^{\infty} \frac{1}{2}\,\text{م سا}^4\; 4\pi\,\text{ن}\sqrt{\frac{\text{عہ}^3\,\text{م}^3}{\pi^3}}\;\text{و}^{-\text{عہ م سا}^2}\;\text{فر سا}$$

$$= 2\pi\,\text{م ن}\sqrt{\frac{\text{عہ}^3\,\text{م}^3}{\pi^3}}\cdot\frac{3}{8}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{\text{عہ}^5\,\text{م}^5}} = \frac{3}{4}\cdot\frac{\text{ن}}{\text{عہ م}}$$

لیکن $\text{عہ} = \frac{\text{ن}}{2\,\text{لا ت}}$

∴ پوری توانائی بالفعل گیس کے گرام سالمہ کی $= \frac{3}{2}\,\text{لا ت}$ .......(۲۵)

∴ فی سالمہ توانائی بالفعل $= \frac{3\,\text{لا ت}}{2\,\text{ن}}$ ........ (۲۶)

مساوی تقسیم توانائی کے کلیہ کی رو سے، چونکہ یہاں "آزادی کے تین درجے" زیر غور ہیں۔ لہذا ہر ایک ایسے رفتاری محدود کے متناظر توانائی (چونکہ مساوی ہے) $= \frac{1}{2}\,\text{لا ت}$ فی گرام سالمہ یا $\frac{\text{لا ت}}{2\,\text{ن}}$ فی سالمہ۔

کسی نظام میں اگر آزادی کے ما درجے ہوں تو اس نظام کے ساتھ جو توانائی مضمر ہوگی وہ $= \frac{\text{ما لا ت}}{2}$ فی گرام سالمہ یا $= \frac{\text{ما لا ت}}{2\,\text{ن}}$ فی سالمہ

اشیا کی سالمی توانائیاں :- یک جوہر والی گیس میں، سالمات کے متعلق یہ

تصور کیا جاتا ہے کہ وہ لچک دار کرّے ہوتے ہیں اور ان میں صرف توانائی بالفعل ہوتی ہے، توانائی بالقوہ بالکل نہیں ہوتی۔

یہ باہم انتصابی، تین سمتوں میں سے کسی ایک سمت میں حرکت کر سکتے ہیں لہذا ان میں "آزادی تین درجوں" کی ہوتی ہے۔ ایسی گیس کے ایک گرام سالمہ میں جو مجموعی توانائی ی مضمر ہوگی وہ = $\frac{\text{٣ لا ت}}{\text{٢}}$ (مساوات ٢٥ سے)

حرارت کی کسی معیاری کتاب سے واضح ہوگا کہ اگر کسی گیس کی حرارت نوعی مستقل حجم پر $\text{ن}_{\text{ح}}$ کے مساوی ہو تو $\text{ن}_{\text{ح}} = \frac{\text{ف ی}}{\text{ف ت}} = \frac{\text{٣ لا}}{\text{٢}}$

کسی ایک کامل گیس کے لئے یہ ہمیں معلوم ہے کہ $\text{ن}_{\text{د}} - \text{ن}_{\text{ح}} = \text{لا}$ جہاں $\text{ن}_{\text{د}}$ = گیس کی حرارت نوعی مستقل دباؤ پر

∴ کسی یک جوہر والی گیس کیلئے $\text{ن}_{\text{د}} = \frac{\text{٣ لا}}{\text{٢}} + \text{لا} = \frac{\text{٥ لا}}{\text{٢}}$

∴ دونوں نوعی حرارتوں میں نسبت $\frac{\text{ن}_{\text{د}}}{\text{ن}_{\text{ح}}}$ = نہ (فرض کرو) = $\frac{\text{٥}}{\text{٣}}$ = ١٫٦٦

ہیلیم، آرگن وغیرہ جیسی یک جوہری گیسوں کے لئے یہ قیمت تجربی نتائج سے ملتی جلتی ہے۔

دو جوہری گیس کے ایک سالمہ کے متعلق یہ فرض کیا جاتا ہے کہ وہ دو متجانس لچکدار کروں پر مشتمل ہوتا ہے جو مضبوطی کے ساتھ ایک دوسرے سے جڑے ہوئے ہوتے ہیں۔ اصولاً چونکہ یہ دو علیحدہ کرّے ہوتے ہیں اس لئے مجموعی طور پر آزادی کے چھ درجوں کا ہونا ضروری ہے۔ لیکن ہم یہ فرض کرتے ہیں کہ ہر ایک کرہ ایک ایسا محور رکھتا ہے جو مشترک ہے یعنی دونوں کے مرکزوں کو ملانے والا خط ہے۔ اسکا مطلب یہ ہے کہ آزادی کے کل پانچ درجے ہونگے۔ لہذا دو جوہری گیس کے لئے توانائی ی = $\frac{\text{٥ لا ت}}{\text{٢}}$

∴ $\text{ن}_{\text{ح}} = \frac{\text{٥}}{\text{٢}}\text{لا}$ اور $\text{ن}_{\text{د}} = \frac{\text{٧}}{\text{٢}}\text{لا}$، اس لئے نہ = ١٫٤٠

یہ قیمت ہائڈروجن، نائٹروجن وغیرہ کی تجربی قیمتوں سے بہت ہی قریب ہے
سہ جوہری گیس کے لئے ہم آزادی کے چھ درجے لے سکتے ہیں۔ اس
صورت میں $ح_ن = \frac{٦}{٢}ک$ اور $ح_و = \frac{٨}{٢}ک$

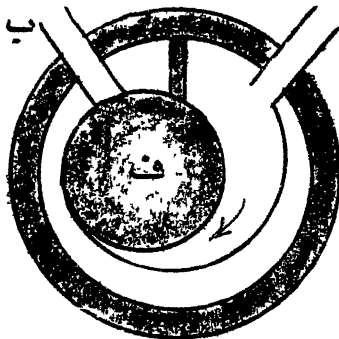
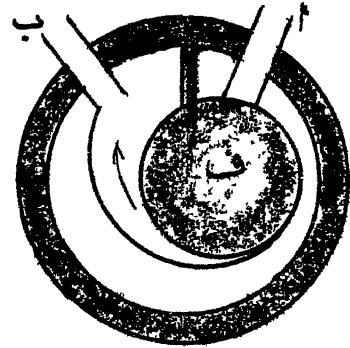
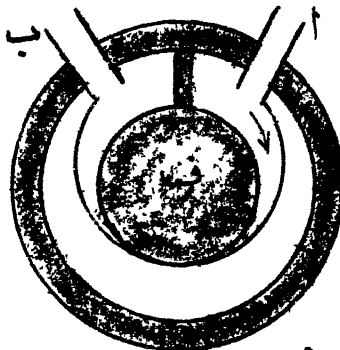
$\therefore$ نہ = ١،٣٣

یہ قیمت بھی تجربہ کی قیمت سے تقریباً ملتی ہے۔
اس سے عملی طور پر ہم اس نتیجے پر پہنچتے ہیں کہ یک جوہری گیس کے لئے آزادی کے تین درجے، دوجوہری گیس کے لئے پانچ درجے، اور سہ جوہری گیس کے لئے آزادی کے چھ درجے ہوتے ہیں۔ بقیہ کو اسی طرح قیاس کیا جاسکتا ہے۔

**سالمی پمپ:۔** گائیڈے کا سالمی پمپ کیمیائی اور طبیعیاتی تجربہ خانوں میں بہت ہی کارآمد ثابت ہوا ہے۔ یہ ایک استوانہ ف پر مشتمل ہوتا ہے (شکل ۵) جو ایک اور بیرونی استوانہ کے اندر گھومتا ہے، ن ایک دھاتی تختی ہے۔ اس کے اور استوانہ ف کے درمیان ایک چھوٹی سی جگہ ہوتی ہے یہ جگہ سالمات کے اوسط آزاد راستہ سے بھی کم ہوتی ہے جس کی وجہ سے سالمات میں پیچھے کی طرف حرکت نہیں ہوسکتی۔ نلی ۲ اس برتن کے ساتھ جوڑ دی جاتی ہے جس میں ایک زبردست خلا کو پیدا کرنا مقصود ہوتا ہے۔ ف کو برقی طور پر یا کسی اور ذریعہ سے یکسانی سمت میں گھمایا جاتا ہے۔

شکل ۵

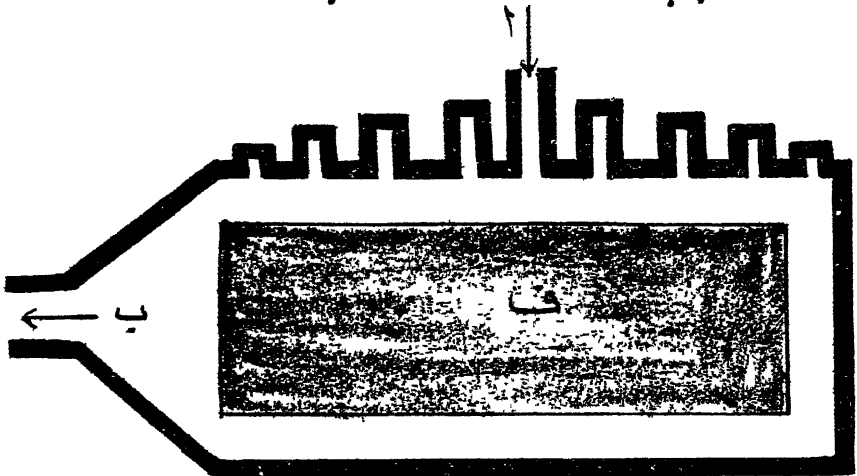
ب میں سے گیس کے سالمات بتدریج باہر نکلتے ہیں۔

چونکہ یہ پمپ موجودہ زمانہ میں لوہے اور فولاد سے بنایا جاتا ہے اس وجہ سے پارہ کے بخارات کا اس پر اثر نہیں ہوتا۔ اس سے آسانی کے ساتھ ۰۰۲.۰ ممر پارہ کے دباؤ کے مساوی خلا پیدا کیا جا سکتا ہے اور فی گھنٹہ تقریباً ۵ر۱ مکعب میٹر گیس اس میں سے خارج کی جا سکتی ہے۔ حال میں ہالک نے اور پھر زیگیان اور ہیئیک نے اس کے میکانی خاکہ میں بہت سی جدتیں پیدا کیں۔ مشہور ہیئیک پمپ عام طور پر ۱۹۲۱ء سے دستیاب ہونے لگا ہے۔ یہ بہت ارزاں ہے اور ۴ ... ۰.۰ ممر پارہ کے مساوی خلا پیدا کرنے کے علاوہ چلنے میں بہت کم آواز کرتا ہے۔ اسکے پمپ کرنیکا میکانی اصول بالکل گائیڈرے کی طرح ہے لیکن فتارہ یا اندرونی استوانہ

شکل ۶ (الف)

شکل ۶ (ب)

شکل ۶ (ج)

کا عمل اس سے مختلف ہے۔ اس پمپ کے کام کرنے کا اصول ان تین تراشی شکلوں سے جو عـ۶ (ا) عـ۶ (ب) اور عـ۶ (ج) میں دکھائی گئی ہیں سمجھ میں آجائے گا۔

جب ف کا مقام شکل عـ۶ (ا) کی طرح ہوتا ہے تو جس برتن میں خلا پیدا کرنا ہوتا ہے اس کو ۲ کے ساتھ جوڑ دیا جاتا ہے جب شکل عـ۶ (ب) کی طرح ف کا مقام ہوتا ہے تو ف اور ۲ کے درمیانی گیس کی زیادہ مقدار ب کی طرف چلی جاتی ہے۔ وضع عـ۶ (ج) میں چونکہ ن مضبوطی کے ساتھ ف سے چمٹا ہوا ہوتا ہے اس وجہ سے گیس استوانہ ف کے گرد نہیں جاسکتی اور چنانچہ گیس کا ایک بڑا حصہ ب میں سے باہر نکل جاتا ہے۔ اس طرح متعدد دفعہ پورے دور ختم ہونے کے بعد زیر تجربہ برتن میں اعلیٰ درجہ کا خلا پیدا ہوتا ہے۔

ہالک پمپ کو شکل عـ۷ میں دکھایا گیا ہے۔

شکل ۷

یہ ایک بیرونی فولاد کے استوانہ پر مشتمل ہے جس میں باقرینہ مرغولہ دار نالیاں

شکل کی طرح کٹی ہوئی ہوتی ہیں۔ ابتدا میں یہ نالیاں نہایت گہری ہوتی ہیں لیکن بتدریج ان کی گہرائی کم ہوتی جاتی ہے۔ ان کی بلندیاں تقریباً ۵ ممر سے ۱ ممر تک کی ہوتی ہیں۔ یہ نالیاں اس طریقہ سے بنائی جاتی ہیں کہ سالمات آسانی سے باہر کی طرف پھسل کر جا سکیں۔ ف ایک اندرونی استوانہ ہے جس کو ایک موٹر کے ذریعہ گھمایا جاتا ہے۔ جس برتن میں زبردست خلا پیدا کرنا ہوتا ہے اس کو ا کے ساتھ جوڑ دیا جاتا ہے جو بیرونی استوانہ کے ٹھیک درمیان میں ہے۔

× **نلیوں اور سوراخوں میں سے گیسوں کا بہنا:۔** فرض کرو کہ دو بند برتن جن میں ایک ہی گیس مقید ہے ایک پتلی نلی کے ذریعہ جوڑ دئے جاتے ہیں اور ان میں سے ایک برتن میں گیس کا دباؤ دوسرے سے کم ہوتا ہے۔ اگر پتلی نلی میں سے گیس کو ڈھکیلنے والا دباؤ معمولی ہو تو فی ثانیہ اس میں سے بہنے والی گیس کی کمیت کا اندازہ گیسوں کی لزوجت کے مشہور میئر کے کلیہ سے ہو سکتا ہے۔ یعنی فی ثانیہ جتنی گیس بہتی ہے اس کی کمیت لزوجت سے تناسب معکوس رکھتی ہے۔ لیکن بالکل کم دباؤ پر گیس کا بہاؤ مستقل ہو جاتا ہے اور لزوجت پر اس کا انحصار نہیں ہوتا۔ چونکہ بالکل کم دباؤ پر گیس کے سالمات دور دور پھیلے ہوئے ہوتے ہیں اس وجہ سے بین السالماتی تصادم کو نظر انداز کر دیا جا سکتا ہے اور صرف برتن اور نلی کے دیواروں سے سالمات کے ٹکرانے پر اس صورت میں غور کرنا ہوگا۔ کنڈسن نے یہ فرض کیا کہ بالکل کم دباؤ پر سالمات دیوار پر جذب ہو جاتے ہیں اور پھر تمام سمتوں میں مساوی طور پر نکل پڑتے ہیں۔ اس نے ریاضی کی مدد سے اس مظہر کی عالمانہ طور پر تحقیق کی اور نتائج کی تصدیق بہترین تجربوں سے حاصل کی۔ میئر کے کلیہ سے نلی میں سے فی ثانیہ بہنے والی گیس کی کمیت ک = 

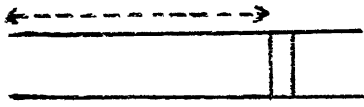
$$= \text{ثہ حہ} = \frac{\text{د حہ} ۴}{۸ \text{ لا ت}}$$

$$= \frac{\pi\, ص^{4}}{8\, ل\, لہ} (د_1 - د_2) \frac{(د_1 + د_2)}{2} \cdot \frac{ک}{لا\, ت}$$

$$\therefore ک \propto د(د_1 - د_2)$$

جہاں $د = \frac{د_1 + د_2}{2}$ = اوسط دباؤ، ث = گیس کی کثافت، ح = فی ثانیہ بہنے والی گیس کا حجم، ص = نلی کا نصف قطر، ل = نلی کا طول اور لہ = گیس کی لزوجت

لیکن بالکل کم دباؤ پر یہ کلیہ صحیح نہیں ہے۔

فرض کرو کہ ایک پتلی نلی (شکل ۸) کے ایک سرے سے لا فاصلہ پر دباؤ د اور لا + فرلا فاصلہ پر دباؤ د + فرد ہے۔ فرض کرو کہ گیس کی اوسط رفتار نلی کے دیواروں کے متوازی س کے مساوی ہے۔

دیوار کے اس فرلا ٹکڑے کا رقبہ

$= 2\pi\, ص\, فرلا$

شکل ۸

اب گیس میں ایک مربع سم کا رقبہ تصور کیا جائے تو ہم کو یہ دریافت کرنا ہے کہ ع سالمات فی مکعب سم میں سے کتنے سالمات فی ثانیہ اس اکائی رقبہ میں سے گزرینگے

مساوات (۱۷) سے $فرع_1 = ع \sqrt{\frac{عہ\, م}{\pi}}\, و^{-عہ\, م\, ہ_1^2}\, فرہ_1$

∴ تعداد سالمات جو فی ثانیہ اکائی رقبہ میں سے گزرتے ہیں =

$$= \int_{صفر}^{\infty} فرع_1\, ہ_1 = \bar{ع} \text{ فرض کرو}$$

$$\therefore \bar{ع} = ع \sqrt{\frac{عہ\, م}{\pi}} \cdot \frac{1}{2\, عہ\, م} = \frac{ع}{2\sqrt{\pi\, عہ\, م}}$$

لیکن مساوات (۲۰) سے $\text{ر} = \sqrt{\frac{3}{2\,\text{ع}\,\text{م}}}$

$$\therefore\ \bar{\text{ع}} = \frac{\text{ع}\,\text{ر}}{\sqrt{6\pi}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۲۷)$$

اس فرلا ٹکڑے سے فی ثانیہ جو سالمات ٹکرا رہے ہیں ان کی تعداد

$$= \frac{2\pi\,\text{ص}\,\text{فرلا}\,\text{ع}\,\text{ر}}{\sqrt{6\pi}}$$

اور سالمی معیار حرکت فی ثانیہ، دیواروں کے متوازی =

$$= \frac{2\pi\,\text{ص}\,\text{فرلا}\,\text{ع}\,\text{ر}\,\text{م}\,\omega}{\sqrt{6\pi}}$$

$$= \text{حاصل قوت} = -\pi\,\text{ص}^2\,\text{فرد}$$

$$\therefore\ -\pi\,\text{ص}^2\,\frac{\text{فرد}}{\text{فرلا}} = \frac{2\pi\,\text{ص}\,\text{ثہ}\,\text{ر}\,\omega}{\sqrt{6\pi}}$$

جہاں ثہ = گیس کی کثافت

$$\text{فی ثانیہ برآمد ہونے والی گیس کی کمیت} = \pi\,\text{ص}^2\,\omega\,\text{ثہ}$$

$$= -\pi\,\text{ص}^2\,\text{ثہ}\,\text{ص}\,\frac{\text{فرد}}{\text{فرلا}} \cdot \frac{\sqrt{6\pi}}{2\,\text{ثہ}\,\text{ر}} =$$

$$= -\pi\,\text{ص}^3 \sqrt{\frac{\text{ع}\,\pi}{2\,\text{لا}\,\text{ت}}} \cdot \frac{\text{فرد}}{\text{فرلا}}$$

$$\left(\text{چونکہ}\ \text{ر} = \sqrt{\frac{3\,\text{لا}\,\text{ت}}{\text{ع}}}\right)$$

∴ پوری نلی کے طول ل سے برآمد ہونے والی گیس کی کمیت فی ثانیہ = $\text{ک}_1$

$$= \pi\,\text{ص}^3 \sqrt{\frac{\pi\,\text{ع}}{2\,\text{لا}\,\text{ت}}} \cdot \frac{(\text{د}_1 - \text{د}_2)}{\text{ل}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۲۸)$$

یہ کنڈسن کے سالمی بہاؤ کے کلیہ سے تعبیر کیا جاتا ہے۔

**نلی کی مزاحمت :۔** نلی کی اکائی برآمد "مہ" کی تعریف (د ح) سے کی جاتی ہے جبکہ فرق دباؤ ($د_۱ - د_۲$) ایک ڈائین فی مربع سمر کے مساوی ہو اور ح گیس کا وہ حجم ہو جو اوسط دباؤ د پر فی ثانیہ اس سے برآمد ہو رہی ہے ۔

تعریف کی رو سے $مہ = (د ح) = \frac{ثہ لا ت}{ئ} . ح =$

$$= \left( \frac{لا ت}{ئ} . ک_۱ \right)_{(د_۱ - د_۲) = ۱}$$

مساوات (۲۸) سے :۔ $مہ = \frac{لا ت}{ئ} . \frac{\pi ص^۳}{ل} \sqrt{\frac{\pi ئ}{۲ لا ت}} =$

$$= \frac{\pi ص^۳}{ل} \sqrt{\frac{\pi لا ت}{۲ ئ}} = \frac{\pi ص^۳}{ل} \sqrt{\frac{\pi}{۲ ثہ}}$$

جہاں $ثہ$ = ایک ڈائین فی مربع سمر دباؤ کے متناظر کثافت $= \frac{ئ}{لا ت}$

نلی کے لئے گیس کی مجموعی برآمد دباؤ ($د_۱ - د_۲$) کے لئے $= مہ (د_۱ - د_۲)$

یعنی $مہ = \frac{مجموعی برآمد}{د_۱ - د_۲}$

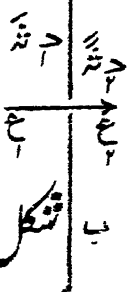
کلیہ اوم سے اس کی مطابقت کی جائے تو چونکہ $\frac{رو}{محرکہ برق} = \frac{۱}{مزاحمت}$

اس لئے $\frac{۱}{مزاحمت}$ مہ کے متناظر ہوتی ہے۔

$\therefore$ نلی کی مزاحمت $= \frac{۱}{مہ} = \frac{ل}{\pi ص^۳} \sqrt{\frac{۲ ثہ_۱}{\pi}}$ ......(۲۹)

**سوراخ کی مزاحمت :۔** فرض کرو کہ ا ب شکل ۹ میں ایک پردہ ہے جس میں ایک بہت ہی چھوٹا سوراخ ہے اور پردہ کی بائیں جانب سالمات کی تعداد فی مکعب سمر $ع_۱$ اور داہنی جانب $ع_۲$ ہے اور نیز گیس کا دباؤ اور کثافت پردہ کے بائیں



شکل ۹

اور دائیں جانب بالترتیب $\text{د}_1$، $\text{ثہ}_1$ اور $\text{د}_2$، $\text{ثہ}_2$ ہیں۔

اس صورت میں گیس کی وہ کمیت جو بائیں جانب سے دائیں جانب فی ثانیہ سوراخ میں سے گزرے گی $= \frac{\pi\, \text{ص}^2\, \text{ع}\, \text{ثہ}_1}{\sqrt{6\pi}}$

گیس کی وہ کمیت جو داہنی جانب سے بائیں جانب فی ثانیہ گزرے گی $= \frac{\pi\, \text{ص}^2\, \text{ع}\, \text{ثہ}_2}{\sqrt{6\pi}}$

جہاں ص = سوراخ کا نصف قطر

∴ حاصل کمیت جو بائیں جانب سے داہنی جانب فی ثانیہ گزرے گی =

$= \text{ک}_2$ (فرض کرو)

$$= \frac{\pi\, \text{ص}^2\, \text{ع}}{\sqrt{6\pi}} (\text{ثہ}_1 - \text{ثہ}_2)$$

$$= \frac{\pi\, \text{ص}^2}{\sqrt{6\pi}} \cdot \sqrt{\frac{3\,\text{لا}\,\text{ت}}{\text{ئ}}}\, (\text{د}_1 - \text{د}_2) \frac{\text{ئ}}{\text{لا}\,\text{ت}} =$$

$$= \pi\, \text{ص}^2 (\text{د}_1 - \text{د}_2) \sqrt{\frac{\text{ئ}}{2\pi\, \text{لا}\,\text{ت}}} \quad \text{..........} \quad (٣٠)$$

سوراخ کی اکائی برآمد "$\text{ھ}_2$" پہلے کی طرح اب بھی (د ح) کے مساوی ہوگی جبکہ فرق دباؤ $(\text{د}_1 - \text{د}_2)$ ایک ڈائین فی مربع سم کے مساوی ہو اور ح گیس کا وہ حجم ہو جو اوسط دباؤ د پر فی ثانیہ سوراخ سے برآمد ہو رہی ہے۔

$$\therefore \text{ھ}_2 = \text{د}\,\text{ح} = \frac{\text{ثہ}\,\text{لا}\,\text{ت}}{\text{ئ}} \cdot \text{ح} = \left(\frac{\text{لا}\,\text{ت}}{\text{ئ}} \cdot \text{ک}_2\right)_{(\text{د}_1 - \text{د}_2) = 1}$$

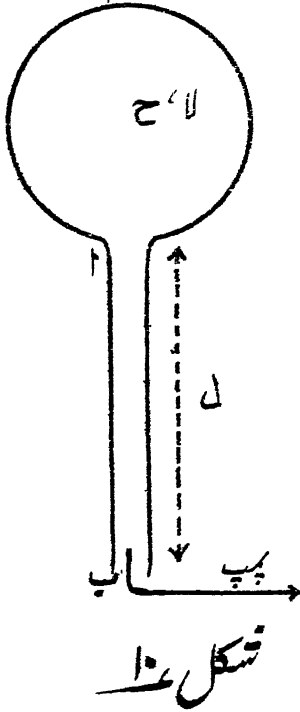
مساوات (٣٠) سے:— $\text{ھ}_2 = \frac{\text{لا}\,\text{ت}}{\text{ئ}} \cdot \pi\, \text{ص}^2 \sqrt{\frac{\text{ئ}}{2\pi\, \text{لا}\,\text{ت}}} =$

$$= \pi\, \text{ص}^2 \sqrt{\frac{\text{لا}\,\text{ت}}{2\pi\, \text{ئ}}} = \pi\, \text{ص}^2 \sqrt{\frac{1}{2\pi\, \text{ثہ}_1}}$$

جہاں $\text{ثہ}_1$ = ایک ڈائین فی مربع سم دباؤ کے متناظر کثافت۔ کلیہ اوم سے پہلے

کی طرح پھر مطابقت کی جائے تو سوراخ کی مزاحمت $= \frac{1}{مہ} =$

$$= \frac{1}{\pi\, ص^{2}} \sqrt{2\,\pi\, ث_{1}} \quad \text{..........(۳۱)}$$

**پمپ کی صورت میں ایک سادہ اطلاق :-** فرض کرو کہ ایک برتن جس کا حجم ح ہے گیس سے بھرا ہوا ہے اور گائیڈے کے قسم کی پمپ سے ہم اس میں خلا پیدا کرنا چاہتے ہیں۔ شکل ۱۰ کے مطابق اس برتن کو نلی ا ب کے ذریعہ پمپ کے ساتھ جوڑ دیا گیا ہے۔

فرض کرو کہ اس برتن میں دباؤ و ثانیوں کے بعد لا ہے اور پمپ د دباؤ پر چل رہا ہے اور نیز یہ بھی فرض کرو کہ فرک گرام گیس اس برتن سے فرو ثانیہ میں خارج ہو رہی ہے تب

$$ک_{1}\, فرو = -\, فرک = -\, فر(ثہ\, ح) =$$

$$= -\, ح\, فرثہ = -\, \frac{ح\, ث}{لا\, ت} \, .\, فرلا$$

$$یعنی\; -\, \frac{ح\, ث}{لا\, ت}\, فرلا =$$

$$= \frac{\pi\, ص^{3}}{ل} \sqrt{\frac{\pi\, ث}{2\, لا\, ت}}\, (لا - د)\, فرو$$

$$\therefore -\, ح\, فرلا = \frac{\pi\, ص^{3}}{ل} \sqrt{\frac{\pi}{2\, ث_{1}}}\, .(لا - د)\, فرو = مہ\, (لا - د)\, فرو$$

$$\therefore -\, \frac{مہ\, فرو}{ح} = \frac{فرلا}{لا - د} = \frac{فر(لا - د)}{(لا - د)}$$

شکل ۱۰

اس کو تکملانے سے $-\frac{مہ\ و}{ح} = لوک_و(لا - د) + ج$

جہاں $ج$ = کوئی مستقل

فرض کرو کہ جب وقت $و$ = صفر تو $لا = لاَ$ یعنی ابتداً میں گیس کا دباؤ $لاَ$ ہے۔ اس صورت میں $ج = - لوک_و(لاَ - د)$

$$\therefore -\frac{مہ\ و}{ح} = لوک_و\left(\frac{لا - د}{لاَ - د}\right)$$

∴ برتن میں $لاَ$ دباؤ کو $لا$ دباؤ تک لانے میں جو وقت صرف ہوا:—

$$و = \frac{ح}{مہ}\ ۲٫۳۰۳\ لوک_{۱۰}\left(\frac{لاَ - د}{لا - د}\right) \quad ........(۳۲)$$

لہذا اگر $ح$، $مہ$، $لاَ$، $لا$ اور $د$ کی قیمتیں ہمیں معلوم ہو جائیں تو $و$ دریافت کیا جا سکتا ہے۔ مساوات (۳۲) میں $مہ$ کی قیمت درج کرنیسے:—

$$و = \frac{ح\ ل}{\pi\ ص^{۳}}\sqrt{\frac{۲\ ثہ_۱}{\pi}}\ ۲٫۳۰۳\ لوک_{۱۰}\left(\frac{لاَ - د}{لا - د}\right) \quad ......(۳۳)$$

اس مساوات سے ظاہر ہے کہ اگر نلی کا نصف قطر $ص$ بڑھا دیا جائے اور $ل$ گھٹا دیا جائے تو $و$ کی قیمت کم ہو جائے گی۔ یعنی اگر جلد خلا پیدا کرنا مطلوب ہو تو $ص$ کو بڑھانا اور $ل$ کو گھٹانا چاہیئے۔

ایک چھوٹی ٹونٹی جس کا طول $لَ$ ہو اس نلی میں لگا دی جائے تو یہ دریافت کیا جا سکتا ہے کہ نلی کے طول پر ٹونٹی کی مزاحمت کا کیا اثر ہوتا ہے:—

فرض کرو کہ نلی کی مزاحمت = ایسی ٹونٹی کی مزاحمت جسکا قطر $فَ$ ہے۔

$$\text{یعنی}\quad \frac{۸\ ل}{\pi\ ف^{۳}}\sqrt{\frac{۲\ ثہ}{\pi}} = \frac{۸\ لَ}{\pi\ فَ^{۳}}\sqrt{\frac{۲\ ثہ}{\pi}}$$

جہاں $ف$ = نلی کا قطر

$$\therefore ل = لَ \cdot \frac{ف^{۳}}{فَ^{۳}}$$

مثال کی طور پر اگر لَ = ۱ سمر اور ف = ۲ سمر اور فَ = ۰.۲ سمر
تو نلی کا طول ل بہتی ۱۰۰ سمر حاصل ہوگا۔

یعنی ۱۰۰ سمر طول کی نلی ایک چھوٹی سی ٹونٹی کے مماثل ہوتی ہے
جس کا طول صرف ۱ سمر اور قطر ۰.۲ سمر ہوتا ہے۔ ظاہر ہے کہ اس قدر چھوٹی
ٹونٹی کی وجہ سے نلی کے طول میں کافی اضافہ ہوجاتا ہے اس لیے اگر جلد
خلا پیدا کرنا مقصود ہو تو اس کی بڑی احتیاط کرنی چاہیئے کہ ٹونٹیاں حتی الامکان
کم تعداد میں رکھی جائیں۔

**پمپ کی رفتار :۔** شکل نمبر۱ پر غور کرو۔ برتن سے گیس کی جتنی کمیت خارج
ہوتی ہے وہ اس کمیت کے مساوی ہے جو پمپ میں داخل ہوتی ہے، لیکن
چونکہ دباؤ مختلف ہیں اس لئے برتن سے نکلنے والی گیس کا حجم، پمپ میں داخل
ہونے والے حجم کے مساوی نہیں ہوتا۔

فرض کرو کہ فر و ثانیہ میں د دباؤ پر فرح$_1$ مکعب سمر گیس پمپ میں داخل ہوتی
ہے، اسکا مطلب یہ ہے کہ فر و ثانیہ میں فرح$_1$ مکعب سمر گیس پمپ کے ذریعہ
باہر خارج کی جاتی ہے، اور نیز یہ بھی فرض کرو کہ اسی وقفہ فر و میں فرح$_2$
مکعب سمر گیس دباؤ لا پر برتن سے باہر نکلتی ہے ظاہر ہے کہ موثر دباؤ (لا - د)
کے لئے گیس کی مجموعی برآمد = مہ$_1$ (لا - د) اور یہ اس حجم کے متناظر ہے
جو فی ثانیہ باہر نکل رہا ہے۔

لہٰذا فر و ثانیوں میں مجموعی برآمد = مہ$_1$ (لا - د) فر و

کلیہ بائیل سے   لا فرح$_2$ = د فرح$_1$ = مہ$_1$ (لا - د) فر و

گائیڈے کے مطابق پمپ کی حقیقی رفتار س$_1$ = $\frac{\text{فرح}_1}{\text{فر و}}$ اور ظاہری
رفتار س$_2$ = $\frac{\text{فرح}_2}{\text{فر و}}$

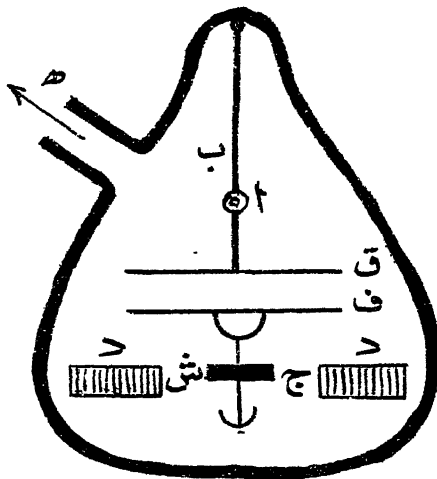
∴ مہ$_1$ (لا - د) = لا $\frac{\text{فرح}_2}{\text{فر و}}$ = $\frac{\text{د فرح}_1}{\text{فر و}}$ = لا س$_2$ = د س$_1$

$$\therefore \frac{1}{\text{ھ}} = \frac{\text{لا} - \text{د}}{\text{لا}\,\text{س}_2} = \frac{1}{\text{س}_2} - \frac{\text{د}}{\text{لا}\,\text{س}_2} =$$

$$= \frac{1}{\text{س}_2} - \frac{\text{د}}{\text{د}\,\text{س}_1} = \frac{1}{\text{س}_2} - \frac{1}{\text{س}_1}$$

$$\therefore \frac{1}{\text{س}_2} = \frac{1}{\text{ھ}} + \frac{1}{\text{س}_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (٣٤)$$

**خفیف دباؤ کی پیمائش :-** میکلاڈ داب پیما سے تقریباً ہر شخص واقف ہے، یہ کلیہ بائیل کے تحت کام کرتا ہے اور اس کو کئی شکلوں میں بنایا گیا ہے۔ ایک بڑی کارآمد شکل سنٹرل سائنٹفک کمپنی کے آلات کی فہرست میں دی گئی ہے، اس کے ذریعہ $10^{-6}$ مم پارہ کے دباؤ کے رتبہ تک پارہ کی سطح کو پیچ کے ذریعہ ترتیب دینے کے انتظام کے ساتھ ناپا جاسکتا ہے اور بہت کارآمد ہے۔

**ڈشمین کا سالمی داب پیما (۴) :-** شکل ۱۱ میں، ق ایک ابرک کا قرص ہے جو ایک کوارٹز کے ریشہ ب کے ذریعہ ایک شیشہ کے جوف کے اندر لٹکایا جاتا ہے۔ ف ایک اور قرص ہے جو گردشی مقناطیسی میدان کے ذریعہ فی منٹ دس ہزار چکروں تک گھمایا جاسکتا ہے۔ د اور د پچھے ہیں جو اس گردشی مقناطیسی میدان کو پیدا کرتے ہیں۔ ج اور ش ایک معمولی مقناطیس کے قطب ہیں اور ۲ ایک مستوی آئینہ ہے جس سے

شکل ۱۱

لٹکے ہوئے قرص ق کا انصراف معلوم کیا جاتا ہے۔ ھ ایک کھلا ہوا حصہ ہے جہاں خفیف دباؤ والی گیس کا برتن جوڑ دیا جاتا ہے۔ جب ف گھومتا ہے تو اوپر کے قرص پر لزوجی کھنچاؤ پیدا ہوتا ہے اور چنانچہ یہ کچھ زاویہ میں گھوم جاتا ہے جس کو ۲ سے منعکس شدہ ایک شعاع نور کے ذریعہ پڑھ لیا جاتا ہے۔ ق کے انصراف سے گیس کا دباؤ حسابی عمل سے دریافت کرلیا جاتا ہے۔ عملی طور پر ف اور ق کا درمیانی فاصلہ سالمات کے اوسط آزاد راستہ کے رتبہ کا ہوتا ہے۔

کنڈسن کے قول کے مطابق گیس کے سالمات متحرک مستوی سے چمٹ جاتے ہیں جس کی وجہ سے فی ثانیہ معیار حرکت میں تغیر واقع ہوتا ہے اور نیز متضاد سمت میں ایک مماسی قوت عمل کرنے لگتی ہے۔

مساوات (۲۷) سے مستوی کے فی مربع سمر رقبہ پر سالمات کی جو تعداد فی ثانیہ ٹکرائے گی

$$= \bar{\text{ع}} = \frac{\text{ع}\ \text{ر}}{\sqrt{6\pi}}$$

∴ اس مستوی کے متوازی ان سالمات کا فی ثانیہ فی اکائی رقبہ معیار حرکت

$$= \frac{\text{ع}\ \text{ر}}{\sqrt{6\pi}} \cdot \text{م} \cdot \bar{\text{ر}} = \frac{\text{ثہ}\ \text{ر}\ \bar{\text{ر}}}{\sqrt{6\pi}} = \frac{\text{ئ}\ \text{د}}{\text{لا}\ \text{ت}} \sqrt{\frac{3\ \text{لا}\ \text{ت}}{\text{ئ}}} \cdot \frac{\bar{\text{ر}}}{\sqrt{6\pi}}$$

$$= \bar{\text{ر}}\ \text{د} \sqrt{\frac{\text{ئ}}{2\pi\ \text{لا}\ \text{ت}}} \propto \text{مماسی قوت فی اکائی رقبہ}$$

جہاں $\bar{\text{ر}}$ = اس گیس کی رفتار جو متحرک ہے

اور د = وہ دباؤ جس کی پیمائش مطلوب ہے۔

$$\therefore \text{مماسی قوت فی اکائی رقبہ} = \text{گہ}\ \bar{\text{ر}}\ \text{د} \sqrt{\frac{\text{ئ}}{2\pi\ \text{لا}\ \text{ت}}} \quad \text{..........(۳۵)}$$

جہاں گہ = ایک مستقل جس کی قیمت بیشتر گیسوں کے لئے ایک کے مساوی ہے۔

فرض کرو کہ قرص ف کی زاوی رفتار $\omega$ کے مساوی ہے اور اس کا نصف قطر ط ہے۔

قرص میں ایک چھوٹا حلقہ مرکز سے ص فاصلہ پر ایسا لو کہ اس کی موٹائی فرص کے مساوی ہو (شکل ۱۲ع)

اس حلقہ کا رقبہ = ۲ $\pi$ ص فرص

∴ اس حلقہ پر مماسی قوت =

$$= \text{۲} \, \pi \, \text{ص تر د فرص} \sqrt{\frac{\text{ئ}}{\text{۲} \pi \text{لات}}}$$

$$= \text{۲} \, \pi \, \text{ص فرص ص} \, \omega \, \text{د} \sqrt{\frac{\text{ئ}}{\text{۲} \pi \text{لات}}}$$

شکل ۱۲ع

$$\text{اس کے محور کے گرد جفت} = \text{۲} \, \pi \, \text{ص}^{\text{۳}} \, \omega \, \text{د} \sqrt{\frac{\text{ئ}}{\text{۲} \pi \text{لات}}} \, . \, \text{فرص}$$

∴ اس پورے قرص کی وجہ سے جفت =

$$\int_{\text{صفر}}^{\text{ط}} \text{۲} \, \pi \, \text{ص}^{\text{۳}} \, \omega \, \text{د} \sqrt{\frac{\text{ئ}}{\text{۲} \pi \text{لات}}} \, . \, \text{فرص}$$

$$= \text{۲} \, \pi \, \omega \, \text{د} \sqrt{\frac{\text{ئ}}{\text{۲} \pi \text{لات}}} \, . \, \frac{\text{ط}^{\text{۴}}}{\text{۴}} = \text{مہ عہ}$$

جہاں مہ = پیچیدگی کا جفت فی اکائی زاویہ اور عہ = زاویۂ انصراف

$$\therefore \text{عہ} = \frac{\pi \, \omega \, \text{د}}{\text{۲ مہ}} \sqrt{\frac{\text{ئ}}{\text{۲} \pi \text{لات}}} \, . \, \text{ط}^{\text{۴}} \quad \text{.........} \quad \text{(۳۶)}$$

لیکن $\text{و}_{\text{۱}} = \text{۲} \, \pi \sqrt{\frac{\text{مجہ}}{\text{مہ}}}$ جہاں $\text{و}_{\text{۱}}$ = اس قرص کا وقت دوران

اور مجہ = اس قرص کے جمود کا معیار اثر

پس ہم اِن دونوں مساواتوں کے ذریعہ د کی قیمت معلوم کر سکتے ہیں۔

اس داب پیما کے ذریعہ ہم $10^{-7}$ مم پارہ کے دباؤ کے رتبہ تک ناپ سکتے ہیں۔ امریکہ میں یہ طریقہ اب تک رائج ہے۔

اس آلہ میں کسی دھاتی قرص کے عوض ابرک کا قرص ق استعمال کرنے کی غایت صرف یہ ہے کہ ایڈی رؤوں کو نہ پیدا ہونے دیا جائے جن سے قرص کی حرکت پر زبردست اثر پڑتا ہے

**اہتزازی قرص کا طریقہ:** — اس طریقہ میں ایک ابرک کا قرص کوارٹز کے ریشہ کے ذریعہ دو قرصوں کے درمیان اہتزاز کرنے کے لئے لٹکایا جاتا ہے اور اس پورے انتظام کو شکل ۱۱ کے قریب قریب ایک شیشہ کے جوفہ میں رکھا جاتا ہے۔

خفیف دباؤ والی گیس کے برتن کو جوفہ سے جوڑ دینے کے بعد وقت دوران اور لوکارثمی تنزل دریافت کر لیا جائے تو خفیف دباؤ د کی قیمت حسابی عمل سے معلوم کی جا سکتی ہے۔

اگر کسی وقفہ فرو میں قرص کا زاویۂ انصراف فرعہ ہے تو زاویئی رفتار $\omega = \frac{\text{فرعہ}}{\text{فرو}}$ جیسا کہ شکل ۱۲ میں بتلایا گیا تھا' حلقہ کا رقبہ =

$$= 2\pi \text{ ص فرص}$$

اور اس حلقہ پر مماسی قوت $= \frac{\pi}{\text{}} \text{د} \sqrt{\frac{\text{ئ}}{2\pi\text{لات}}} \cdot 2\pi \text{ ص فرص}$

$$= \text{ص} \frac{\text{فرعہ}}{\text{فرو}} \cdot \text{د} \sqrt{\frac{\text{ئ}}{2\pi\text{لات}}} \cdot 2\pi \text{ ص فرص}$$

سکے محور کے گرد جفت $= 2\pi \text{ ص}^3 \text{فرص} \cdot \frac{\text{فرعہ}}{\text{فرو}} \cdot \text{د} \sqrt{\frac{\text{ئ}}{2\pi\text{لات}}}$

∴ اس پورے قرص کی وجہ سے جفت =

$$= \int_{\text{صفر}}^{\text{ط}} ۲\pi \, \frac{\text{فر عہ}}{\text{فر و}} \, \text{د} \sqrt{\frac{\text{ث}}{۲\pi \, \text{لات}}} \, . \, \text{ص}^{۳} \, \text{فر ص}$$

$$= \frac{\pi}{۲} . \text{د} \, \frac{\text{فر عہ}}{\text{فر و}} \sqrt{\frac{\text{ث}}{۲\pi \, \text{لات}}} \, . \, \text{ط}^{۴}$$

جہاں ط = قرص کا نصف قطر

اب چونکہ سالمات اس قرص کے دونوں طرف ٹکرا رہے ہیں اس لئے

$$\text{قسر کی وجہ سے پورا جفت} = \pi \, \text{د} \, . \, \frac{\text{فر عہ}}{\text{فر و}} \sqrt{\frac{\text{ث}}{۲\pi \, \text{لات}}} \, . \, \text{ط}^{۴}$$

$$= \text{گ} \, \frac{\text{فر عہ}}{\text{فر و}} \quad \text{جہاں گ} = \pi \, \text{د} \sqrt{\frac{\text{ث}}{۲\pi \, \text{لات}}} \, . \, \text{ط}^{۴}$$

تعادل کے لئے حرکت کی مساوات حسب ذیل ہوگی :-

$$\text{مج} \, \frac{\text{فر}^{۲} \, \text{عہ}}{\text{فر و}^{۲}} + \text{گ} \, \frac{\text{فر عہ}}{\text{فر و}} + \text{مہ عہ} = \text{صفر}$$

اس تفرقی مساوات کو حل کرنے سے :-

$$\text{عہ} = \text{ا} \, \text{و}^{-\frac{\text{گ و}}{۲ \, \text{مج}}} \, \text{جم} \left( \sqrt{\frac{\text{مہ}}{\text{مج}} - \frac{\text{گ}^{۲}}{۴ \, \text{مج}^{۲}}} \, . \, \text{و} + \text{ب} \right) \quad ......(۳۷)$$

جہاں ا اور ب مستقل ہیں۔

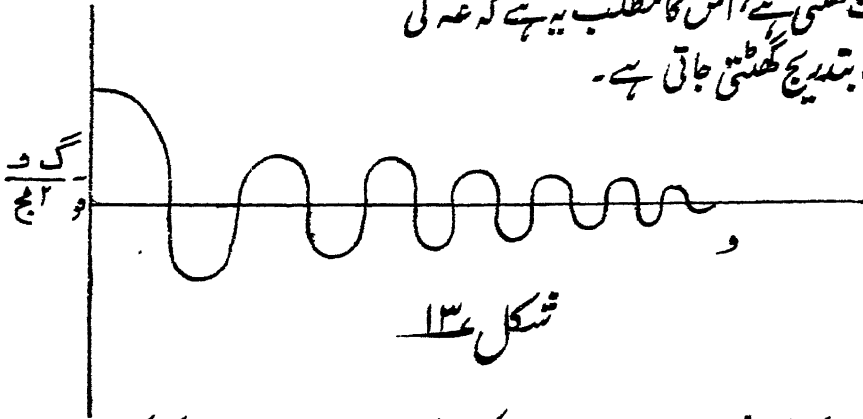
یہ ایک سادہ موسیقی حرکت کی مساوات ہے۔ اسلئے وقت دوران

$$\text{و}_{۱} = \frac{۲\pi}{\sqrt{\frac{\text{مہ}}{\text{مج}} - \frac{\text{گ}^{۲}}{۴ \, \text{مج}^{۲}}}} \quad ......................(۳۸)$$

اگر ہمیں $\text{و}_{۱}$، مہ اور مج کی قیمتیں معلوم ہوجائیں تو گ دریافت کیا

جاسکتا ہے اور پھر د کی قیمت آسانی کے ساتھ نکالی جا سکتی ہے۔

مساوات (۳۷) میں ا و $-\frac{گ و}{۲ مج}$ حیطۂ ارتعاش کو تعبیر کرتا ہے۔ اگر ہم و کو و $-\frac{گ و}{۲ مج}$ کے مقابلہ میں مرتسم کریں تو ایک ایسا منحنی حاصل ہوتا ہے جو شکل ۱۳ میں دکھایا گیا ہے۔ اس منحنی سے یہ ظاہر ہے کہ و کی قیمت بڑھنے سے حیطۂ ارتعاش کی قیمت گھٹتی ہے، اس کا مطلب یہ ہے کہ عہ کی قیمت بتدریج گھٹتی جاتی ہے۔

شکل ۱۳

فرض کرو کہ شعاع نور جو آئینہ سے منعکس ہوکر آتی ہے جب پیمانہ کے ایک جانب حرکت کرتی ہے تو انصراف $عہ_۱$ بنتا ہے اور پیمانہ کے اسی جانب ایک کامل وقت دوران کے بعد انصراف $عہ_۲$ ہوتا ہے۔ تب :—

$$\frac{عہ_۱}{عہ_۲} = \frac{و^{-\frac{گ}{۲ مج} \cdot لا و_۱}}{و^{-\frac{گ}{۲ مج}(لا+۱) و_۱}} = و^{\frac{گ}{۲ مج} \cdot و_۱}$$

جہاں لا = کوئی کسر

$$\therefore لوک_و \frac{عہ_۱}{عہ_۲} = \frac{گ و_۱}{۲ مج} = مستقل = فہ = لوکارثمی تنزل$$

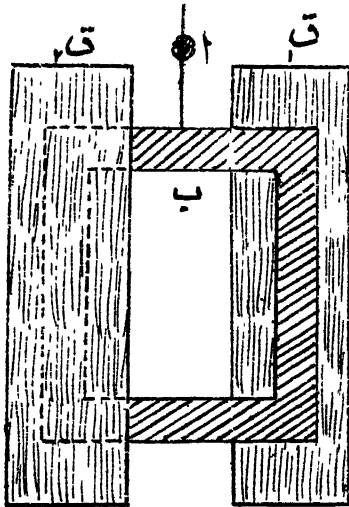
$$\therefore فہ = \frac{و_۱}{۲ مج} \cdot \pi د \sqrt{\frac{ث}{۲ \pi ۸ ت}} \cdot ط^{\prime\prime} \quad ..........(۳۹)$$

اگر فہ، و، مج وغیرہ کی قیمتیں معلوم ہوں تو د کی قیمت حسابی طریقہ سے دریافت کی جا سکتی ہے

اس طریقہ سے ۱۰ آٹھمر پارہ کے دباؤ کے رتبہ تک کی قیمت دریافت کی جا سکتی ہے اور ڈاکٹر شا نے اسکو استعمال بھی اسی کیلئے کیا تھا۔

**کنڈسن کا داب پیما:۔** سنہ ۱۹۱۰ء میں کنڈسن نے کسی قدر خلا دار جوفہ میں گرم اور سرد تختیوں کو رکھنے کے بعد ان کے درمیان جو دفع کی قوت سالمی تصادم کی وجہ سے پیدا ہوتی ہے اس کو حسابی طریقہ سے دریافت کیا۔

اگر ۲ دو ایسی تختیاں اس طرح متوازی رکھی جائیں کہ ان کے درمیان فاصلہ سالمات کے اوسط آزاد راستہ سے چھوٹا ہو تو تختیوں کے درمیان ایک دفع کی قوت عمل کرتی ہے جو گیس کے زیر غور دباؤ کے متناسب ہوتی ہے۔

شکل ۱۴۷ پر غور کرو، ق۱ اور ق۲ دو مستطیلی ثابت تختیاں ہیں جن کو کسی ذریعہ سے مثلاً برقی طریقہ سے گرم کیا جاتا ہے۔ ب ایک سرد مستطیلی تختی ہے جس کو کوارٹز کے ریشہ کے ذریعہ لٹکا دیا جاتا ہے اور اس کے ساتھ ایک مستوی آئینہ ا لگا ہوتا ہے۔ جب اس قسم کی ترتیب کو ایک ملطف گیس میں رکھا جاتا ہے (یعنی ایسی گیس میں جسکے سالمات ایک دوسرے سے بہت دور دور پر ہوں) تو سالمی دفعہ کی قوت تختی ب میں انصراف پیدا کرتی ہے۔ اس انصراف کو آئینہ ا اور شعاع نور کے ذریعہ ناپا جا سکتا ہے۔

شکل ۱۴۷

فرض کرو کہ ت۱ اور ت۲ بالترتیب

$ق_1$ اور ب کی تپشیں ہیں اور $ع_1$ فی مکعب سمر سالمات کی وہ تعداد ہے جو $ق_1$ سے ب تک $س_1$ جذر اوسط مربع رفتار سے حرکت کرتے ہیں۔

اسی طرح یہ بھی فرض کرو کہ $ع_2$ سالمات کی وہ تعداد فی مکعب سمر ہے جو ب سے $ق_1$ کی طرف $س_2$ جذر اوسط مربع رفتار سے متحرک ہیں۔

تعادل کے لئے، سالمات کی وہ تعداد جو فی ثانیہ فی مربع سمر سطح سے ٹکراتے ہیں مساوی ہونی چاہیئے۔

یعنی $\frac{ع_1 س_1}{\sqrt{6\pi}} = \frac{ع_2 س_2}{\sqrt{6\pi}}$ یعنی $ع_1 س_1 = ع_2 س_2$

اگر پوری گیس کو $ت_2$ تپش پر رکھا جائے اور سالمات کی تعداد فی مکعب سمر $ق_1$ اور ب کی درمیانی فضا کے باہر ع ہو، تو تعادل کیلئے فی ثانیہ فی مربع سمر $ق_1$ اور ب کی درمیانی فضا سے باہر جانے والے سالمات کی تعداد ان سالمات کی تعداد کے مساوی ہونا چاہیئے جو فی ثانیہ فی مربع سمر $ق_1$ اور ب کی درمیانی فضا میں گزرتے ہیں۔

یعنی $\frac{ع_1 س_1}{\sqrt{6\pi}} + \frac{ع_2 س_2}{\sqrt{6\pi}} = \frac{ع\, س_2}{\sqrt{6\pi}}$

یعنی $ع_1 س_1 + ع_2 س_2 = ع\, س_2$

$$\therefore\ ع_1 س_1 = ع_2 س_2 = \frac{ع\, س_2}{2} \qquad \ldots\ldots\ldots (40)$$

اگر حاصل دفع کی قوت جو تختی کے اکائی رقبہ پر عمل کرتی ہے ق ہو اور $(د_1 + د_2)$ تختیوں کے درمیان مجموعی دباؤ کی قیمت ہو اور گیس کے برتن میں دباؤ د ہو تو:—

$$ق = د_1 + د_2 - د = \frac{1}{3} ث_1 س_1^2 + \frac{1}{3} ث_2 س_2^2 - \frac{1}{3} ث\, س_2^2$$

جہاں ش۱، ش۲ اور ش بالترتیب کثافتوں کو تعبیر کرتے ہیں۔

$$\therefore ق = \frac{1}{2} م\, ع_1 ر_1^2 + \frac{1}{2} م\, ع_2 ر_2^2 - \frac{1}{2} م\, ع\, ر_2^2 =$$

$$= \frac{م}{2} \left( ع_1 ر_1^2 + ع_2 ر_2^2 - ع\, ر_2^2 \right)$$

$$= \frac{م}{2} \left( ع_1 ر_1^2 + ع_2 ر_2^2 - 2 ع_2 ر_2^2 \right) = \frac{م}{2} \left( ع_1 ر_1^2 - ع_2 ر_2^2 \right)$$

$$= \frac{م}{2} \left( \frac{ع_1 ر_1^2}{ع_2 ر_2^2} - 1 \right) ع_2 ر_2^2 = \frac{م\, ع_2 ر_2^2}{2 \times 2} \left( \frac{س_1}{س_2} - 1 \right) =$$

$$= \frac{ش\, س_2^2}{4} \left( \frac{س_1}{س_2} - 1 \right)$$

لیکن یہ ہم جانتے ہیں کہ $\sqrt{ت_1} \propto س_1$ اور $\sqrt{ت_2} \propto س_2$

$$\therefore ق = \frac{د}{2} \left( \sqrt{\frac{ت_1}{ت_2}} - 1 \right) \quad \text{.................. (41)}$$

گنڈسن نے اس اصول کو اپنے داب پیما میں استعمال کیا۔ اس داب پیما کے ذریعہ $10^{-7}$ مم پارہ کے دباؤ تک کی قیمت بالراست معلوم کی جاسکتی ہے۔ اینگرر نے ۱۹۱۳ء میں اس اصول کے عمل کا ایک مختصر سا خاکہ دیا تھا۔

اگر $ت_1$ اور $ت_2$ میں فرق کچھ زیادہ بڑا نہ ہو تو $ق = \frac{د}{4} \left( \frac{ت_1 - ت_2}{ت_2} \right)$

ناڈسن نے اس ضابطہ کو تقریبی طور پر ۱۹۱۸ء میں حاصل کیا تھا۔

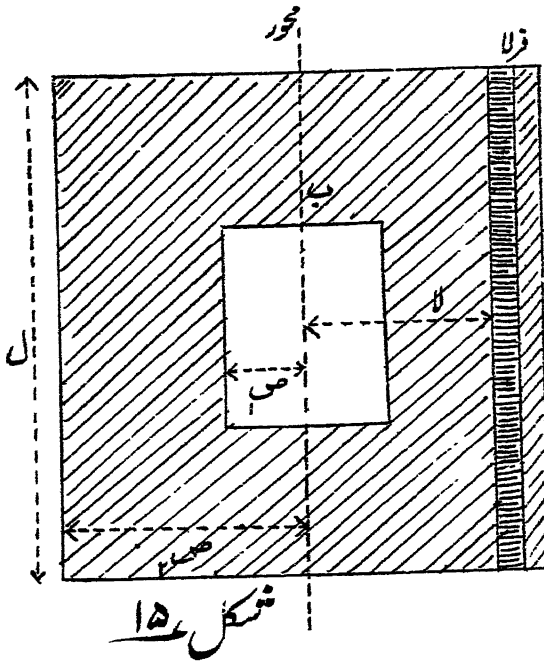
اب فرض کرو کہ $ص_1$ اور $ص_2$ محورِ تعلیق سے ب کے انتصابی ضلعوں کے فاصلے ہیں۔ اور ل انتصابی ضلع کا طول ہے جیسا کہ شکل ۱۵ میں بتایا گیا ہے۔

تختی میں ایک دھجی "فر لا" موٹائی کی محور سے لا فاصلہ پر لو۔

تب اس دھجی پر قوت = ق ل فر لا اور اس پر جو جفت عمل کرتا ہے وہ

محور
فرلا

ل
لا
ص۱
ص۲

شکل ۱۵

= ق ل فرلا . لا
دونوں ضلعوں کو زیرِ بحث لیتے ہوئے پوری تختی کی وجہ سے جفت =

$$= \int_{ص_1}^{ص_2} ۲ \text{ ق ل لا فرلا} = \text{مہ عہ}$$

جہاں عہ = انصرافِ اور مہ = پیچیدگی کا جفت فی اکائی زاویہ

$$\therefore \text{ق ل} (ص_2^2 - ص_1^2) = \text{مہ عہ} \qquad (۴۲)$$

مساوات (۴۱) اور (۴۲) سے :-

$$\frac{د}{۲}\left(\frac{ت_1}{ت_2} - ۱\right) \text{ل} (ص_2^2 - ص_1^2) = \text{مہ عہ} \qquad (۴۳)$$

اب اگر تختی کا وقت دوران ذ ہو تو ذ = ۲ π $\sqrt{\frac{\text{مج}}{\text{مہ}}}$

جہاں مج = تختی کی جمود کا معیار اثر محور تعلیق کے گرد

لہٰذا مہ کی قیمت معلوم کرنے کے بعد مساوات (۴۳) سے د کی قیمت حسابی طریقہ سے حاصل کی جاسکتی ہے گو گیس کی نوعیت نامعلوم رہے۔ ۱۹۱۴ء میں جے۔ ڈبلیو ڈرو نے اسی اصول پر تختیوں کے درمیان ۱۰۰° کی فرق تپش سے ایک داب پیما بنایا۔ اس نے گرم تختی کے لئے پلاٹینم کی پٹیاں استعمال کیں اور تختی کو برقی طریقہ سے گرم کیا۔ متحرک مستطیلی تختی المونیم کی تھی۔ اس نے تپشیں کو گرم پٹیوں کی برقی مزاحمت کی رقوم میں، قوہ پیما استعمال کر کے حسابی عمل سے حاصل کیا۔ خفیف دباؤ حاصل

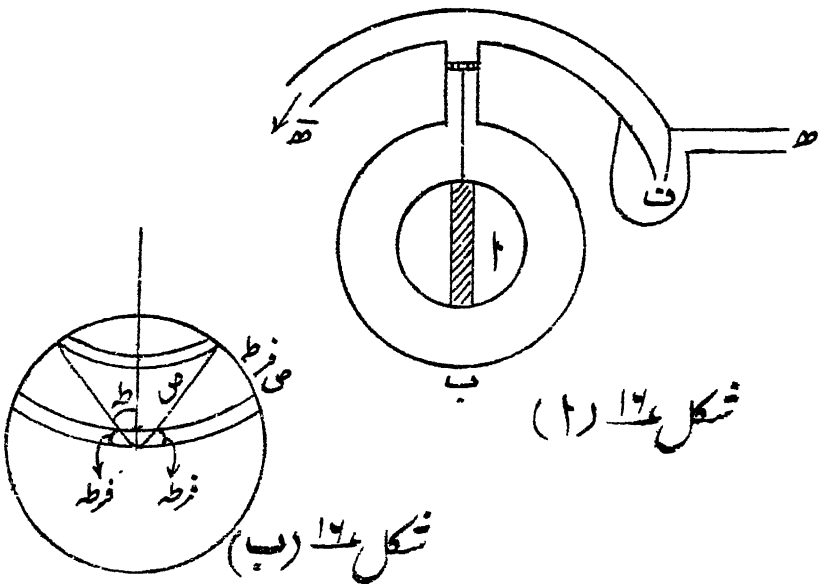
کرنے کے لئے مائع ہوا میں کوئلہ استعمال کیا گیا تھا۔ اس کا دعویٰ ہے کہ متعدد گیسوں کو استعمال کر کے اس نے ۰.۱⁻⁸ مم پارہ کے رتبہ کا دباؤ ناپا ہے۔

۱۹۱۸ء میں جے۔ ای۔ شریڈر اور آر جی شیراوڈ نے کنڈسن کے داب پیما میں بڑی حد تک حساسیت پیدا کرنے میں کامیابی حاصل کی۔ داب پیما کو ایک سخت شیشہ کی نلی میں بند کر دیا گیا جس کا قطر ۲" اور طول ۹" تھا، پلاٹینم کی گرم پٹیوں کا طول ۸۱ سمر، عرض ۵ ر ۷ مم اور موٹائی ۰۱۸ ر مم تھی، متحرک مستطیلی تختی جو الیومینم کی تھی ۲ ر ۳ سمر لمبی ۴ سمر چوڑی اور ۷۶ ۰۰ ر سمر موٹی تھی۔ متحرک تختی اور گرم پٹیوں کا درمیانی فاصلہ مقناطیسی گرفت کے ذریعہ باہر سے مرتب کیا گیا تھا۔ تعلیق ٹنگسٹن کے تار سے کی گئی تھی۔ ان دونوں نے بھی پلاٹینم کی تپشی قدر معلوم رکھ کر اوڈرو کی طرح پٹیوں کی تپش برقی مزاحمت کی رقوم میں حاصل کی۔ ان کا دعویٰ ہے کہ انھوں نے ۰.۱⁻⁹ مم پارہ کے رتبہ کا دباؤ ناپا ہے۔

**کنڈسن کے طریقے سے گیس کے سالمی وزن کی دریافت :-**

شکل ۱۶ع (ا) میں ایک ٹھوس کرہ ا کوارٹز کے ریشہ کے ذریعہ

شکل ۱۶ع (ا)

شکل ۱۶ع (ب)

ایک اور کھوکھلے کرہ ب میں لٹکایا گیا ہے۔ کرہ ا کو جس کے وسطی حصہ میں موٹی پلاطینم کی پٹی لگی ہوئی ہے دائری سمت میں مقناطیسی ذرائع سے اہتزاز کرنے کے لئے مجبور کیا جاتا ہے۔ ا اور ب کے درمیان فاصلہ تقریباً ۵ ممر کا ہوتا ہے۔ ف ایک مائع ہوا کا پھندا ہے جو سالمات کو گرفتار کر لیتا ہے۔ ھ کے ساتھ ایک سالمی پمپ جوڑا جاتا ہے جس سے حسب خواہش خفیف دباؤ ا اور ب کے درمیان پیدا کیا جا سکتا ہے۔ ھ پر ایک داب پیما جوڑا جاتا ہے جس کی مدد سے ا اور ب کے درمیان گیس کا دباؤ معلوم کیا جا سکتا ہے۔ کرہ ا کو اہتزاز میں لا کر وقت دوران اور لوکارتمی تنزل دریافت کر لیا جاتا ہے۔

کرہ ا کو جس کا نصف قطر ص ہے چھوٹے چھوٹے منطقوں یا پٹوں میں تقسیم کرو۔ ایک ایسا پٹہ شکل ۱۶ (ب) میں دکھایا گیا ہے۔

اگر وقفہ فر و میں فر عہ انصراف پیدا ہو تو اس پٹہ کی خطی رفتار تر =

$$= \text{ص جب ط}\,\frac{\text{فر عہ}}{\text{فر و}}$$

مساوات (۳۵) سے اس پٹہ پر مماسی قوت =

$$= ۲\pi\,\text{ص}^{۲}\,\text{جب ط فر ط تر د}\sqrt{\frac{\text{ع}}{۲\pi\,\text{لا ت}}}$$

چونکہ پٹہ کا رقبہ = ۲ π ص . جب ط . ص فر ط

∴ اس پٹہ پر قوتوں کا معیار اثر =

$$= ۲\pi\,\text{ص}^{۳}\,\text{جب}^{۲}\,\text{ط فر ط تر د}\sqrt{\frac{\text{ع}}{۲\pi\,\text{لا ت}}}$$

لہذا پورا جفت =

$$\int_{\text{صفر}}^{\pi} ۲\pi\,\text{ص}^{۳}\,\text{جب}^{۲}\,\text{ط ص جب ط}\,\frac{\text{فر عہ}}{\text{فر و}}\,.\,\text{فر ط د}\sqrt{\frac{\text{ع}}{۲\pi\,\text{لا ت}}}$$

$$= \frac{\text{۸}}{\text{۳}}\pi\,\text{ص}^{\text{۴}}\,\frac{\text{فر عہ}}{\text{فر و}}\,\text{د}\sqrt{\frac{\text{ث}}{\text{۲}\pi\,\text{لاؔت}}} = \text{گ}\,\frac{\text{فر عہ}}{\text{فر و}}$$

$$\text{جہاں گ} = \frac{\text{۸}}{\text{۳}}\pi\,\text{ص}^{\text{۴}}\,\text{د}\sqrt{\frac{\text{ث}}{\text{۲}\pi\,\text{لاؔت}}}$$

تعادل کے لئے حرکت کی مساوات حسب ذیل ہوگی :—

$$\text{مج}\,\frac{\text{فر}^{\text{۲}}\,\text{عہ}}{\text{فر و}^{\text{۲}}} + \text{گ}\,\frac{\text{فر عہ}}{\text{فر و}} + \text{مہ عہ} = \text{صفر}$$

جہاں مج = کرہ کے جمود کا معیار اثر قطر کے گرد، اور مہ = پیچیدگی کا جفت فی اکائی زاویہ۔

اس تفرقی مساوات کو حل کرنے سے :—

$$\text{عہ} = \text{ا}\,\text{و}^{-\frac{\text{گ و}}{\text{۲ مج}}}\,\text{جم}\left(\sqrt{\frac{\text{مہ}}{\text{مج}} - \frac{\text{گ}^{\text{۲}}}{\text{۴ مج}^{\text{۲}}}}\,.\,\text{و} + \text{ب}\right)$$

جہاں ا اور ب مستقل ہیں۔

چونکہ یہ ایک سادہ موسیقی حرکت کی مساوات ہے۔

$$\therefore\ \text{وقت دوران و}_{\text{۱}} = \frac{\text{۲}\pi}{\sqrt{\frac{\text{مہ}}{\text{مج}} - \frac{\text{گ}^{\text{۲}}}{\text{۴ مج}^{\text{۲}}}}}$$

اگر ہم $\text{و}^{-\frac{\text{گ و}}{\text{۲ مج}}}$ کو و کے مقابل مرتسم کریں تو ایک منحنی حاصل ہوتا ہے جو شکل ۱۳ میں دکھایا گیا ہے۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ وقت جوں جوں بڑھتا ہے تو حیطۂ ارتعاش گھٹتا ہے۔

پہلے کی طرح، اگر پیمانہ کی داہنی جانب انصراف $\text{عہ}_{\text{۱}}$ ہو اور ایک کامل وقت دوران کے بعد اسی جانب انصراف $\text{عہ}_{\text{۲}}$ ہو تو $\frac{\text{عہ}_{\text{۱}}}{\text{عہ}_{\text{۲}}} = \text{و}^{\frac{\text{گ و}_{\text{۱}}}{\text{۲ مج}}}$

یعنی $\text{لوک}_{\text{و}} \dfrac{\text{ع}_1}{\text{ع}_2} = \dfrac{\text{گ و}_1}{2\,\text{مج}} = \text{فہ} =$ لوکارتھمی تنزل

گ کی قیمت درج کرنے سے :۔

$$\text{فہ} = \frac{8}{3}\,\pi\,\text{ص}^4\,\text{د}\sqrt{\frac{\text{ئ}}{2\pi\,\text{لات}}}\cdot\frac{\text{و}_1}{2\,\text{مج}} \quad \text{......(۴۴)}$$

اگر فہ، $\text{و}_1$ اور مج وغیرہ معلوم ہوں تو د حسابی عمل سے دریافت کیا جاسکتا ہے

مساوات (۴۴) سے :۔

$$\frac{\text{فرفہ}}{\text{فرد}} = \frac{2}{3}\,\frac{\text{ص}^4}{\text{مج}}\sqrt{\frac{2\pi\,\text{ئ}}{\text{لات}}}\cdot\text{و}_1 = \text{مستقل}$$

$$\therefore\ \text{ئ} = \frac{9}{8}\cdot\frac{\text{لات مج}^2}{\pi\,\text{و}_1^2\,\text{ص}^8}\left(\frac{\text{فرفہ}}{\text{فرد}}\right)^2 \quad \text{......(۴۵)}$$

د کی قیمت بدل بدل کر فہ کی متناظر قیمتیں معلوم کرلی جاتی ہیں اس طرح $\dfrac{\text{فرفہ}}{\text{فرد}}$ کی قیمت دریافت ہوجاتی ہے، اس کے بعد مساوات (۴۵) سے گیس کا سالمی وزن ئ نکل جاتا ہے۔

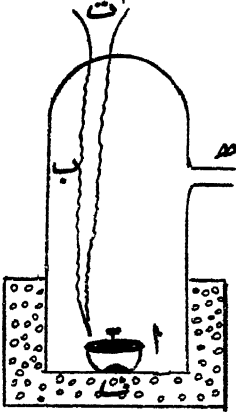
آکسیجن کے لئے کنڈسن نے ئ کی قیمت ۳۱٫۹ کے مساوی دریافت کی تھی۔

دھاتوں کا بخاری دباؤ :۔ اگرٹن نے بعض دھاتوں مثلاً جست، کیڈمیم، سیسہ اور سوڈیم وغیرہ کے بخاری دباؤ کی قیمتیں، سوراخوں میں سے گیسوں کے بہاؤ کے کنڈسن والے اصول کی تحت دریافت کی تھیں[8]۔

۱۹۲۸ء میں ہارٹنگ نے اسی اصول کو استعمال کرکے، ایسے دھاتوں کے بخاری دباؤ دریافت کئے جن کے نقطہ جوش بہت اونچے ہوتے ہیں مثلاً سونا، چاندی، تانبا وغیرہ۔

ہارٹنک اور اگرٹن کے طریقے عملی طور پر یکساں ہیں۔ اول الذکر نے خصوصاً تپش کی پیمائش کے لیے ایک نہایت حساس طریقہ اختیار کیا۔ موخرالذکر نے دھاتوں کو گرم کرنے کے لیئے تانبے کا ایک بڑا سا گرم کنندہ استعمال کیا تھا گو ہارٹنک نے اس غرض کے لیئے برقی بھٹی استعمال کی تھی۔

یہاں ہارٹنک کے طریقے کا بیان خالی از دلچسپی نہ ہوگا :—

شکل ع۱۷ میں ایک چھوٹی کوارٹز کی کٹھالی ا بتائی گئی ہے جس میں دھات رکھہ دی جاتی ہے۔ اس کٹھالی کے ڈھکن میں ایک بالکل چھوٹا سا سوراخ ہوتا ہے۔ کٹھالی کو پہلے وزن کر لیا جاتا ہے اور پھر ایک کوارٹز کی نلی ب کے اندر رکھا جاتا ہے اور اس نلی کا نچلا سرا برقی بھٹی ف کے ذریعہ گرم کیا جاتا ہے۔ کٹھالی کی تپش حر برقی جفت ت کے ذریعہ معلوم کی جاتی ہے۔ بازو میں ایک نلی ھ لگی ہوتی ہے جس کے ذریعہ نلی ب میں پمپ کے ذریعہ اعلیٰ درجہ کا خلا پیدا کیا جا سکتا ہے۔ خلا پیدا کرنے کے بعد ہارٹنک نے مطلوبہ تپش تک نلی کو گرم کیا اور چند گھنٹوں تک اسکو مستقل رکھا۔ اس نے پھر کٹھالی کو ٹھنڈا کر کے تول لیا۔ کٹھالی کے نقصان وزن سے اس دھاتی بخار کا وزن معلوم ہو گیا جو ایک خاص وقت میں سوراخ میں سے نکل آئی۔

شکل ع۱۷

مساوات (۳۰) سے اگر سوراخ میں سے باہر کی فضا میں نکل آنے والی فی ثانیہ بخار کی کمیت ک۲ ہو تو

$$ک_۲ = \pi ص^۲ د_۱ \sqrt{\frac{ع}{۲\pi لا ت}}$$

چونکہ نلی ب میں اعلیٰ درجہ کا خلا پیدا کیا گیا ہے اس لئے $د_۲$ عملاً صفر کے

مساوی ہے۔

$$\therefore د = \frac{ک}{\pi ص^2} \sqrt{\frac{2\pi لا ت}{ع}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۴۶)$$

اس طرح د یعنی بخاری دباؤ کی قیمت معلوم کی جاتی ہے۔ ص کی قیمت سوراخ کے فوٹو بڑے پیمانہ پر لیکر دریافت ہو سکتی ہے۔

لینگمویر (۹) نے ۱۹۱۳ء میں ایک اور طریقہ بھاری دھاتوں مثلاً ٹنگسٹن، پلاٹینم وغیرہ کے بخاری دباؤ کی دریافت کا بیان کیا تھا، ٹنگسٹن کا ایک پتلا سا ریشہ جس کا طول تقریباً ۱۰ سم تھا ایک خلا دار جوفہ میں رکھا گیا اور برقی رو کے ذریعہ اس کو گرم کیا گیا۔ ایک معلوم وقت تک تپش مستقل رکھی گئی۔ گرم کرنے کے دوران میں ظاہر ہے کہ ریشہ سے بخار کے سالمات خارج ہو کر جوفہ کے دیواروں پر چونکہ اس کا دباؤ خفیف ہے منجمد ہوتے ہیں۔ اب جوفہ کو توڑ کر ریشہ کو ایک حساس ترازو میں تول لیا جاتا ہے۔ اگر ریشہ کا ابتدائی وزن معلوم ہو تو نقصان وزن معلوم ہو جاتا ہے۔

مساوات (۲۷) سے فی ثانیہ جوفہ کی سطح کے اکائی رقبہ کو ٹکرانے والے سالمات کی تعداد $= \frac{ع\, ر}{\sqrt{6\pi}}$ تعادل کے لئے بخار کی اس کمیت کا جو فی ثانیہ اکائی رقبہ کی سطح سے ٹکراتی ہے، اس بخار کی کمیت ک کے مساوی ہونا ضروری ہے جو ریشہ کے اکائی رقبہ سے فی ثانیہ خلا میں پیدا ہوتی ہے

اور یہ کمیت ک $= \frac{ع\, ر\, م}{\sqrt{6\pi}}$ جہاں م = ایک سالمہ کی کمیت

اگر بخار کی کثافت ثہ ہو تو ک $= \frac{ثہ\, ر}{\sqrt{6\pi}} = \frac{د\, ئ}{لا ت} \sqrt{\frac{3 لا ت}{ئ}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6\pi}} =$

$$= د \sqrt{\frac{ئ}{2\pi لا ت}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۴۷)$$

لہذا اگر ک معلوم ہو تو بخاری دباؤ د آسانی سے دریافت کیا جا سکتا ہے۔
فرض کرو کہ گرم کرنے کے قبل اکائی طول کے تار کا وزن $ک_۱$ ہے اور ٹنگسٹن
کے تار کی کثافت ث ہے اور نیز گرم کرنے کے قبل تار کا نصف قطر $ص_۱$ کے
مساوی ہے۔ و ثانیوں تک گرم کرنے کے بعد جب وہ سرد کر کے تولا جاتا ہے
تو فرض کرو اکائی طول کے تار کا وزن $ک_۲$ اور نصف قطر $ص_۲$ ہوتا ہے۔

∴ $ک_۱ = \pi ص_۱^۲ ث$ اور $ک_۲ = \pi ص_۲^۲ ث$

∴ $ص_۱ = \sqrt{\frac{ک_۱}{\pi ث}}$ اور $ص_۲ = \sqrt{\frac{ک_۲}{\pi ث}}$

ریشہ کے اکائی طول میں سے فی ثانیہ جو کمیت کم ہو جاتی ہے وہ =

$$= \frac{فرک_۱}{فرو} = ۲\pi ث ص_۱ \frac{فرص_۱}{فرو}$$

∴ ریشہ کے اکائی رقبہ سے فی ثانیہ جس کمیت کا نقصان ہوتا ہے

$$= ک = ث \frac{فرص_۱}{فرو} = \frac{۱}{۲\pi ص_۱} \cdot \frac{فرک_۱}{فرو}$$

∴ مجموعی وقت و کے لئے $\int_{صفر}^{و} ک\, فرو = \int_{ص_۲}^{ص_۱} ث\, فرص_۱$

یعنی $ک = \frac{ث(ص_۱ - ص_۲)}{و}$

$$= \sqrt{\frac{ث}{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{ک_۱} - \sqrt{ک_۲}}{و}$$

مساوات (۴۷) سے :-

$$د \sqrt{\frac{ع}{۲\pi لا ت}} = \sqrt{\frac{ث}{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{ک_۱} - \sqrt{ک_۲}}{و} \quad ......... (۴۸)$$

اس طرح د کی قیمت معلوم کی جاسکتی ہے۔

تجربہ میں ٹنگسٹن کے لئے د کی قیمت جبکہ تپش ت ۲۴۰۰° مطلق تھی $10^{-9} \times 2.949$ ممر پارہ کے دباؤ کے مساوی نکلی۔ جبکہ ت ۳۰۰۰° مطلق تھی تو د کی قیمت $10^{-4} \times 2.263$ ممر پارہ کے دباؤ کے مساوی حاصل ہوئی۔

سالمات کا اوسط آزاد راستہ:— ہم دیکھ چکے ہیں کہ کسی گیس کے سالمات معمولی تپش پر بڑی زبردست رفتاروں کے ساتھ حرکت کرتے رہتے ہیں وہ ایک دوسرے سے ٹکراتے بھی ہیں اور ان کی حرکت کی سمتیں بدلتی بھی رہتی ہیں۔ دو متواتر تصادم کے درمیان کسی ایک سالمہ کا راستہ خط مستقیم ہوتا ہے۔ لہذا کسی ایک سالمہ کا راستہ متعدد تصادم کے بعد بے قاعدہ یا آڑے ترچھے خطوط مستقیم پر مشتمل ہوتا ہے جیسا کہ شکل ع۱۸ میں دکھایا گیا ہے۔

یہ ظاہر ہے کہ بعض راستے زیادہ لمبے اور بعض چھوٹے ہوتے ہیں۔ اگر ہم ھ۱، ھ۲، ھ۳........ راستوں کی بڑی تعداد کے طولوں کو جمع کریں اور حاصل جمع کو راستوں کی مجموعی تعداد ع سے تقسیم کریں تو حاصل مقدار سالمات کا اوسط آزاد راستہ ھ کہلاتا ہے۔

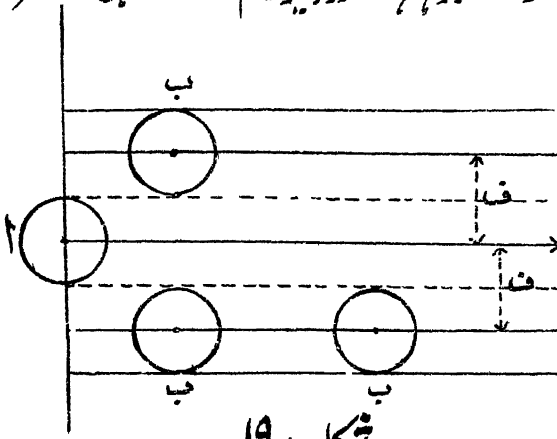


شکل ع۱۸

یعنی $ھ = \frac{ھ_1 + ھ_2 + ھ_3 + \cdots\cdots}{ع}$

$= \frac{\text{کل طے شدہ فاصلہ ایک ثانیہ میں}}{\text{تعداد تصادم فی ثانیہ}}$

فرض کرو کہ شکل ع۱۹ میں ا ایک سالمہ ہے جس کا قطر ف ہے اور یہ

لا سمت میں س رفتار سے حرکت کر رہا ہے، اور دیگر تمام سالمات جن کے قطر بھی یہی ہیں اپنی جگہ پر قائم ہیں۔ نیز یہ بھی فرض کرو کہ یہ سالمہ ا، ب سالمات کو چھوتا ہوا گزرتا ہے۔

شکل نمبر ۱۹

∴ تعداد تصادم فی ثانیہ = تعداد سالمات جن کے مرکز اس حجم یعنی π ف² س کے اندر واقع ہیں = π ف² س ع

[چونکہ ع = تعداد سالمات فی مکعب سم]

∴ ھ = (طے شدہ فاصلہ ایک ثانیہ میں) / (تعداد تصادم فی ثانیہ) = س / (π ف² س ع) = ۱ / (π ف² ع)

∴ اوسط آزاد راستہ ھ = ۱ / (π ف² ع) = م / (π ف² ثہ)

= م لا ت / (π ف² د ث) ................ (۴۹)

جہاں ثہ = گیس کی کثافت

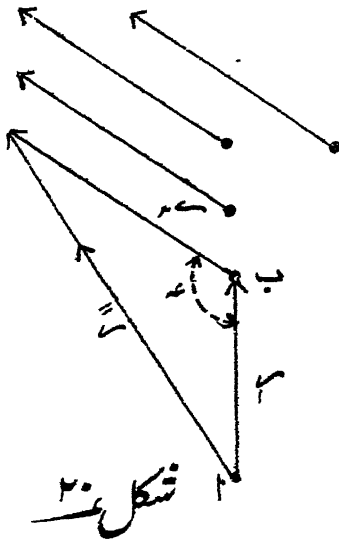
م = ایک سالمہ کی کمیت

اور د = دباؤ

لیکن اوپر کے نتائج بالکل صحیح اس وجہ سے نہیں ہیں کہ ہم نے یہ فرض کیا ہے کہ دیگر سالمات متحرک نہیں ہیں۔

کلاؤشیس نے اس لئے یہ فرض کیا کہ تمام سالمات کبھی اسی رفتار سے حرکت کرتے ہیں اور چنانچہ اس خطا کو اسی قسم کی ایک اور مساوات حاصل کر کے رفع کیا۔
اگر سَر = سالمہ کی اضافی رفتار بلحاظ دوسرے سالمات کے اور
سا = تمام سالمات کی اوسط رفتار تو

$$\text{ه} = \frac{\text{سا}}{\pi\ \text{ف}^2\ \text{ع}\ \text{سر}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (۵۰)$$

عام صورت کے لئے فرض کرو کہ ایک سالمہ ۱، رفتار سا۱ سے ایسی فضا میں پھینکا جاتا ہے جس میں ع سالمات فی مکعب سمر موجود ہیں اور یہ تمام اس سالمہ کی سمت حرکت سے زاویہ عہ بناتے ہوئے ایک سمت میں حرکت کر رہے ہیں جیسا کہ شکل عنہ ۲۰ میں دکھایا گیا ہے۔ فرض کرو کہ اس پھینکے ہوئے سالمہ کی اضافی رفتار سر ہے بلحاظ ایکدوسرے سالمہ ب کے جس کی رفتار سا۲ ہے۔
تب سر² = سا۱² + سا۲² − ۲ سا۱ سا۲ جم عہ
اگر حقیقی طور پر دیکھا جائے تو رفتار سا۲ کے لئے تمام سمتیں مساوی طور پر ممکن ہیں۔ لہذا سر کی اوسط قیمت دریافت کرنے کے لئے ہمیں سر کو اس احتمال سے ضرب دینا ہوگا جو کہ سا۲ رفتار، عہ اور عہ + فرعہ کے درمیانی مجسم زاویہ میں واقع ہوتی ہے۔

شکل عنہ ۲۰

لیکن اس مجسم زاویہ کی قیمت جو کُل یعنے ع سالمات فی مکعب سمر کے لئے پوری فضا میں ہوگی ۴π کے مساوی ہے۔ مجسم زاویہ جو عہ اور عہ + فرعہ کے درمیان واقع ہونے والی سمت کے متناظر ہے ۲π جب عہ فرعہ کے

مساوی ہے۔

∴ ان سالمات کی تعداد فی مکعب سمر جو عہ اور عہ + فرعہ کے درمیان واقع ہونے والی سمت میں آتے ہیں $= \frac{ع}{\pi ۴} \cdot ۲\pi$ جب عہ فرعہ

∴ احتمال فی مکعب سمر اسبات کا کہ رفتار $ر_۲$ عہ اور عہ + فرعہ کے درمیان واقع ہونے والے مجسم زاویہ کے اندر رہے گی $= \frac{ع}{۲}$ جب عہ فرعہ

∴ احتمال فی سالمہ کہ $ر_۲$ رفتار عہ اور عہ + فرعہ کے درمیان واقع ہونے والے مجسم زاویہ کے اندر ہوگی $= \frac{\text{جب عہ فرعہ}}{۲}$

∴ $\bar{ر}$ کی اوسط قیمت $= \bar{ر} \frac{\text{جب عہ فرعہ}}{۲}$

∴ $\bar{ر}$ کی اوسط قیمت بلحاظ دیگر سالمات $= \bar{\bar{ر}} = \int_{\text{صفر}}^{\pi} \bar{ر} \frac{\text{جب عہ فرعہ}}{۲}$

$$∴ \bar{\bar{ر}} = \int_{\text{صفر}}^{\pi} \frac{\text{جب عہ فرعہ}}{۲} \cdot \sqrt{ر_۱^۲ + ر_۲^۲ - ۲ ر_۱ ر_۲ \text{ جم عہ}}$$

$$= \left\{ \frac{۱}{۶ ر_۱ ر_۲} \left( ر_۱^۲ + ر_۲^۲ - ۲ ر_۱ ر_۲ \text{ جم عہ} \right)^{\frac{۳}{۲}} \right\}_{\text{صفر}}^{\pi}$$

$$= \frac{۱}{۶ ر_۱ ر_۲} \left( ر_۱^۲ + ر_۲^۲ \right)^{\frac{۳}{۲}}$$

کلاؤشیس کے مفروضہ کے مطابق، چونکہ تمام سالمات ایک ہی رفتار سے حرکت کر رہے ہیں۔ لہذا $ر_۱ = ر_۲ = ر$

$$∴ \bar{\bar{ر}} = \frac{(۲ ر^۲)^{\frac{۳}{۲}}}{۶ ر^۲} = \frac{۴}{۳} ر \quad \text{یعنی} \quad \frac{ر}{\bar{\bar{ر}}} = \frac{۳}{۴}$$

مساوات (۵۰) میں $\frac{ر}{\bar{\bar{ر}}}$ کی قیمت لکھنے سے:۔

$$ھ = \frac{۳}{۴\pi \text{ ف}^۲ \text{ ع}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۵۱)$$

بعد میں میکسول نے رفتاروں کی تقسیم کے کلیہ سے حسب ذیل نتیجہ حاصل کیا[10]:۔

$$\text{ھ} = \frac{1}{\sqrt{2}\ \pi\ \text{ف}^{2}\ \text{ع}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۵۲)$$

اس کے بعد جینس نے یہ فرض کرتے ہوئے کہ سالمات سخت لچکدار کرّے ہیں حسب ذیل مساوات حاصل کی :-

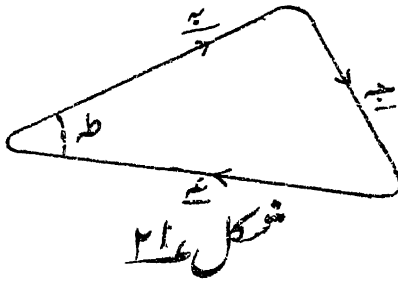
$$\text{ھ} = \frac{1.319}{\sqrt{2}\ \pi\ \text{ف}^{2}\ \text{ع}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۵۳)$$

لیکن چیپمن نے اپنا ضابطہ اس طرح پیش کیا :-

$$\text{ھ} = \frac{1.402}{\sqrt{2}\ \pi\ \text{ف}^{2}\ \text{ع}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۵۴)$$

سدرلینڈ نے یہ فرض کرتے ہوئے کہ سالمات کے درمیان، بین السالماتی قوتیں یا تجاذبی قوتیں کسی خاص کلیہ کے تحت عمل کرتی ہیں، سالماتی قطر کے لئے ایک ضابطہ اخذ کیا[11]۔ اگر تجاذبی قوتیں عمل پیرا ہوتی ہیں تو سالمات ایکدوسرے سے قریب تر ہو جاتے ہیں اور اس طرح ان میں تصادم کا امکان بڑھ جاتا ہے لہذا ان کا اوسط آزادراستہ گھٹ جاتا ہے۔ اس نقطۂ نظر سے سدرلینڈ کی تصحیح، اوسط آزادراستہ کے لئے حاصل کرنے کی کوشش کی جائے گی :-

سدرلینڈ کا ضابطہ اخذ کرنے کے قبل ہم چند ابتدائی باتیں سمتیوں کے متعلق یہاں بیان کردینا ضروری سمجھتے ہیں۔ طلباء کو چاہیئے کہ ان کو یاد رکھیں۔ ہر شخص یہ جانتا ہے کہ ایسی مقادیر جو سمت رکھتے ہیں مثلاً فاصلہ، رفتار، قوت وغیرہ سمتی مقادیر کہلاتے ہیں۔ جن مقادیر میں سمت نہیں ہوتی وہ مقداری کہلاتی ہیں کسی ایک سمتی کی ترسیمی طریقہ سے تعبیر ایک خط مستقیم سے ہوتی ہے، الجبری طریقہ سے اس کی تعبیر ایک علامت سے ہوتی ہے جس کے نیچے ایک چھوٹی سی لکیر کھینچ دی جاتی ہے۔ اگر دو سمتیاں ع اور ی ایک دوسرے سے زاویہ ط بناتے ہوں جیسا کہ شکل ۲۱ میں دکھایا گیا ہے

تو حاصل جمع جـ = عـ + بـ

بـ ∧ عـ اگر لکھا جائے تو اس کا
مطلب یہ ہے کہ سمتی عـ کو سمتی طور پر
سمتی بـ سے ضرب دیا گیا ہے۔
اس حاصل ضرب کو مقداری میں
لکھنے سے:-

شکل ۲۱

عـ ∧ بـ = عـ . بـ جب ط = (اس مثلث کا رقبہ) × ۲

∴ مثلث کا رقبہ = $\frac{1}{2}$ عـ ∧ بـ ............ (۵۵)

اگر بـ ∧ عـ = صفر تو ط = صفر، اس کا مطلب یہ ہے کہ عـ
منطبق ہو جاتی ہے بـ سے، اسکے معنی یہ ہوں گے کہ عـ ∧ عـ = صفر

∴ عـ ∧ عـ = صفر ............ (۵۶)

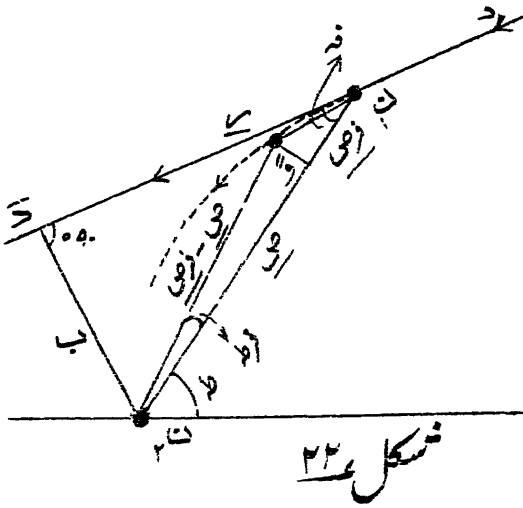
اب قوت کے معکوس مربع کے کلیہ سے:-

قوت ق ∝ $\frac{\text{م}^2}{\text{ص}^2}$ جہاں م = ایک ذرہ کی کمیت اور ص =
= دونوں ذرات کے درمیان فاصلہ لیکن ہم یقین کے ساتھ یہ نہیں کہ سکتے
کہ کلیہ بالا میں $\text{ص}^2$ کے بجائے، $\text{ص}^3$ یا $\text{ص}^4$ وغیرہ تو نہیں ہے۔ اسلئے
سدرلینڈ نے یہ فرض کیا کہ دو ذرات کے درمیان تجاذبی قوت ق ہے جو
$\text{م}^2$ ف $\left(\frac{1}{\text{ص}}\right)$ کے متناسب ہے جہاں ف سے مطلب کوئی تفاعل ہے۔

∴ قوت کا صحیح کلیہ حسب ذیل ہوگا:-

ق = مہ $\text{م}^2$ ف $\left(\frac{1}{\text{ص}}\right)$ ............ (۵۷)

جہاں مہ = کوئی مستقل

فرض کرو کہ کسی خاص وقت میں $\text{ن}_1$ اور $\text{ن}_2$ دو ذرات کے مقامات ہیں
اور ان کے درمیان فاصلہ ص ہے۔ $\text{ن}_1$ ذرہ ابتدا میں $\text{ر}_1$ رفتار کے ساتھ
د سے نکلتا ہے اور د د سمت میں چلنے لگتا ہے لیکن تھوڑی دیر کے بعد

ذرّہ ن۲ کی کشش کی وجہ سے اس کو ایک منحنی کی وضع کا راستہ اختیار کرنا پڑتا ہے جیسا کہ نقطہ دار خط سے شکل ۲۲ میں ظاہر کیا گیا ہے۔ چنانچہ وہ ایک مثلث ن۲ د ن۱ کا رقبہ بناتے ہوئے نیچے اُترتا ہے۔ اگر ن۲ کی کشش نہ ہوتی تو ذرہ ن۱ سے رفتار کے ساتھ د د کا راستہ اختیار کرتا۔

شکل ۲۲

فرض کرو کہ ذرہ ن۱ فر و وقت میں فر ص فاصلہ طے کیا یعنی فر و وقت کے بعد ن۱ اور ن۲ کا درمیانی فاصلہ (ص − فر ص) ہے۔ ایسی صورت میں وہ رقبہ جو ذرہ نے فر و وقت میں بنایا مساوات (۵۵) سے = فر ا (فرض کرو) = ½ ص ∧ (ص − فر ص)

∴ فر ا = ½ { ص ∧ ص − ص ∧ فر ص }

∴ مساوات (۵۶) سے:—

فر ا = − ½ ص ∧ فر ص

∴ سطحی رفتار = فر ا / فر و = − ½ ص ∧ فر ص / فر و =

= − ½ ص ∧ ص̊ جہاں ص̊ = فر ص / فر و

اب چونکہ رفتار مستقل ہے لہذا عرضی اسراع صفر ہے

∴ ص ∧ ص̊ = − ۲ ا̊ = مستقل = ج فرض کرو

جہاں $\overset{\circ}{ا} = \frac{فر ا}{فر و}$

∴ ج = ص ۸ ص = ص ۸ س ............... (۵۸)

فرض کرو کہ ن د رفتار کی سمت پر عمود کھینچا گیا ہے اور اسکا طول = ب

تو ج = ص ۸ س = ص . س جب فہ = ب س ......... (۵۹)

جہاں فہ = ص اور س کا درمیانی زاویہ

اب اگر ص اور افقی سمت کے درمیان زاویہ طہ ہو تو

$\frac{فر ص}{ص فر طہ}$ = مم فہ لیکن $\frac{ص}{ب}$ = قم فہ یعنی $\frac{ص^۲}{ب^۲}$ = قم$^۲$ فہ = ۱ + مم$^۲$ فہ

∴ $\frac{ص^۲}{ب^۲} = ۱ + \left(\frac{فر ص}{ص فر طہ}\right)^۲$ ............... (۶۰)

اب فرض کرو کہ $\frac{۱}{ص}$ = ن یعنی ن ص = ۱

اسکو تفرقانے سے $\frac{ن فر ص}{فر طہ} + \frac{ص فر ن}{فر طہ}$ = صفر

یعنی $\frac{۱}{ص} . \frac{فر ص}{فر طہ} + \frac{۱}{ن} . \frac{فر ن}{فر طہ}$ = صفر

∴ $\frac{۱}{ص^۲} . \left(\frac{فر ص}{فر طہ}\right)^۲ = \frac{۱}{ن^۲}\left(\frac{فر ن}{فر طہ}\right)^۲$ ......... (۶۱)

لہذا مساوات (۶۰) اور (۶۱) سے :-

$\frac{ص^۲}{ب^۲} - ۱ = \frac{۱}{ن^۲}\left(\frac{فر ن}{فر طہ}\right)^۲$ یعنی $\frac{۱}{ب^۲}$ =

$\frac{۱}{ص^۲} + \frac{۱}{ص^۲ ن^۲}\left(\frac{فر ن}{فر طہ}\right)^۲$

$$\therefore \frac{\text{۱}}{\text{ب}^{\text{۲}}} = \text{ن}^{\text{۲}} + \left(\frac{\text{فرن}}{\text{فرط}}\right)^{\text{۲}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{۶۲})$$

اب مساوات (۵۷) کی مدد سے سالمہ کی توانائی بالقوہ =

$$= \text{۴ مہ} \int \text{ف} \left(\frac{\text{۱}}{\text{ص}}\right) \text{فرص} = -\text{۴ مہ} \int \text{ف (ن)} \frac{\text{فرن}}{\text{ن}^{\text{۲}}}$$

لیکن توانائی بالفعل + توانائی بالقوہ = مستقل = گ فرض کرو

$$\therefore \frac{\text{۱}}{\text{۲}} \text{م ر}^{\text{۲}} - \text{۴ مہ} \int \text{ف (ن)} \frac{\text{فرن}}{\text{ن}^{\text{۲}}} = \text{گ}$$

مساوات (۵۹) اور (۶۲) کی مدد سے :—

$$\text{ر}^{\text{۲}} = \frac{\text{ج}^{\text{۲}}}{\text{ب}^{\text{۲}}} = \text{ج}^{\text{۲}} \left\{ \text{ن}^{\text{۲}} + \left(\frac{\text{فرن}}{\text{فرط}}\right)^{\text{۲}} \right\}$$

$$\therefore \frac{\text{۱}}{\text{۲}} \text{م ج}^{\text{۲}} \left\{ \text{ن}^{\text{۲}} + \left(\frac{\text{فرن}}{\text{فرط}}\right)^{\text{۲}} \right\} =$$

$$= \text{۴ مہ} \int \text{ف (ن)} \frac{\text{فرن}}{\text{ن}^{\text{۲}}} + \text{گ}$$

$$\therefore \text{ن}^{\text{۲}} + \left(\frac{\text{فرن}}{\text{فرط}}\right)^{\text{۲}} = \frac{\text{۲ مہ ۴}}{\text{ج}^{\text{۲}}} \int \text{ف (ن)} \frac{\text{فرن}}{\text{ن}^{\text{۲}}} + \text{گَ}$$

$$\text{جہاں گَ} = \frac{\text{۲ گ}}{\text{م ج}^{\text{۲}}} = \text{مستقل}$$

$$\therefore \frac{\text{۱}}{\text{ب}^{\text{۲}}} = \frac{\text{ر}^{\text{۲}}}{\text{ج}^{\text{۲}}} = \frac{\text{۲ مہ ۴}}{\text{ج}^{\text{۲}}} \text{فَ (ن)} + \text{گَ}$$

جہاں $\text{فَ (ن)} = \int \text{ف (ن)} \frac{\text{فرن}}{\text{ن}^{\text{۲}}}$ فرض کرو اور گَ = کوئی دوسرا مستقل

اب جبکہ ص = ∞ تو ن = صفر $\therefore \text{گَ} = \frac{\text{ر}^{\text{۲}}}{\text{ج}^{\text{۲}}}$

$$\therefore\ \text{ن}^{۲} + \left(\frac{\text{فرن}}{\text{فرطہ}}\right)^{۲} = \frac{۲\,\text{مہ}^{۴}}{\text{ج}^{۲}}\,\text{ف}(\text{ن}) + \frac{\bar{\text{ر}}^{۲}}{\text{ج}^{۲}} \quad\ldots\ldots\ (۶۳)$$

لیکن جبکہ ص = ف = سالمہ کا قطر، اس صورت میں سالمات صرف چھوتے ہوئے گزرتے ہیں لہذا وہ صرف مماسی رفتار رکھتے ہیں یعنی اس کے معنی یہ ہیں کہ $\frac{\text{فرص}}{\text{فرو}}$ = صفر

اس لئے جبکہ ص = ف تو

$$\frac{\text{فرن}}{\text{فرطہ}} = \frac{\text{فر}\left(\frac{۱}{\text{ص}}\right)}{\text{فرطہ}} \cdot \frac{\text{فرو}}{\text{فرو}} = \frac{\text{فر}\left(\frac{۱}{\text{ص}}\right)}{\text{فرص}} \cdot \frac{\text{فرص}}{\text{فرو}} \cdot \frac{\text{فرو}}{\text{فرطہ}} = \text{صفر}$$

$$\therefore\ \frac{۱}{\text{ف}^{۲}} = \frac{۲\,\text{مہ}^{۴}}{\text{ج}^{۲}}\,\text{ف}\left(\frac{۱}{\text{ف}}\right) + \frac{\bar{\text{ر}}^{۲}}{\text{ج}^{۲}} =$$

$$= \frac{۲\,\text{مہ}^{۴}}{\text{ب}^{۲}\,\bar{\text{ر}}^{۲}}\,\text{ف}\left(\frac{۱}{\text{ف}}\right) + \frac{۱}{\text{ب}^{۲}}$$

$$\therefore\ \text{ب}^{۲} = \text{ف}^{۲}\left\{\frac{۲\,\text{مہ}^{۴}\,\text{ف}\left(\frac{۱}{\text{ف}}\right)}{\bar{\text{ر}}^{۲}} + ۱\right\} \quad\ldots\ldots\ldots\ (۶۴)$$

چونکہ جاذبی قوتوں کی وجہ سے سالمات ایک منحنی راستہ اختیار کر رہے ہیں اس لئے تعداد تصادم فی ثانیہ = تعداد سالمات جن کے مرکز $\pi\,\text{ب}^{۲}\,\bar{\text{ر}}$ کے اندر واقع ہیں

$$= \pi\,\text{ب}^{۲}\,\bar{\text{ر}}\,\text{ع}$$

یعنی کشش کی وجہ سے مرکزوں کے درمیان اعظم فاصلہ ف نہیں ہے بلکہ ب ہے۔

پس اگر ہم چیپمین کا ضابطہ لیں تو صحیح ضابطہ حسب ذیل ہوگا:—

$$\text{ھ} = \frac{۱٫۴۰۲}{\sqrt{۲}\ \pi\ \text{ع}\ \text{ف}^{۲}\left\{۱ + \frac{۲\,\text{مہ}^{۴}\,\text{ف}\left(\frac{۱}{\text{ف}}\right)}{\bar{\text{ر}}^{۲}}\right\}}$$

$$= \frac{۱٫۴۰۲}{\sqrt{۲}\,\pi\,ع\,ف^{۲}\left\{۱ + \frac{۲\,مہ\,م\,ف\left(\frac{۱}{ف}\right)ك}{۳\,لا\,ت}\right\}}$$

$$= \frac{۱٫۴۰۲}{\sqrt{۲}\,\pi\,ع\,ف^{۲}\left(۱+\frac{س}{ت}\right)} \quad \text{.........}(۷۵)$$

جہاں $س = \frac{۲\,مہ\,م\,ف\left(\frac{۱}{ف}\right)ك}{۳\,لا}$ = سدرلینڈ کا مستقل

وسط آزاد راستہ اور لزوجت (۱۲) :- میکسول پہلا شخص ہے جس نے اس مظہر کی گیسوں کے نظریہ تحرک کے نقطۂ نظر سے تشریح کرنے کی کوشش کی۔ لزوجت اور اوسط آزاد راستہ میں جو ربط ہے ہم اس کو ایک آسان طریقہ سے ثابت کرنے کی کوشش کریں گے۔

فرض کرو کہ ایک گیس کسی مستوی لا' یا کے متوازی حرکت کر رہی ہے۔ اس کے سالمات کی رفتار کسی متناظر یت کے لئے فرض کرو کہ ایک ہی ہے اور جوں جوں فاصلہ ما بڑھتا جاتا ہے یعنی پرتوں کی تعداد میں اضافہ ہوتا ہے سالمات کی رفتار میں بھی بتدریج اضافہ ہوتا جاتا ہے۔ اور نیز یہ بھی فرض کرو کہ سالمی رفتاروں میں دو ایسے پرتوں کی وجہ سے جن کے درمیان فاصلہ "فرما" ہے، فرق "فرسا" کے مساوی ہے۔

اس صورت میں دو ایسے پرتوں کے لئے جن کے درمیان فاصلہ ھ یعنی سالمات کے آزاد اوسط راستہ کے مساوی ہو سالمی رفتاروں میں فرق ھ $\frac{فرسا}{فرما}$ کے مساوی ہوگا۔ لہذا معیار حرکت میں تبدیلی فی سالمہ م ھ $\frac{فرسا}{فرما}$ کے مساوی ہوگی جہاں م سے مراد ایک سالمہ کی کمیت۔

چونکہ ان سالمات کی تعداد کا جو "لا" محور کی جانب حرکت کرتے ہیں، اُن سالمات کی تعداد کے تقریباً مساوی ہونا ضروری ہے جو "ما" یا "یا"

محور کی جانب حرکت کرتے ہیں

لہذا اگر لا محور کی جانب ہی کی حرکت پر غور کیا جائے تو $\frac{ع}{۳}$ سالمات کو ہم اس محور کے متوازی حرکت کرتے ہوئے لے سکتے ہیں جہاں ع سالمات کی تعداد فی مکعب سمر ہے ۔ پس کسی ایک پرت کے اکائی رقبہ میں سے فی ثانیہ گزرنے والے سالمات کی تعداد $\frac{ع\,\overline{سا}}{۳}$ کے مساوی ہوگی جہاں $\overline{سا}$ حسابی اوسط رفتار ہے ۔ لہذا فی مربع سمر رقبہ میں فی ثانیہ معیار حرکت کی مجموعی تبدیلی

$$= \frac{۱}{۳}\, ع\, \overline{سا}\, م\, ھ\, \frac{فر سا}{فر ما}$$

اس کا مطلب یہ ہے کہ فی اکائی رقبہ وہ قوت جو تیز حرکت کرنے والی پرت کی رفتار میں گھٹاؤ پیدا کرنے کی کوشش کرتی ہے ۔

$$= \frac{۱}{۳}\, ع\, \overline{سا}\, م\, ھ\, \frac{فر سا}{فر ما}$$

لیکن لزوجت لہ کی تعریف سے یہ قوت فی اکائی رقبہ $لہ \frac{فر سا}{فر ما}$ کے مساوی ہے ۔

$$\therefore\ لہ \frac{فر سا}{فر ما} = \frac{۱}{۳}\, ع\, \overline{سا}\, م\, ھ\, \frac{فر سا}{فر ما}$$

یعنی $لہ = \frac{۱}{۳}\, ثہ\, \overline{سا}\, ھ$ .................... (۶۶)

چونکہ $\overline{سا} \propto \sqrt{ت}$ اسلئے $لہ \propto ثہ \sqrt{ت}\,.\,ھ$

مساوات (۶۵) کی مدد سے $لہ \propto \frac{۴\, ع \sqrt{ت} \times ۱۶۴۰۲}{\sqrt{۲}\, \pi\, ع\, فا^{۲} \left(۱ + \frac{سی}{ت}\right)}$

$$\therefore\ لہ = \frac{گہ\, ت^{\frac{۱}{۲}}}{۱ + \frac{سی}{ت}} \quad \text{.................... (۶۷)}$$

جہاں گہ = مستقل اور لہ = لزوجت ت درجے تپش مطلق پر

لہذا مساوات (۶۷) سے یہ ظاہر ہے کہ کسی گیس کی لزوجت کو اسکی کثافت

یا دباؤ سے کوئی تعلق نہیں ہے بشرطیکہ تپش مستقل ہو۔ لیکن بعد میں عملی طور پہ یہ ثابت ہوچکا ہے کہ یہ کلیہ بہت ہی اونچے اور نیز بہت ہی کم دباؤ پر کام نہیں دے سکتا۔

**کلیات گیس کا اطلاق شیرے کی صورت میں "پیران کا کلیہ":۔**

پیران (۱۳) کو یہ خیال ہوا تھا کہ کسی لس وتتی محلول میں بھی ذرات کی تقسیم کے لئے، کرہ ہوائی میں ہوا کے سالمات کی تقسیم کے مماثل، ایک کلیہ ضرور ہونا چاہیئے۔ اس نے شیرے کی صورت میں، "توانائی کی مساوی تقسیم" کے کلیہ کے اطلاق سے، مختلف گہرائیوں پر ذرات کی کثافت کے متعلق ایک ضابطہ حاصل کیا تھا۔

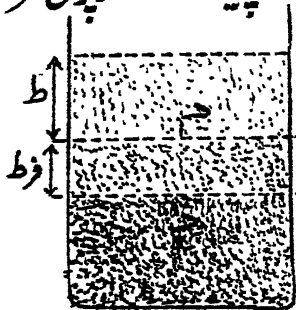
مساوات (۲۶) سے

$$\text{توانائی بالفعل فی ذرہ} = \frac{1}{2}\,\text{م}\,\bar{\text{ر}}^{2} = \frac{3\,\text{لا ت}}{2\,\text{ن}} = \text{فہ}\ (\text{فرض کرد})$$

مساوات (۱) سے

$$\text{د} = \frac{1}{3}\,\text{ثہ}\,\bar{\text{ر}}^{2} = \frac{1}{3}\,\text{ثہ}\,\frac{2\,\text{فہ}}{\text{م}} = \frac{2}{3}\,\text{ع فہ} \quad \ldots\ldots\ldots (۶۸)$$

جہاں ع = تعداد ذرات فی مکعب سم

فرض کرو کہ ہم اکائی تراش عمودی کے ایک اسطوانہ پر غور کرتے ہیں جس میں کوئی شیرہ بھرا ہوا ہے۔ جیسے جیسے ہم اسطوانہ کے پیندے سے اوپر کی طرف جائیں گے تو ارتکاز میں جاذبہ زمین کی وجہ سے کمی ہونے لگے گی۔ شکل ۲۳ میں ایک ایسا پرت بتایا گیا ہے جو اوپر کی پرت سے ط فاصلے پر ہے۔ فرض کرو کہ اس پرت کا ارتکاز ع اور رولوجی دباؤ د ہے۔

ط
فط
د
ع
ع + فع

شکل ۲۳

ایک اور پرت کا جس کا فاصلہ اوپر کی پرت سے ط + فرط ہے فرض کرو کہ ارتکاز ع + فرع اور دلوجی دباؤ $\text{د}_{\text{۲}}$ ہے۔

مساوات (۶۸) سے $\text{د}_{\text{۱}} = \frac{\text{۲}}{\text{۳}}\ \text{ع فہ}$ اور $\text{د}_{\text{۲}} =$

$= \frac{\text{۲}}{\text{۳}}\ (\text{ع} + \text{فرع})\ \text{فہ}$

∴ حاصل دلوجی دباؤ $= \text{د}_{\text{۲}} - \text{د}_{\text{۱}} = \frac{\text{۲}}{\text{۳}}\ \text{فرع فہ}$

∴ حاصل دباؤ فرط بلندی میں ذرات کی وجہ سے =

فرط (ثہ − ث) ج ع حہ

جہاں حہ = ایک ذرہ کا حجم، ثہ = ذرہ کی کثافت اور ث = مائع کی کثافت

لہذا تعادل کے لئے $\frac{\text{۲}}{\text{۳}}$ فہ فرع = فرط (ثہ − ث) ج ع حہ

اسکو صفر گہرائی سے ط تک تکملانے سے :-

$$\int_{\text{ع}_{\text{صفر}}}^{\text{ع}} \frac{\text{۲}}{\text{۳}}\ \text{فہ}\ \frac{\text{فرع}}{\text{ع}} = \int_{\text{صفر}}^{\text{ط}} (\text{ثہ} - \text{ث})\ \text{ج حہ فرط}$$

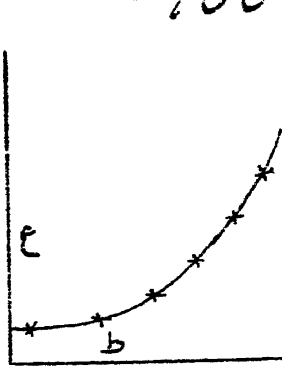
جہاں $\text{ع}_{\text{صفر}}$ = سب سے اوپر کی پرت کے پاس ارتکاز

$$\therefore\ \text{لوک}_{\text{و}} \frac{\text{ع}}{\text{ع}_{\text{صفر}}} = \frac{\text{۳}}{\text{۲}} \cdot \frac{\text{حہ}(\text{ثہ} - \text{ث})}{\text{فہ}} \cdot \text{ج ط}$$

$$\therefore\ \text{ع} = \text{ع}_{\text{صفر}}\ \text{و}^{\text{عہ ط}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\text{۶۹})$$

جہاں $\text{عہ} = \frac{\text{۳}}{\text{۲}} \cdot \frac{\text{حہ}(\text{ثہ} - \text{ث})\ \text{ج}}{\text{فہ}}$

اس مساوات سے ظاہر ہے کہ شیرہ کے ذرات کا ارتکاز، گہرائی کے اضافہ سے بڑھتا ہے۔ لہذا اگر ہم ط کو ع کے مقابل مرتسم کریں تو ایک ایسا منحنی

حاصل ہوگا جس کی تقریبی شکل، شکل نمبر ۲۴ میں دکھائی گئی ہے۔

پیران نے اس کلیہ کا ثبوت عملی طور پر سنہ ۱۹۰۹ء میں دیا۔ اس نے گیمبوج کو ایتھل الکوہل میں حل کر کے آمیزہ کو پانی کی کثیر مقدار کے ساتھ ملانے کے بعد ایک شیرہ تیار کیا۔ اس تیار شدہ محلول میں چھوٹے چھوٹے کرہ نما ذرات موجود تھے جن کے حجم معمولی لسونتی محلول کے ذرات سے کسی قدر بڑے تھے۔ اس شیرہ کو ایک اسطوانہ میں رکھ کر اس کی ۰ء۱ مم بلندی کو پیران نے ایک زبردست خوردبین سے دیکھا جو مختلف سطحوں پر ماسکہ میں لائی جاسکتی تھی، اس نے یہ معلوم کیا کہ ابتدا میں سالمات کی تقسیم بظاہر یکساں رہی لیکن چند دقیقوں کے بعد یہ ظاہر ہوا کہ ذرات، نچلے پرتوں میں بہ نسبت اوپر کے پرتوں کے ایک دوسرے کے قریب تر جمع ہو گئے۔ چند گھنٹوں کے بعد تقسیم یکساں ہو گئی۔ اسکا بیان ہے کہ پندرہ دن کے بعد تقسیم کی ترتیب عملاً بالکل اسی طرح کی تھی جیسی کہ تین گھنٹوں کے اختتام پر پائی گئی تھی۔ ایک تجربہ میں گیمبوج کے ذرات کے لئے جنکا قطر ۲ء۵ × ۱۰<sup>-۵</sup> سم تھا، چار مختلف گہرائیوں پر جن میں علی الترتیب ۶ × ۱۰<sup>-۴</sup> سم کا فرق تھا، اس نے ذرات کی تعداد کو گن کر جب دریافت کیا تو عددوں میں ۳۰۵ : ۵۳۰ : ۹۴۰ : ۱۸۸۰ کی نسبت تھی۔

شکل نمبر ۲۴

ذرات کی کثافت معمولی طریقہ سے یعنی خشک شے کو ابتداءً ہی میں تولکر دریافت کی گئی تھی۔ ایک اور طریقہ بھی استعمال کیا گیا تھا یعنے ایک کثافت اضافی کی بوتل میں جس کا حجم ح تھا شیرہ بھر اگیا اور اسکا وزن معلوم کر لیا گیا، اسی بوتل کو پانی سے بھر کر یہ وزن بھی دریافت کیا گیا۔

فرض کرو کہ ان دونوں ح حجم کی کمیتوں کی قیمتیں بالترتیب $م_۲$ اور $م_۱$

کے مساوی ہیں۔ اس کے بعد ح حجم کا شیرہ لے کر اس کے پانی کو تبخیر کے ذریعہ خارج کر دیا گیا اور جو کچھ رسوب بچ رہا اس کو تول لیا۔ فرض کرو کہ اس رسوب کی کمیت م۳ ہے۔ اگر پانی کی کثافت ث ہو تو ح = $\frac{م_۱}{ث}$ اور چونکہ (م۲ − م۳) = اس پانی کی کمیت جو ح حجم کے شیرے میں موجود تھی لہٰذا اس پانی کا حجم جو ح حجم کے شیرے میں موجود تھا = $\frac{(م_۲ - م_۳)}{ث}$

$$\therefore \text{ذرات جو حجم گھیرتے ہیں} = \frac{م_۱}{ث} - \frac{م_۲ - م_۳}{ث}$$

$$\therefore \text{ذرات کی کثافت } ثہ = \frac{م_۳}{\left\{\frac{م_۱ - م_۲ + م_۳}{ث}\right\}} \quad \text{.........(۷۰)}$$

اس طرح گیمبوج کی کثافت ۲۰۷ء۰ گرام فی مکعب سمر نکلی۔

حہ یعنے ذرہ کے حجم کی دریافت کے لئے شیرہ میں اوپر کی سطح کے ذرات جاذبۂ زمین کی تحت جس شرح سے نیچے گرتے ہیں وہ شرح ناپی گئی اور اسٹوک کے کلیہ سے اس ذرے کا نصف قطر دریافت کیا گیا :۔

$$۶ \pi \text{ ص لہ س} = \frac{۴}{۳} \pi \text{ ص}^۳ (ثہ - ث) \text{ ج}$$

جہاں لہ = محلول کی لزوجیت

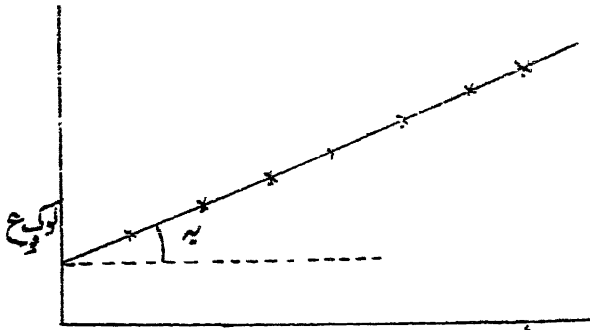
س = ذرہ کی رفتار

اور ص = ذرہ کا نصف قطر

چونکہ حہ = $\frac{۴}{۳}\pi$ ص$^۳$ لہٰذا ایک ذرہ کا حجم معلوم ہو جاتا ہے۔

ایک ذرہ کا حجم حسب ذیل طریقہ سے بھی دریافت کیا جا سکتا ہے :۔

مساوات (۶۹) سے $\text{لوک}_و \text{ ع} = \text{لوک}_و \text{ ع}_{صفر} + \text{عہ ط}$

اگر لوک$_و$ ع کو ط کے مقابل مرتسم کیا جائے تو شکل ۲۵ کی طرح ایک خط مستقیم حاصل ہوتی ہے۔ اس ترسیم کے میلان سے عہ کی قیمت دریافت

کی جا سکتی ہے یعنی عہ = مس بہ اس طرح حہ کی قیمت بالراست معلوم ہو جاتی ہے۔ اگر حہ معلوم ہو جائے تو عہ کی قیمت سے مستقل ن کی قیمت معلوم کی جا سکتی ہے۔

شکل ۷۵

**پیراَن کے تقسیمی کلیہ کی تصحیح :-** ای۔ ایف برٹن کی رائے میں پیراَن کا کلیہ صرف بہت ہی چھوٹی گہرائیوں یعنی ط کی بالکل چھوٹی قیمتوں کے لئے صحیح ہے۔ مختلف گہرائیوں کے لئے چاندی کے لس ونتی محلولوں پر برٹن نے متعدد مشاہدات حاصل کئے اور یہ دریافت کیا کہ ذرات کی تقسیم سطح کے قریب پیراَن کے کلیہ کی مطابقت کرتی ہے لیکن بڑی گہرائیوں پر ارتکاز ع کی قیمت عملاً مستقل ہو جاتی ہے۔ پیراَن نے اپنے کلیہ کو حاصل کرنے میں، ذرات کے باہمی عمل کا لحاظ نہیں رکھا۔ برٹن کا یہ خیال ہے کہ اس قسم کے شیرے کے ذرات ایک ہی قسم کی بجرن رکھتے ہیں جس کی وجہ سے وہ ایک دوسرے کو دفع کرتے رہتے ہیں۔ اس کو ثابت کرنے کے لئے اس نے خوردبین سے ایسے ذرات کا مشاہدہ کیا جن میں آپس میں تصادم کی کوئی علامت نہیں پائی جاتی تھی۔

اس طرح پیراَن کی مساوات میں، اس زائد دباؤ کے لئے، جو ذرات کی "فرط موٹائی کی پرت میں ان کے برقی دفع کے عمل سے پیدا ہوتا ہے" برٹن نے ایک تصحیحی رقم لکھ کر بڑی گہرائیوں کے لئے ایک مساوات حاصل کی جو حسب ذیل[۱۴] ہے :-

$$ع = \frac{حہ (ثہ - ث) ج}{گ پھ^۲} \quad \text{.........} \quad (۷۱)$$

جہاں گ = ایک مستقل

بھ = ہر ذرہ پر بھرن برقی سکونی اکائیوں میں

اس مساوات سے ظاہر ہے کہ ع کی قیمت مستقل رہتی ہے بشرطیکہ بھرن میں کوئی تبدیلی نہ ہو۔

اگر بھرن بھ کی قیمت گھٹتی ہے تو ع کی قیمت بڑھتی ہے۔

بعد میں پور ٹر اور ہیجز نے یہ بتایا کہ لس ونتی محلول میں ایک ہی علامت کی بھرن والے ذرات نہیں ہوتے۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ محلول تعدیلی ہے۔ ان دونوں نے زیادہ گہرائیوں کے لئے سیکر کی مشہور دباؤ "د" والی مساوات استعمال کرکے پیرائن کے کلیہ کو وسعت دینے کی کوشش کی۔

مساوات (۴۸) سے:۔

$$د = \frac{۲}{۳} ع فہ = \frac{ع لا ت}{ن}$$

فرض کرو کہ $د_۱ = د$ اور $د_۲ = د + فرد$

$$\therefore \text{حاصل دباؤ} = فرد = \frac{۲}{۳} فہ فرع = \frac{لا ت فرع}{ن}$$

$$= فرط (ثہ - ث) ج ع حہ$$

اسکے بجائے سیکر کی مساوات استعمال کرنے سے :۔

$$د = \frac{ع لا ت}{ن (۱ - ب ع)} \quad \text{جہاں ب = مستقل}$$

$$\therefore فرد = \frac{لا ت}{ن} \left\{ \frac{(۱ - ب ع) فرع + (ع ب فرع)}{(۱ - ب ع)^۲} \right\}$$

$$= \frac{لا ت}{ن} \cdot \frac{فرع}{(۱ - ب ع)^۲}$$

$$\text{تعادل کے لئے:۔} \quad فرد = \frac{لا ت}{ن} \cdot \frac{فرع}{(۱ - ب ع)^۲} =$$

$$= \text{فرط}\,(\text{ثہ} - \text{ث})\,\text{ج ح حہ}$$

گہرائی ط کے لئے اسکو تکملانے سے

$$\int \frac{\text{لات فرع}}{\text{ن ع}\,(\text{ا} - \text{ب ع})^{۲}} = \int (\text{ثہ} - \text{ث})\,\text{ج حہ فرط}$$

یعنی

$$\frac{\text{لات}}{\text{ن}}\left\{ \text{لوک}_{\text{و}}\,\text{ع} - \text{لوک}_{\text{و}}\,(\text{ا} - \text{ب ع}) + \frac{۱}{(\text{ا} - \text{ب ع})} \right\} =$$

$$= (\text{ثہ} - \text{ث})\,\text{ج حہ ط} + \text{گہ} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۷۲)$$

جہاں گہ = کوئی مستقل

ط کو ع کے مقابل مرتسم کرنے سے شکل ۲۶ کے مطابق ایک ترسیم حاصل ہوتی ہے۔ اس ترسیم سے یہ ظاہر ہے کہ چھوٹی گہرائیوں کے لئے پیران کا کلیہ صحیح ہے لیکن بڑی گہرائیوں کے لئے عملاً ع کی قیمت مستقل رہتی ہے۔ پروفیسر پورٹر نے اس ضابطہ کی تصدیق تجربہ سے حاصل کی۔

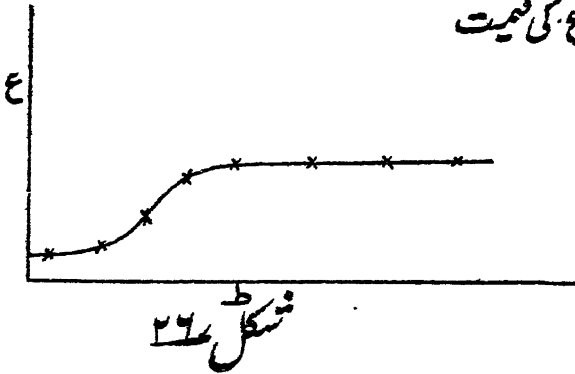
ع

ط

شکل ۲۶

فانڈروال اور سیکر کی مساوات سے:-

$$\left(\text{د} + \frac{\text{بہ}}{\text{ح}^{۲}}\right) = \frac{\text{ع لات}}{\text{ن}\,(\text{ا} - \text{ب ع})}$$

جہاں بہ = مستقل اور ح = مائع کا وہ حجم جس میں ایک ذرہ موجود ہے

$$= \frac{۱}{\text{ع}}$$

$$\therefore \text{د} = \frac{\text{ع لات}}{\text{ن}(\text{ا} - \text{ب ع})} - \text{ہ ع}^{2}$$

$$\therefore \text{فرد} = \frac{\text{لات}}{\text{ن}} \cdot \frac{\text{فرع}}{(\text{ا} - \text{ب ع})^{2}} - \text{۲ ہ ع فرع} =$$

$$= \text{فرط} (\text{ثہ} - \text{ث}) \text{ ج ع حہ}$$

اس کو تکملانے سے :-

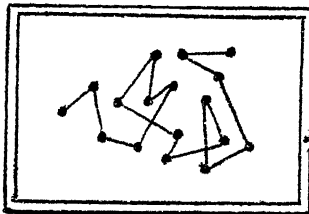
$$\frac{\text{لات}}{\text{ن}} \int \frac{\text{فرع}}{\text{ع}(\text{ا} - \text{ب ع})^{2}} - \int \frac{\text{۲ ہ ع فرع}}{\text{ع}} = \int (\text{ثہ} - \text{ث}) \text{ ج حہ فرط}$$

یعنی $\frac{\text{لات}}{\text{ن}} \left\{ \text{لو}_{\text{و}} \frac{\text{ع}}{(\text{ا} - \text{ب ع})} + \frac{1}{(\text{ا} - \text{ب ع})} \right\} - \text{۲ ہ ع} =$

$= (\text{ثہ} - \text{ث}) \text{ ج حہ ط} + \text{گہ}$ .................. (۷۳)

جہاں گہ = مستقل

اس مساوات کی، جو کہ سابق مساوات سے زیادہ صحیح ہے پیراں، برڈن اور ریورٹر کے تجربات سے تصدیق ہوتی ہے۔

**براؤنی حرکات:-** ۱۸۲۷ء تک پانی میں معلق خوردبینی اشیاء تیز تیز حرکت کرتے ہوئے مشاہدہ کئے گئے تھے۔ رابرٹ براؤن نامی ایک انگریز ماہر نباتیات نے اسکے متعلق مسلسل تجربے[۱۵] کئے اور یہ دریافت کیا کہ جب کسی ٹھوس شے کے نہایت چھوٹے چھوٹے ذرات خالص پانی یا کسی اور مائع میں معلق ہوتے ہیں تو ان سے ایک عجیب بے قاعدہ یا غیر منظم وضع کی حرکات ظہور پذیر ہوتے ہیں (شکل ۲۷) - ایک زبردست خوردبین کی مدد سے چھوٹے سے چھوٹا ذرہ اس

شکل ۲۷

طرح حرکت کرتے ہوئے جو دیکھا گیا اسکا قطر ۱/۳۰۰۰۰ انچ کے رتبہ کا تھا۔

اسکے بعد متعدد سائنسدانوں نے مختلف محلولوں، آمیزوں اور مائعات کی صورت میں ان عجیب و غریب حرکات کا مشاہدہ کیا لیکن کئی برس تک اسکی صحیح توجیہہ کسی نے بھی نہ کی۔ پچاس برس کے بعد ایک بلجیم کے رہنے والے شخص نے یہ تجویز پیش کی کہ یہ مظہر مائعات کے نظریہ تحرک کا مرئی ثبوت ہے۔ مائع کے سالمات ٹھوس کے معلق ذرات کو ہر طرف سے ٹکراتے اور ٹھکراتے رہتے ہیں اور اس سالمی تصادم کی وجہ سے ٹھوس کے ذرات اِدھر اُدھر حرکت کرتے ہوئے نظر آتے ہیں۔

براؤنی حرکات کو معلق ٹھوس ذرات کی نوعیت سے کوئی تعلق نہیں ہوتا اور انکو جاری رکھنے کیلئے ٹھوس ذرات کے حجم کو ۱۰ سمر کے رتبہ سے چھوٹا رکھنا ضروری ہوتا ہے۔ ان حرکات کے مرئی ہونے کیلئے دوسری شرط یہ ہے کہ ٹھوس ذرات برتن کے پیندے سے دُور رکھے جائیں۔ ہنری نے دریافت کیا کہ ربر کے شیرہ میں، ایسیٹک تیزاب یا الکوہل کی قلیل مقدار ملانے سے براونی حرکات میں کمی ہونے لگتی ہے۔ بلس لکھتا ہے کہ ریت یا گیح کے نہایت ہی چھوٹے ذرات کے شیرے میں، بے حد خفیف سی قلیوں کی مقدار ملانے سے حرکات میں اضافہ ہونے لگتا ہے، لیکن قلیوں کی مقدار بڑھادی جائے تو پھر براؤنی حرکات میں کمی واقع ہونے لگتی ہے[16]۔

اس مظہر کا نظریہ جدید زمانہ کا ہے۔ ۱۹۰۵ء میں آئنسٹائین نے جرمنی میں ریاضی کی مدد سے، کسی دیئے ہوئے وقت میں ایک ذرہ کے طے کردہ فاصلہ، اس ذرہ کے نصف قطر، مائع کی تپش اور اسکی لزوجیت کے درمیان ایک تعلق دریافت کیا[17]۔ اسی زمانہ میں لینژوان نے فرانس میں ایک دوسرے سادہ طریقہ سے اس مسئلہ کو حل کرنے کی کوشش کی۔ اسنے بھی وہی ضابطہ حاصل کیا۔ سمولوشوسکی کی رائے یہ تھی کہ چونکہ ذرات کو استوار کرہ فرض کرلینے اور سطحی تناؤ کی قوتوں کو نظر انداز کرنے کے بعد یہ ضابطہ حاصل ہوا ہے اسلئے نظری ضابطہ اور مشاہدات میں مطابقت کی ہمیں کوئی توقع نہیں رکھنی چاہیئے۔ لیکن پھر بھی ۱۹۱۰ء میں سوڈبرگ

نے مختلف مائعات میں پلاٹینم کے ذرات کی مدد سے تجربی طور پر اس ضابطہ کی تصدیق کی۔

۱۹۰۶ء میں سمولوشوسکی نے یہ بتایا کہ مائعات کی طرح گیسوں میں بھی براونی حرکات کا ہونا ضروری ہے اور وہی نظری ضابطہ جو مائعات میں استعمال کیا گیا تھا گیسوں میں بھی استعمال کیا جا سکتا ہے۔ ۱۹۰۷ء میں اہرن ہافنٹ نے تجربہ کی مدد سے یہ دریافت کیا کہ گیسوں میں مائعات کی بہ نسبت حرکت زیادہ تیز ہوتی ہے[۱۸]

سگریٹ کے دھویں اور امونیم کلورائیڈ کے دخان میں نسبتاً بڑے ذرات کی حرکات کو اس نے مشاہدہ کیا تھا۔ ۱۹۰۹ء میں اہرن ہافنٹ اور ڈی براگلی نے ہوا میں چاندی کے ذرات کو معلق رکھ کر نہ صرف نظری ضابطہ کی تصدیق کی بلکہ برقیہ کی بھرن کی قیمت بھی دریافت کی۔ ۱۹۱۱ء میں ملیکن نے برقی اور تجاذبی قوتوں کی مدد سے دو متوازی تختیوں کے درمیان تیل کے ایک قطرہ کو ہوا میں معلق رکھ کر براونی حرکات کا مطالعہ کیا[۱۹] اور اس طرح جا لاکی کے ساتھ، لزوجیت کی تکلیف دہ رقم کو نظری ضابطہ سے غائب کر دینے میں کامیابی حاصل کی۔ برقیہ پر بھرن کی جو قیمت اسنے دریافت کی تھی وہ اب بھی برقی اکائی کی معیاری قیمت تصور کی جاتی ہے۔

۱۹۱۵ء میں کارل[۱۹] نے فلیچر کے (برقیہ پر بھرن اور ائیوگیڈرو کے عدد کا حاصلضرب، معلوم کرنا) طریقہ کی مدد سے، اس ضابطہ کی تصدیق کی۔ ڈاکٹر وائس اور دیگر اشخاص بھی اسی طرح اسکی تصدیق کر چکے ہیں۔

براؤنی حرکات کا کلیہ[۲۰] :- براؤنی حرکات کے نظریہ کی تکمیل کا سہرا تین اشخاص یعنی آئنسٹائن، سمولوشوسکی اور لینژوان کے سر رہے گا۔

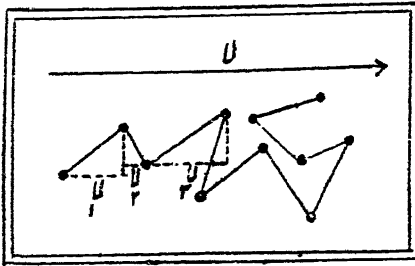
لینژوان کا آسان طریقہ ہم درج ذیل کرتے ہیں۔

مائع میں جو ذرات معلق رہتے ہیں انکو مائع کے سالمات ہر جانب سے

ٹکراتے ہیں اور ان ضربوں کی وجہ سے ہر ذرہ پر ایک حاصل قوت پیدا ہوتی ہے جس کے تحت یہ ذرات مختلف سمتوں میں حرکت کرنے لگتے ہیں لیکن مائع کی لزوجیت اس حرکت میں کمی کرنے کا تقاضا رکھتی ہے۔ اسٹوک کے کلیہ (۲۱) سے یہ کمی پیدا کرنے والی متضاد لزج قوت ۶ $\pi$ ص لہ س کے مساوی ہے۔

جہاں س = ذرہ کی رفتار

لہ = مائع کی لزوجیت

ص = ذرہ کا نصف قطر

فرض کرو کہ ہم صرف لا محور پر ان حرکات کی پیمائش کرنا چاہتے ہیں جیسا کہ شکل ع۲۸ میں دکھایا گیا ہے۔ فرض کرو کہ وقت و میں لا محور کی سمت میں ایک ذرہ کا مجموعی نقل مکان =

لا ۱، لا ۲، لا ۳

شکل ع۲۸

= (لا۱ + لا۲ + لا۳ + ........ + لاع)

اور نیز یہ بھی فرض کرو کہ ایک چھوٹے وقفہ فر و میں نقل مکان فر لا کے مساوی ہے۔

تب تعادل کے لئے حرکت کی مساوات حسب ذیل ہوگی:۔

ک (فر۲ لا / فر و۲) = جہ − ۶ $\pi$ ص لہ (فر لا / فر و) = جہ − گ (فر لا / فر و)

جہاں ک = ذرہ کی کمیت

جہ = لا سمت میں ضربوں کی وجہ سے قوت

اور گ = ۶ $\pi$ ص لہ

اوپر کی مساوات کو لا سے ضرب دینے سے

$$\text{ک لا}\,\frac{\text{فر}^{۲}\,\text{لا}}{\text{فر و}^{۲}} = \text{جہ لا} - \text{گ لا}\,\frac{\text{فر لا}}{\text{فر و}}$$

$$\text{لیکن لا}\,\frac{\text{فر}^{۲}\,\text{لا}}{\text{فر و}^{۲}} = \frac{۱}{۲}\,\frac{\text{فر}^{۲}\,(\text{لا}^{۲})}{\text{فر و}^{۲}} - \left(\frac{\text{فر لا}}{\text{فر و}}\right)^{۲}$$

$$\text{اور لا}\,\frac{\text{فر لا}}{\text{فر و}} = \frac{۱}{۲}\,\frac{\text{فر}\,(\text{لا}^{۲})}{\text{فر و}}$$

$$\therefore\ \frac{۱}{۲}\,\text{ک}\,\frac{\text{فر}^{۲}\,(\text{لا}^{۲})}{\text{فر و}^{۲}} - \text{ک}\left(\frac{\text{فر لا}}{\text{فر و}}\right)^{۲} = \text{جہ لا} - \frac{\text{گ}}{۲}\cdot\frac{\text{فر}\,(\text{لا}^{۲})}{\text{فر و}}$$

اس مساوات کو نقل مکان کی مجموعی تعداد ع کے لئے لکھنے سے :—

پہلے نقل مکان کیلئے :—

$$\frac{\text{ک}}{۲}\,\frac{\text{فر}^{۲}\,(\text{لا}_{۱}^{۲})}{\text{فر و}^{۲}} - \text{ک}\left(\frac{\text{فر لا}_{۱}}{\text{فر و}}\right)^{۲} = \text{جہ لا}_{۱} - \frac{\text{گ}}{۲}\cdot\frac{\text{فر}\,(\text{لا}_{۱}^{۲})}{\text{فر و}}$$

دوسرے نقل مکان کے لئے :—

$$\frac{\text{ک}}{۲}\cdot\frac{\text{فر}^{۲}\,(\text{لا}_{۲}^{۲})}{\text{فر و}^{۲}} - \text{ک}\left(\frac{\text{فر لا}_{۲}}{\text{فر و}}\right)^{۲} = \text{جہ لا}_{۲} - \frac{\text{گ}}{۲}\cdot\frac{\text{فر}\,(\text{لا}_{۲}^{۲})}{\text{فر و}}$$

تیسرے نقل مکان کے لئے :—

$$\frac{\text{ک}}{۲}\cdot\frac{\text{فر}^{۲}\,(\text{لا}_{۳}^{۲})}{\text{فر و}^{۲}} - \text{ک}\left(\frac{\text{فر لا}_{۳}}{\text{فر و}}\right)^{۲} = \text{جہ لا}_{۳} - \frac{\text{گ}}{۲}\cdot\frac{\text{فر}\,(\text{لا}_{۳}^{۲})}{\text{فر و}}$$

اسی طرح چوتھے کے لئے :—

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\frac{\text{ک}}{۲}\cdot\frac{\text{فر}^{۲}\,(\text{لا}_{\text{ع}}^{۲})}{\text{فر و}^{۲}} - \text{ک}\left(\frac{\text{فر لا}_{\text{ع}}}{\text{فر و}}\right)^{۲} = \text{جہ لا}_{\text{ع}} - \frac{\text{گ}}{۲}\cdot\frac{\text{فر}\,(\text{لا}_{\text{ع}}^{۲})}{\text{فر و}}$$

ان تمام مساواتوں کو جمع کرنے اور شمارکنندہ اور نصب نما کو مجموعی تعداد ع سے ضرب دینے سے :—

$$\frac{\text{ک}}{۲}\,\text{ع}\cdot\frac{\text{فر}^۲}{\text{فرو}^۲}\left\{\frac{\text{لا}_۱^۲+\text{لا}_۲^۲+\cdots\cdots+\text{لا}_\text{ع}^۲}{\text{ع}}\right\}-\frac{\text{ک}\,\text{ع}\left[\left(\frac{\text{فرلا}_۱}{\text{فرو}}\right)^۲+\left(\frac{\text{فرلا}_۲}{\text{فرو}}\right)^۲+\cdots\cdots+\left(\frac{\text{فرلاع}}{\text{فرو}}\right)^۲\right]}{\text{ع}}$$

$$=\sum \text{جہ لا}-\frac{\text{گ}}{۲}\,\text{ع}\,\frac{\text{فر}}{\text{فرو}}\,\frac{\left(\text{لا}_۱^۲+\text{لا}_۲^۲+\cdots\cdots+\text{لا}_\text{ع}^۲\right)}{\text{ع}}$$

فرض کرو کہ $\overline{\text{لا}}^۲=\frac{\text{لا}_۱^۲+\text{لا}_۲^۲+\cdots\cdots+\text{لا}_\text{ع}^۲}{\text{ع}}$

لیکن مساوات (۲۶) سے $\text{فہ}=\frac{۳\,\text{لا ت}}{۲\,\text{ن}}$

∴ صرف محور لا کی سمت میں اوسط توانائی بالفعل $=\text{فہ}_۱=\frac{\text{لا ت}}{۲\,\text{ن}}$

$$=\frac{۱}{۲}\,\frac{\text{ک}}{\text{ع}}\left\{\left(\frac{\text{فرلا}_۱}{\text{فرو}}\right)^۲+\left(\frac{\text{فرلا}_۲}{\text{فرو}}\right)^۲+\cdots\cdots+\left(\frac{\text{فرلاع}}{\text{فرو}}\right)^۲\right\}$$

اسکو سابق مساوات میں درج کرنے سے :-

$$\frac{\text{ک}}{۲}\,\text{ع}\,\frac{\text{فر}^۲\left(\overline{\text{لا}}^۲\right)}{\text{فرو}^۲}-\frac{\text{ع لا ت}}{\text{ن}}=\sum\text{جہ لا}-\frac{\text{گ}}{۲}\,\text{ع}\,\frac{\text{فر}\left(\overline{\text{لا}}^۲\right)}{\text{فرو}}$$

ایک محدود وقت کیلئے $\sum$ جہ لا = صفر چونکہ یہ ممکن ہے کہ نقل مکان لا کی مثبت اور منفی سمت میں تقریباً مساوی ہو۔

فرض کرو کہ $\text{ما}=\frac{\text{فر}\overline{\text{لا}}^۲}{\text{فرو}}$ ۔ اس صورت میں

$$\frac{\text{ک}}{۲}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرو}}-\frac{\text{لا ت}}{\text{ن}}=-\frac{\text{گ}}{۲}\,\text{ما}$$

یعنی $\frac{\text{فرما}}{\text{ما}-\frac{۲\,\text{لا ت}}{\text{ن گ}}}=-\frac{\text{گ}}{\text{ک}}\,\text{فرو}$

اس کو تکملانے سے :-

$$\text{لوک}_\text{و}\left(\text{ما}-\frac{۲\,\text{لا ت}}{\text{ن گ}}\right)=-\frac{\text{گ}}{\text{ک}}\,\text{و}+\text{مہ}$$

جہاں مہ = مستقل

یعنی ما = ۲ لا ت / ن گ = گہ و − گ/ک و ، جہاں گہ = مستقل

اگر و بہت بڑا ہو تو گ و − گ/ک و ـــ = صفر

∴ ما = ۲ لا ت / ن گ یعنی فر لا۲ / فر و = ۲ لا ت / ن گ

اسکو ایک محدود وقت و کیلئے ابتدائی حالت سے انتہائی حالت تک تکملانے سے :—

فر لا۲ = ∫ (صفر سے و تک) ۲ لا ت / ن گ فر و (ابتدائی حالت سے انتہائی حالت تک)

یعنی لا۲ = (لا۱۲ + لا۲۲ + ...... + لاع۲) / ع = ۲ لا ت / ن گ . و ......(۷۴)

پیراں نے تجربہ کے ذریعہ اس مساوات کی تصدیق کی اور آبیوگیڈرو کے مستقل ن کی قیمت اس سے معلوم کی۔

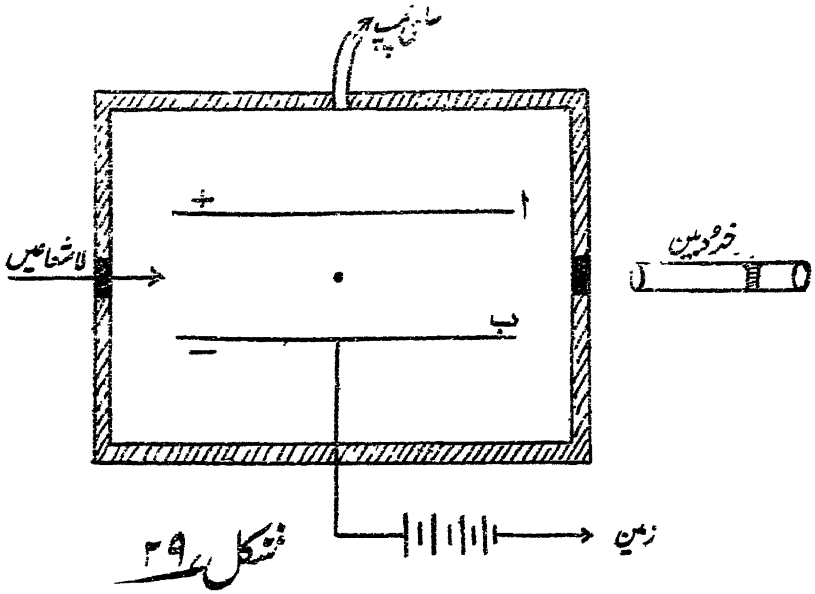
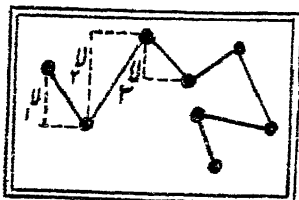
خطی براؤنی حرکات کے علاوہ گردشی براؤنی حرکات بھی واقع ہوتے ہیں آئینسٹائین نے ایک خاص محور کے اعتبار سے وقت و میں گردشی زاویہ ط کے اوسط مربع کیلئے سالمی دھکوں سے ذرات میں جو گردش پیدا ہوتی ہے اسکا لحاظ کرتے ہوئے حسب ذیل مساوات حاصل کی :—

ط۲ = (ط۱۲ + ط۲۲ + ...... + طع۲) / ع = لا ت / ن . و / (۴π لہ ص۳) ......(۷۵)

پیراں نے ایک خوردبین کی مدد سے نسبتاً بڑے ذرات کی گردش کیلئے ایک خاص وقت میں شاہدات لیکر اس مساوات کی تصدیق کرنے میں کامیابی حاصل کی۔

ملیکن کے تیل کے قطرہ والا تجربہ :— ملیکن نے اپنے تجربہ میں بہت ہی چھوٹے تیل کے قطرے ۱۰^-۴ سمر نصف قطر کے رتبہ کے استعمال کئے۔ تیل کی پھوار کو ایک سادہ جوہر پاش کے ذریعہ ایک خانہ میں پھونک کر لینے ان قطروں کو حاصل کیا، اور ایک قطرہ کو دو متوازی افقی تختیوں ا اور ب کے درمیان جہاں کہ

ہوا موجود تہی مقید کر لیا جیسا کہ شکل ۲۹ میں دکھایا گیا ہے۔ ان دونوں تختیوں کے درمیان ایک برقی میدان اسطرح قائم کیا گیا کہ تیل کا قطرہ معلق دونوں کے درمیان توازن میں رہے۔ اسکا مطلب یہ ہے کہ تجاذبی قوت تو قطرہ کو

شکل ۲۹

نیچے کی طرف کہینچتی تہی لیکن برقی قوت اسکو اوپر کیطرف ہٹانے کا تقاضا کرتی تہی۔ لاشعاعوں کے ذریعہ تختیوں کے درمیان روانی میدان قائم کیا گیا تھا اور قطرہ اس طرح ایک یا زیادہ برقیوں کی بہرنوں سے بڑھایا گیا تھا جب قطرہ معلق تھا تو براونی حرکتوں کو ایک زبردست خوردبین کے ذریعہ انتصابی محور کی سمت میں مشاہدہ کیا گیا چشمہ کے پیمانہ پر نقل مکان "لا" ناپا گیا اور وقت نگار کے ذریعہ وقت و کی قیمت معلوم کر لی گئی۔ تجربہ سے یہ معلوم ہوا کہ ہوا کے دباؤ کو کم کرنے سے حرکات معمولی دباؤ کے مقابلہ میں بہت تیز ہوتے ہیں اور نیز تیل کا قطرہ پانی کے قطرہ کی نسبت زیادہ نقل مکان کرتا ہے۔

شکل ۳۰

ملیکن نے اپنے تجربہ میں مساوات (۴۷)

سے گ کی قیمت کا ازالہ کرنے کی کوشش اسوجہ سے کی کہ اس زمانہ میں لزوجت
کی قیمت کچھ زیادہ قابل اطمینان نہیں تصور کی جاتی تھی۔ اسنے قطرہ کو تجاذبی قوت
کے تحت نیچے گرا کر یکساں نیچے کی طرف کی رفتار $ر_1$ کی قیمت معلوم کی۔ اسکے بعد
پھر قطرہ کو برقی قوت کے تحت اوپر چڑھنے دیا اور یکساں اوپر کی طرف کی رفتار $ر_2$
دریافت کیا۔

جب قطرہ نیچے گر رہا تھا تو اسٹوک کے کلیہ سے:۔

گ $ر_1$ = ک ج     جہاں ک = قطرے کی کمیت

جب قطرہ اوپر چڑھ رہا تھا تو ق بھ = ک ج + گ $ر_2$ = گ ($ر_1 + ر_2$)

جہاں ق = برقی حدت اور بھ = قطرہ پر برقی بھرن

$$\therefore \text{گ} = \frac{\text{ق بھ}}{(ر_1 + ر_2)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۷۶)$$

مساوات (۷۴) اور (۷۶) سے:۔

$$\overline{\text{لا}}^2 = \frac{2\, \text{لا ت و}}{\text{ن}} \cdot \frac{(ر_1 + ر_2)}{\text{ق بھ}}$$

یہ $\overline{\text{لا}}^2$ نقل مکان کا اوسط مربع ہے۔ اگر ہم اسکو حسابی اوسط نقل مکان
مثلاً $\Delta \overline{\text{لا}}^2$ میں تحویل کریں تو مساوات (۲۲) سے:۔

$$\Delta \overline{\text{لا}}^2 = \overline{\text{لا}}^2 \times \frac{8}{\pi 3}$$

اس قیمت کو اوپر کی مساوات میں اگر لکھا جائے تو

$$\text{ن بھ} = \frac{16}{\pi 3} \cdot \frac{\text{لا ت و}\,(ر_1 + ر_2)}{\text{ق}\, \Delta \overline{\text{لا}}^2} \quad \ldots\ldots\ldots (۷۷)$$

اس مساوات سے ملیکن نے ن بھ کی قیمت $۲۶۸۹۰ \times ۱۰^{۱۴}$ برقی سکونی
اکائیوں کے مساوی دریافت کی۔

اسکے بعد مارفے فلیچر نے سنہ ۱۹۱۴ء میں اسی تیل کے قطرہ کے طریقہ کو استعمال
کرکے گ کی قیمت کو اسی طرح ساقط کیا۔ اسنے $\Delta \overline{\text{لا}}^2$ لینے کے بجائے، جیسٹہ

کے پیمانہ کے مختلف درجوں کے لئے، وقت کا اوسط حسابی تغیر ناپ لیا۔ اسطرح (19)
اسکو جو قیمت حاصل ہوئی وہ ملیکن کی ن بھ کی قیمت سے عملی طور پر ملتی تھی۔

**برقیہ کی بھرن کی تخمین :-** ملیکن کے تجربہ میں جبکہ تیل کا قطرہ تجاذبی قوت کے تحت گر رہا تھا :-

$$\text{ک ج} = \text{گ}\,\text{س}_1 = 6\pi\,\text{ص}\,\text{لہ}\,\text{س}_1$$

اور جب برقی قوتوں کے تحت قطرہ اوپر جا رہا تھا :-

$$\text{ق بھ} = \text{ک ج} + 6\pi\,\text{ص}\,\text{لہ}\,\text{س}_2$$

$$\therefore \frac{\text{ق بھ}}{\text{ک ج}} = 1 + \frac{\text{س}_2}{\text{س}_1} = \frac{\text{س}_1 + \text{س}_2}{\text{س}_1} \quad \ldots\ldots\ldots (78)$$

اگر ک ج کی قیمت معلوم ہو جائے تو برقیہ پر کی بھرن بھ کی قیمت معلوم کی جا سکتی ہے لیکن بالراست ک ج کی دریافت آسان مسئلہ نہیں ہے۔

$$\text{مگر ک ج} = \frac{4}{3}\pi\,\text{ص}^3(\text{ثہ} - \text{ث})\,\text{ج} = 6\pi\,\text{ص}\,\text{لہ}\,\text{س}_1$$

جہاں ثہ = تیل کی کثافت اور ث = واسطہ کی کثافت

$$\therefore \text{ص} = \sqrt{\frac{9\,\text{لہ}\,\text{س}_1}{2(\text{ثہ} - \text{ث})\,\text{ج}}}$$

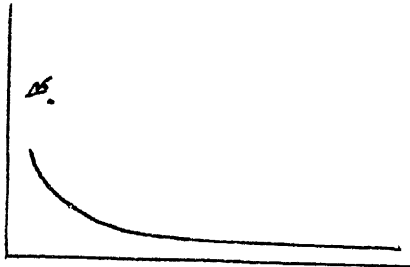
$$\text{یعنی ک ج} = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{9\,\text{لہ}\,\text{س}_1}{2(\text{ثہ} - \text{ث})\,\text{ج}}\right)^{\frac{3}{2}}(\text{ثہ} - \text{ث})\,\text{ج}$$

$$= \frac{4}{3}\pi\left(\frac{9\,\text{لہ}}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot (\text{س}_1)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\text{ثہ} - \text{ث})\,\text{ج}}} \quad \ldots\ldots\ldots (79)$$

لہذا مساوات (۷۸) اور (۷۹) سے

$$\text{بھ} = (\text{س}_1)^{\frac{1}{2}} \cdot (\text{س}_1 + \text{س}_2) \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{\pi}{\text{ق}}\left(\frac{9\,\text{لہ}}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\text{ثہ} - \text{ث})\,\text{ج}}} \quad \ldots\ldots (80)$$

اس مساوات سے بھ کی قیمت بہ آسانی معلوم کی جا سکتی ہے۔

مگر ملیکن نے اپنے تجربہ میں یہ دریافت کیا کہ بالکل چھوٹے چھوٹے قطروں کے لئے بھ کی قیمت نصف قطر کے گھٹنے سے کسی قدر بڑھ جاتی ہے، لیکن بڑے قطروں کے لئے بھ کی قیمت عملی طور پر مستقل رہتی ہے جیسا کہ شکل ۱۳۱ میں ترسیم کے ذریعہ دکھایا گیا ہے۔

کننگھیم نامی ملیکن کے ایک شاگرد نے اس کی توجیہ کی اور تیل کے بالکل چھوٹے قطروں کی صورت میں اس نے ایک تصحیح بھی نکالی۔ اس کا خیال تھا کہ اسٹوک کا کلیہ بالکل ہی چھوٹے چھوٹے قطروں کے لئے بالکل صحیح نہیں ہو سکتا۔ (۲۳) کننگھیم کی رائے کے مطابق جب کوئی قطرہ کسی واسطہ میں گرتا ہے تو قطرہ کی رفتار (س) اس کو گھیرے ہوئے واسطہ کی پرت کی رفتار کے مساوی نہیں ہوتی، کیونکہ اس صورت میں قطرہ کی اردگرد کی پرت پھسل جانے کا امکان ہے۔ اگر گرتے ہوئے قطرہ کی رفتار س۱ ہو تو اس کے اطراف کی پرت کی رفتار بہ س۱ ہو سکتی ہے، جہاں بہ کوئی کسر ہے۔ لہذا وہ قوت جو کہ قطرہ کو پیچھے کھینچ لے جانے کی کوشش کرتی ہے = ۶ π ص لہ بہ س۱، مساوات (۳۵) سے مماسی قوت فی اکائی رقبہ جو قطرہ کو پیچھے کھینچنے کا تقاضا رکھتی ہے =

بھ

ص

شکل ۱۳۱

= گہ س۱ √( ک / ۲ π لا ت )

جہاں گہ = مستقل، س۱ = اضافی رفتار = (س۱ − بہ س۱)

$$\therefore \text{۶} \pi \text{ ص له به ما} =$$

$$= \text{۴} \pi \text{ ص}^{\text{۲}} \text{ گہ ما} (\text{۱} - \text{به}) \text{ د} \sqrt{\frac{\text{ع}}{\text{۲} \pi \text{ لا ت}}}$$

$$\text{یعنی } \frac{\text{به}}{\text{۱} - \text{به}} = \frac{\text{گہ د } \frac{\text{۲}}{\text{۳}} \text{ ص} \sqrt{\frac{\text{ع}}{\text{۲} \pi \text{ لا ت}}}}{\text{له}} = \frac{\text{د ص}}{\text{مہ}}$$

$$\text{جہاں مہ} = \frac{\text{له}}{\frac{\text{۲}}{\text{۳}} \text{ گہ} \sqrt{\frac{\text{ع}}{\text{۲} \pi \text{ لا ت}}}} = \text{مستقل}$$

$$\therefore \text{به} = \left(\text{۱} + \frac{\text{مہ}}{\text{د ص}}\right)^{-\text{۱}}$$

∴ بالکل چھوٹے قطروں کے لئے صحیح اسٹوک کا کلیہ:—

$$\text{قوت} = \text{۶} \pi \text{ ص له} \left(\text{۱} + \frac{\text{مہ}}{\text{د ص}}\right)^{-\text{۱}} \text{ما} \quad \ldots\ldots\ldots (\text{۸۱})$$

لہذا مساوات (۸۰) میں ہم کو صرف له کی جگہ $\text{له} \left(\text{۱} + \frac{\text{مہ}}{\text{د ص}}\right)^{-\text{۱}}$ لکھنا چاہیئے تاکہ بھ کی صحیح قیمت تیل کے چھوٹے قطروں کی صورت میں حاصل ہو سکے۔

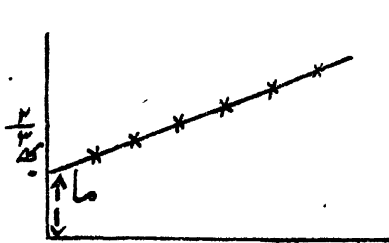
فرض کرو کہ تصحیح کے بعد قیمت $\overline{\text{بھ}}$ اور غیر تصحیح شدہ قیمت بھ ہے جو مساوات (۸۰) سے حاصل ہوتی ہے۔

اس صورت میں

$$\overline{\text{بھ}} = (\text{ما}_\text{۱})^{\frac{\text{۱}}{\text{۲}}} \cdot (\text{ما}_\text{۱} + \text{ما}_\text{۲}) \cdot \frac{\text{۴}}{\text{۳}} \frac{\pi}{\text{ق}} \left\{ \frac{\text{۹}}{\text{۲}} \text{ له} \left(\text{۱} + \frac{\text{مہ}}{\text{د ص}}\right)^{-\text{۱}} \right\}^{\frac{\text{۳}}{\text{۲}}} \frac{\text{۱}}{\sqrt{(\text{ثہ} - \text{ث}) \text{ج}}} \quad \ldots\ldots (\text{۸۲})$$

لہذا مساوات (۸۰) اور (۸۲) سے :—

$$\frac{\text{بھ}}{\text{بھ.}} = \frac{1}{\left(1+\frac{\text{مہ}}{\text{دص}}\right)^{-\frac{3}{2}}}$$

یعنی $\text{بھ}^{\frac{2}{3}} = \text{بھ.}^{\frac{2}{3}} + \text{بھ.}^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{\text{مہ}}{\text{دص}}$ ............ (۸۳)

اگر $\text{بھ}^{\frac{2}{3}}$ کو $\frac{1}{\text{دص}}$ کے مقابل مرتسم کیا جائے تو منحنی کی شکل شکل ۳۲ کی طرح حاصل ہوگی۔ خط کے مقطوعہ "ما" سے $\text{بھ.}^{\frac{2}{3}}$ کی قیمت معلوم ہوجاتی ہے لہذا ترسیم سے بالکل چھوٹے قطروں کی صورت میں برقیہ پر بھرن کی صحیح قیمت معلوم کی جاسکتی ہے۔

شکل ۳۲

## Chapter X.

(۱) Collected Works "Maxwell" Vol. 1, P380
(۲) Jean's Dynamical Theory of Gases or Properties of Matter "Newman & Searle" P231 (1928)
(۳) Phys. Rev 30, P931
(۴) Phys. Rev, 5, P212, (1915)
(۵) Ann-der-Physik 31. P205 (1910)
(۶) Phys. Rev. 4, P491 (1914)
(۷) " " 12 P70 (1918)
(۸) Proc-Roy. Soc. A 103 P469 (1923) and
" " 113 P520 (1927)
(۹) Phys. Rev. 2, P327 (1913) or Text Book of Heat "M. N. Saha & B N. Srivastava" P207 (1931)
(۱۰) Jeans' Dynamical Theory of Gases P37
(۱۱) Phil Mag; 36, P507 (1893)
(۱۲) Text Book of Heat "M. N. Saha & B. N. Srivastava" P126 (1931) or General Physics for Students "E. Edser" P 564 (1926)
(۱۳) The Physical Properties of Colloidal Solutions "E. F. Burton" P80 (1921)
(۱۴) " " " " " " P88 (1921)
(۱۵) Phil. Mag. 4. P161 (1828)
(۱۶) Phys Rev. 2, P373 (1895)
(۱۷) Ann. der. Physik. 19 P 371 (1906)
22, P569 (1907)
(۱۸) Theory of Brownian Movement "Einstein" P104 (1926)
(۱۹) The Electron "R. A. Millikan" P145
(۲۰) Text Book of Heat "M. N. Saha & B. N. Srivastava" P729 (1931)
(۲۱) Hydrodynamics "H. Lamb" P567 (1924)
(۲۲) Proc. Roy. Soc A. 83 P357

# اسمی اشاریہ

## ف



## ک

## گ



## ل



## م

# فہرست اصطلاحات

آزاد راہ — Free path
آمیزہ — Mixture
ابعاد — Dimensions
اتار — Depression
احتمال — Probability
ارتکاز — Concentration
استواری کی شرح — Modulus of rigidity
اوج — Crest
اوچھال — Buoyancy

## ب

برآمد — Output
برق پیما — Electrometer
برقیہ — Electron
بستگی — Condensation
بقائے توانائی — Conservation of energy
بگاڑ — Strain
بنیادی اکائی — Fundamental unit
بوجھ — Load
بین السالماتی — Intermolecular

## پ

پتر — Lamina
پٹہ — Belt
پچکاو — Compressibility
پرت — Layer
پیچندگی کا جفت — Torque

## ت

تپشی قدر — Temperature coefficient
تداخل پیما — Interferometer
تداخلی دھاریاں — Interference fringes
تدویر نما — Cycloid
تصعید — Sublimation
تعدیلی محور — Neutral Axis
تقطیب — Polarisation
تلطیف — Rarefaction
تمددی طاقت — Tensile strength
تنویری چمک — Flashes of illumination

## ج

جری قوت — Shearing force
جفت — Couple
جمود کا معیار اثر — Moment of inertia
جوہر پاش — Atomizer
جھلی — Membrane

## چ

چپٹی کمانی — Flat spring
چڑھاو — Elevation

## ح

حرارت مخفی — Latent Heat
حرارت نوعی — Specific heat
حربرقی — Thermoelectric
حرحرکیات — Thermodynamics
حرناگزار لچک — Adiabatic elasticity
حضیض — Trough
حل پذیر — Soluble

## خ

خط استوا — Equator
خماو — Bending
خمیدگی کا معیار اثر — Bending moment

## د

درجہ آزادی — Degree of freedom
دھاردار پتی — Blade
دھاردار کنارہ — Knife edge
دھجی — Strip
دھری — Axle
دوجوہری — Diatomic
دوریشی تعلیق — Bifilar suspension

**ر**

Hodograph — رسم الطریق
Stirrup — رکاب
Fibre — ریشہ

**ز**

Supersaturated — زائد سیر شدہ
Stress — زور

**س**

Simple harmonic — سادہ موسیقی
Surface Tension — سطحی تناو
Vector — سمتی
Filament — سوت

**ش**

Capillary Tube — شعری نلی
Emulsion — شیرہ

**ط**

Volatile — طیران پزیر

**ع**

Latitude — عرض البلد
Lateral contraction — عرضی سکڑاو

**غ**

Aeolotropic — غیرمتساوی السموت

**ف**

Piston — فشارہ

**ق**

Damped Oscillation — قسری اہتزاز
Forced vibration — قسری ارتعاش
Crystal — قلم
Potentiometer — قوہ پیما

**ک**

Perfect differential — کامل تفرق
Perfect gas — کامل گیس

**گ**

Radius of gyration — گردشی نصف قطر

**ل**

Viscous — لزج
Viscosity — لزوجت
Colloidal — لسوتی
Logarithmic decrement — لوگارتمی تنزل
Ripple — لہر

**م**

Inclined spring — مائل کمانی
Homogeneous — متجانس
Isotropic — متساوی السموت
Bladder — مثانہ
Solid angle — مجسم زاویہ
Gaurd rings — محافظ حلقے
Solvent — محلل
Solution — محلول
Spiral — مرغولہ
Compound pendulum — مرکب رقاص
Centrifugal force — مرکزگریز قوت
Torsion — مروڑ
Torsional Hysteresis — مروڑی اختناق
Porous — مسامدار
Deposit — مطروحہ
Momentum — معیار حرکت
Modulus of Elasticity — معیار لچک
Scalar — مقداری
Intercept — مقطوعہ
Rarefied — ملطف
Amalgamated — ملغم

| | |
|---|---|
| Solute | منحل |
| Zone | منطقہ |
| Beads | منکے |
| Effective | موثر |
| Thermal conductivity | موصلیت حرارت |

## ن

| | |
|---|---|
| Entropy | ناکارگی |
| Theory of Relativity | نظریہ اضافیت |
| Kinetic theory | نظریہ تحرک |
| Diffusion | نفوذ |
| Permeability | نفوذ پزیری |
| Point of suspension | نقطہ تعلیق |
| Yield point | نقطہ معلوبیت |
| Specific inductive capacity | نوعی امالی گنجائش |
| Semi permeable | نیم نفوذ پزیر |

## و

| | |
|---|---|
| Medium | واسطہ |
| Receiver | وصول کنندہ |
| Osmosis | ولوج |
| Osmotic pressure | ولوجی دباو |

## ہ

| | |
|---|---|
| Hyperbolae | ہزلولی |
| Meniscus | ہلالی سطح |
| Isothermal elasticity | ہم تپشی لچک |

## ی

| | |
|---|---|
| Monatomic | یک جوہری |